

专题: 低温等离子体非平衡输运与主动调控

泵波作用下电离层等离子体中波-波、波-粒相互作用过程的数值模拟

张梦龙 方川 张子明 李和平†

(清华大学工程物理系, 北京 100084)

(2025年6月18日收到; 2025年8月15日收到修改稿)

以地面发射的高功率电磁波与电离层等离子体之间的相互作用为研究对象, 基于等离子体流体模型和 Zakharov 方法, 建立了用于描述地面泵波作用下电离层等离子体中波-波、波-粒相互作用的物理数学模型, 开展了电离层主动加热的数值模拟研究. 计算结果表明: 当地面发射的泵波在电离层等离子体中传播时, 反射高度处电磁波能量的沉积会产生较强的局部电场, 从而激发参量不稳定性过程; 当满足频率和波矢的匹配关系时, 会激发泵波、Langmuir 波和离子声波三波相互作用的参量衰减不稳定性, 以及泵波、上混杂波和下混杂波三波相互作用的参量不稳定性; 在本文所研究的泵波频率和功率范围内, 泵波频率的降低会导致寻常波的反射高度降低, 且电子温度的扰动比例随着频率的降低而升高, 而泵波功率的增大则会导致等离子体从泵波中吸收的能量增大、电子温度升高. 本文数值模拟结果揭示了不同泵波参数对电离层等离子体特性时空演化的影响规律以及波-粒能量输运过程, 阐释了实验观察到的参量不稳定性 and 受激电磁辐射等的产生机制.

关键词: 电离层人工加热, 非平衡输运, 参量不稳定性, 数值模拟**PACS:** 94.05.Pt, 52.20.-j, 94.20.Bb, 52.65.-y**DOI:** 10.7498/aps.74.20250788**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250788

1 引言

电离层是距离地面约 60—1000 km 的地球高层大气受到太阳电磁辐射、宇宙射线的作用而形成的等离子体区域^[1], 是地球空间环境的一个重要组成部分, 其中等离子体频率覆盖了长波、中波和短波的频率范围, 对电波传播有较大影响^[2]. 电离层气体的成分以及电子数密度等参数随着高度、经纬度、昼夜、季节及太阳活动而变化. 利用地面大功率电磁波(泵波)入射到电离层, 通过注入能量改变局部电离层电子温度、密度等物理特性, 从而可以实现对电离层的人为调控, 即实现电离层人工加热^[3,4]. 由于外场在空间上总是存在着方向和强弱的分布, 等离子体中带电粒子在外场作用下的分布

状态也会存在一定的各向异性, 例如沿地磁场方向的密度条纹体(密度不均匀体)^[5]. 同时, 等离子体的分布形态也会影响对电磁波的吸收、透射、反射和散射等作用, 从而改变电磁波的传播特性. 电磁波的能量可以分为电场能量和磁场能量两部分, 当电磁波转化为等离子体静电波后, 磁场能量转化为电场能量, 使得电场强度增大. 电磁波激发的电子静电波和离子静电波可加热带电粒子, 从而将能量传递给等离子体. 因此, 为了提高电离层等离子体对电磁波能量的吸收效率, 需要将高频电磁波快速转化为等离子体静电波.

由“能量树”概念^[6]可知, 碰撞等离子体中存在着复杂的质量-动量-能量非平衡协同输运过程, 一定强度的外场作用会引起等离子体的扰动, 从而可能导致等离子体偏离电、化学、热力学平衡态, 甚

† 通信作者. E-mail: liheping@tsinghua.edu.cn

至使粒子的速度和能量分布偏离 Maxwell 分布. 如图 1 所示, 当一束电磁波在等离子体中传播时, 一方面, 电子与光子相互作用吸收能量 [7], 并通过碰撞过程传递给重粒子或耗散到周围环境中 [8,9], 这与碰撞等离子体条件下的非平衡输运具有一定的相似性 [6]; 而另一方面, 由于电离层等离子体环境压强较低 (在 10^{-5} — 10^2 Pa 的范围内), 粒子数密度较低、碰撞较弱, 使得一定强度的外场作用不仅会引起等离子体显著偏离平衡态, 而且会激发出各种不稳定性及非线性效应, 进而强化了等离子体内部的质量、动量和能量交换. 其中, 受激电磁辐射 (stimulated electromagnetic emission, SEE) 是高频电磁波加热电离层等离子体过程中的一个典型特征 [1]. SEE 特征强度不仅可以反映密度条纹体的空间尺度和密度扰动程度, 而且其频谱信息可以间接反映波-波、波-粒相互作用过程 [10-13].

基于等离子体流体理论 [14,15], 国内外研究者开展了大量有关电离层主动加热过程, 特别是波-波相互作用和不稳定性的数值模拟和实验研究, 分析了等离子体中波的特性和行为、外场作用下空间电离层等离子体非平衡输运机制和关键参数的时空演化特性. 例如, 黄文耿等 [3] 建立了不同高度电离层加热的流体模型, 模拟发现在 60—120 km 的低电离层区域, 欧姆加热效果十分显著, 而在 150 km 以上的高电离层区域, 反常吸收是主要的电波能量吸收机制. 汪四成等 [16] 利用此模型, 通过数值模拟分析了不同电磁波入射条件下电离层等离子体中电子温度和电子数密度的变化, 发现电离层 D 区

是电波能量的主要吸收区, 且吸收强度随入射频率的升高而降低, 但仍需进一步研究过密加热条件下的反常吸收作用. Wong 等 [17] 基于线性微扰理论建立了用于研究电磁波与静电波模式转化的流体模型, 推导得到了外加电场与内部扰动场之间的关系式, 从而获得了电场强度增强因子和模式转化过程中急剧增长的局部电场强度, 但由于模型未对高低频信号做解耦处理, 计算中对时间和空间步长的选取需要满足解析高频波的要求, 从而导致计算量较大, 因此无法研究高、低频信号之间的相互作用. Zakharov [18] 首先推导了一组耦合的非线性波动方程, 描述了高频 Langmuir 波和低频离子声波之间的相互作用, 从而在解耦高、低频信号的条件下研究了各向同性等离子体中的有质动力参量不稳定性以及强 Langmuir 湍流 (strong Langmuir turbulence, SLT) 的发展. Dubois 等 [19] 则基于 Zakharov 模型 [18]、结合非相干散射雷达测得的实验数据提出了一种新的 SLT 理论, 即电磁波的振荡双流不稳定性直接发展为空洞塌陷, 该理论也定性解释了非相干散射雷达在线性参量衰减不稳定性方面的观测数据. Eliasson 等 [20] 设计了受控布里渊散射实验, 并基于考虑地磁场影响的全波模拟的 Zakharov 模型, 进行了受激布里渊散射过程的数值模拟, 研究了不同泵波发射角度、不同探测波频率下的三波相互作用过程. 杨利霞等 [21] 基于 Zakharov 方法, 研究了电离层 Langmuir 扰动对电离层电波传播特性的影响.

由于以上基于 Zakharov 模型的研究工作尚未

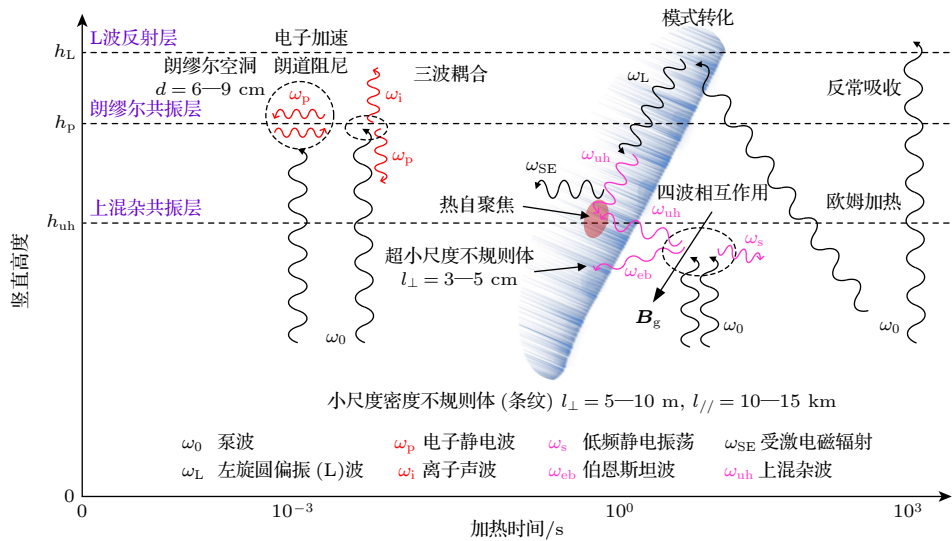


图 1 电离层主动加热过程示意图

Fig. 1. Schematic of typical processes in active heating of ionosphere.

考虑电磁波与电离层等离子体间的能量输运过程, 因此无法研究热效应对不稳定性过程的影响. Bernhardt 和 Duncan^[22] 建立了研究热自聚焦不稳定性 (thermal self-focusing instabilities, TSFI) 过程的流体模型, 并对“欠密条件”下具有对流特性的 TSFI 过程进行了数值模拟研究. Gurevich 等^[23] 对 TSFI 过程的发展进行线性化分析, 并估算了 TSFI 的外加电场激发阈值和增长率, 但仍需完善不稳定性非线性演化过程. Gondarenko 等^[5] 基于包含电子质量守恒和能量守恒方程的流体模型及电磁波传播方程, 模拟了 TSFI 过程以及该过程中形成的密度条纹体的演化过程. 在王琛等^[24] 建立的泵波与电离层相互作用模型中, 则通过求解电场方程、电子数密度方程和电子温度方程, 构建了描述 TSFI 的非线性方程组, 并初步分离了泵波电场的快变和慢变部分, 进一步完善了对密度条纹体及 TSFI 的分析, 但尚未解耦电子的高频和低频运动, 因此无法研究上混杂波、下混杂波等各向异性波参与的不稳定性过程.

综上所述, 目前的研究表明, 深入研究多种波对电离层等离子体的加热效应和不稳定性的激发, 揭示电离层加热过程中对密度条纹体的调控机制, 仍需进一步完善描述地面发射泵波加热电离层等离子体的物理数学模型, 特别是综合考虑外加场与扰动场, 以及高、低频波与等离子体间的相互作用过程. 本文以地面泵波与电离层等离子体的相互作用为研究对象, 基于描述等离子体非平衡输运过程的流体模型和解耦高低频信号的 Zakharov 方法, 在第 2 节推导建立了描述低气压条件下泵波与电离层等离子体相互作用的物理数学模型, 并在第 3 节通过与文献中已有结果的对比分析, 验证了该模型的可靠性; 在此基础上, 在第 4 节开展了地面泵波作用下电离层等离子体中不稳定性时空演化过程的数值模拟, 分析了波-波、波-粒相互作用的物理机制, 得到了实验中观测到的三波相互作用引发的受激电磁辐射特征, 并研究了不同泵波频率、功率对于等离子体特性的影响规律; 最后, 在第 5 节给出了本文研究得到的主要结论.

2 物理数学模型建立

2.1 基本控制方程

对于地面发射的电磁泵波, 通常可通过求解 Maxwell 方程组获得电磁场的时空演化, 实现对其

传播过程的模拟计算; 结合描述等离子体非平衡输运过程的流体模型, 即可得到描述电离层等离子体中波-波、波-粒相互作用过程的基本控制方程组.

1) 离子质量守恒方程:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (1)$$

其中, n_i 为离子数密度, \mathbf{v}_i 为离子速度.

2) 离子动量守恒方程:

$$M \frac{\partial n_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + M \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) = -\nabla p_i + n_i e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

其中, M 为离子质量, $p_i = n_i k_B T_i$ 为离子分压, T_i 为离子温度, $k_B (= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K})$ 为 Boltzmann 常数, $e (= 1.602 \times 10^{-19} \text{ C})$ 为基本电荷量.

3) 电子质量守恒方程:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (3)$$

其中, n_e 为电子数密度, \mathbf{v}_e 为电子速度.

4) 电子动量守恒方程:

$$m \frac{\partial n_e \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e) = -\nabla p_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}), \quad (4)$$

其中, m 为电子质量, $p_e = n_e k_B T_e$ 为电子分压, T_e 为电子温度, \mathbf{E} 为电场强度, \mathbf{B} 为磁感应强度.

5) 电子能量守恒方程:

$$m \frac{\partial n_e h_e}{\partial t} + m_e \nabla \cdot (n_e h_e \mathbf{v}_e) = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_e) - e n_e \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} + Q_{\text{ch}}^{\text{el}}, \quad (5)$$

其中, h_e 为电子比焓, λ_e 为电子热导率, $Q_{\text{ch}}^{\text{el}}$ 为弹性碰撞能量交换项, 即 $Q_{\text{ch}}^{\text{el}} = -n_e \nu_e \frac{2m}{M} \frac{3}{2} k_B (T_e - T_i)$, 其下标“e”表示电子, “h”表示重粒子, 上标“el”表示弹性碰撞, ν_e 为碰撞频率.

6) Maxwell 方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = e (n_i - n_e) / \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\varepsilon_0 (= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})$ 为真空介电常数, $\mu_0 (= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)$ 为真空磁导率.

2.2 线性化处理与高低频解耦

针对上述控制方程组, 首先进行线性化处理, 将等离子体、电磁场的相关物理量写为初始项/稳态项+扰动项的形式, 即:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e0} + n_{e1}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}, \quad n_i = n_{i0} + n_{i1}, \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1}, \quad T_e = T_{e0} + T_{e1}, \quad h_e = h_{e0} + h_{e1}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 下标“0”表示初始项/稳态项, “1”表示扰动项; 初始的电子和离子数密度满足 $n_{e0} = n_{i0} = n_0$, 此处 n_0 为等离子体初始密度. 电子和离子的稳态项和扰动项分别描述了电离层等离子体的初始参数以及被外加场作用后的变化量; 电场的稳态项 \mathbf{E}_0 描述了地面发射的电磁泵波, 扰动项 \mathbf{E}_1 则为泵波与等离子体相互作用后的扰动量; 由于与地磁场磁感应强度 \mathbf{B}_g (约为 10^{-5} T) 相比, 电磁泵波的磁感应强度 (约为 10^{-8} T) 很小, 因此可以取 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_g$. 另外, 将电磁场方程写为外加场和内部扰动场相叠加的形式, 可在设置计算域时仅研究所关注的局部区域, 在求解控制方程组时直接给定外加电场值, 通过求解内部扰动场获得总的电磁场, 而无需从地面开始计算电磁波的演化过程, 从而可以缩小计算域、减小计算量.

将 (7) 式中线性化处理后的物理量代入控制方程 (1)–(6), 与稳态项的平衡方程做差并化简, 可以得到如下包含扰动项的控制方程组 (具体推导过程详见附录 A):

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Mn_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + Mn_{i0} \nabla (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) \\ = -\nabla (n_{i1} k_B T_i) + en_{i0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e1} \mathbf{v}_{e1}) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} mn_{e0} \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot [n_{e0} (\mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{v}_{e1}) \\ + n_{e1} (\mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e1})] \\ = -\nabla (n_{e1} k_B T_e) - en_{e0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_1) \\ - en_{e1} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_0), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{cases} m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e1}) \\ = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) - en_{e0} (\mathbf{v}_{e0} \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{E}_1) + Q_{eh1}^{el}, \\ Q_{eh1}^{el} = -\nu_e \frac{2m}{M} \frac{3}{2} k_B (n_{e0} T_{e1} + n_{e1} T_{e0}), \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_1, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} e [n_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e1} (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) \\ - n_{i0} \mathbf{v}_{i1} - n_{i1} (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1})], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = e (n_{i1} - n_{e1}) / \varepsilon_0. \quad (16)$$

在等离子体条件下, 由于电子质量远小于离子质量, 因此, 通常可以将等离子体的运动分为低频和高频两个部分, 其中离子只做低频运动, 与其相关的物理量均为低频项, 而与电子相关的电子数密度、运动速度, 以及电磁场强度则可分为低频部分 (下标为“L”) 和高频部分 (下标为“H”), 即:

$$\begin{aligned} n_{e1} &= n_{eL} + n_{eH}, \quad \mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}, \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_H. \end{aligned} \quad (17)$$

若定义物理量 $f(\mathbf{x}, t)$ 在一个周期 T 内对时间的平均值为

$$\overline{f(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\mathbf{x}, t) dt, \quad (18)$$

并假设时间平均与空间梯度运算可交换, 即 $\nabla \overline{f(\mathbf{x}, t)} = \nabla [\overline{f(\mathbf{x}, t)}]$, 且若选取时间 T 满足 $\omega_L < 2\pi/T < \omega_H$, 其中 ω_L 和 ω_H 分别为低频和高频运动频率, 可分别取为等离子体中离子和电子的振荡频率, 则高频物理量按 (18) 式计算得到的时间平均值为 0. 于是, 对于 (17) 式中的电子数密度, 存在如下关系:

$$\overline{n_{e1}(t, \mathbf{x})} = n_{eL}(t, \mathbf{x}), \quad n_{e1} - \overline{n_{e1}} = n_{eH}, \quad \overline{n_{eH}(t, \mathbf{x})} = 0, \quad (19)$$

相应地, 对于 (17) 式中的电子运动速度、电场强度和磁感应强度也可做类似的解耦处理.

将 (17) 式代入方程 (8)–(16), 并应用 (18) 式和 (19) 式进行相关量的时间平均和解耦处理, 可以进一步得到如下包含高、低频项的控制方程组 (具体推导过程详见附录 B):

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Mn_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + Mn_{i0} \nabla (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) \\ = -\nabla (n_{i1} k_B T_i) + en_{i0} (\mathbf{E}_L + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial n_{eH}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{eH} + n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eL} \mathbf{v}_{eH} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}) = 0, \quad (22)$$

$$mn_{e0} \frac{\partial \mathbf{v}_{eH}}{\partial t} = -\nabla (n_{eH} k_B T_e) - n_{e0} e (\mathbf{E}_{eH} + \mathbf{v}_{eH} \times \mathbf{B}_0), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{eL} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{eL}) \\ &= \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) - en_{e0} \\ & \times \overline{(\mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E}_H + \mathbf{v}_{eL} \cdot \mathbf{E}_L + \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_H)} + Q_{eh1}^{el}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_L, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_H}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_H, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_L \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{e0} \mathbf{v}_{eL} + n_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{eH}} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{e0}}), \\ \frac{\partial \mathbf{E}_H}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_H \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{e0} \mathbf{v}_{eH} + n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eL} \mathbf{v}_{eH} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_H = 0, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = \frac{e(n_{i1} - n_{eL})}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_H = -\frac{en_{eH}}{\varepsilon_0}. \quad (28)$$

进一步地, 对于电场高频项和电子运动速度项, 可以将高频外加电场 \mathbf{E}_0 、内部扰动电场 \mathbf{E}_H 和电子高频运动速度 \mathbf{v}_{eH} 写为缓变复振幅与高频复振荡因子相乘的形式, 即:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{0a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} + c.c_0) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega_0 t} + c.c_0), \\ \mathbf{E}_H &= \frac{1}{2} (\varepsilon e^{-i\omega_0 t} + c.c_E), \\ \mathbf{v}_{eH} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + c.c_v), \quad (29) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{E}_{0a} = \mathbf{E}_{0,r} + i\mathbf{E}_{0,i}$, $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s,r} + i\mathbf{v}_{s,i}$ 分别表示泵波电场、扰动电场、电子运动速度的缓变复振幅, $c.c$ 为对应的共轭项. 于是, 将 (29) 式代入方程组 (20)–(28), 得到了如下最终用于本文数值模拟的控制方程组 (具体推导过程可详见附录 C):

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (30)$$

$$Mn_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + Mn_{i0} \nabla (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1})$$

$$= -\nabla [n_{i1} k_B (T_i + T_e)] + en_{i0} \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0 - mn_{i0} \nabla \left(\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon}{4} \right) + \frac{en_{i0}}{2} \nabla \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial n_{eH}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot ((n_{e0} + n_{eL}) (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t})) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s = i\omega_0 \mathbf{v}_s + \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{emn_{e0}} \nabla (\nabla \cdot \varepsilon) - \frac{e}{m} (\varepsilon + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0), \quad (33)$$

$$m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{eL})$$

$$\begin{aligned} &= \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) + Q_{eh1}^{el} + en_{e0} \left\{ \frac{e}{4m} \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) - \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \tilde{\mathbf{E}}_{0,cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \tilde{\mathbf{E}}_0 + \mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon) \right. \\ & \left. + \mathbf{v}_{eL} \cdot \left[-\frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{v}_{eL}}{\partial t} - \frac{m}{e} \nabla \left(\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon}{4} \right) + \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) - \frac{\nabla (n_{eL} k_B T_e)}{n_{e0} e} \right] \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$-2i\omega_p \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = -c^2 \nabla \times (\nabla \times \varepsilon) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla (\nabla \cdot \varepsilon) + \omega_0^2 \varepsilon - \omega_p^2 \frac{n_{e0} + n_{eL}}{n_{e0}} (\varepsilon + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0), \quad (35)$$

其中, 离子动量方程 [方程 (31)] 中的磁旋项 $\mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0$ 是下混杂波的组成部分, 而该方程的最后一项 $\frac{en_{i0}}{2} \nabla \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right)$ 体现了外加电场 \mathbf{E}

与高频扰动电场 ε 对离子作用力的非线性耦合; 电场方程 [方程 (35)] 中的 $\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0$ 则是上混杂波的重要组成部分.

对于方程 (34) 中的电子热导率 (λ_e), 理论上

可分解为沿地磁场方向的电子热导率 ($\lambda_{e//}$) 和垂直于地磁场的电子热导率 ($\lambda_{e\perp}$). 但由于在电离层等离子体条件下, 电子回旋频率 ($f_{ce} \approx 1.36$ MHz) 远大于电子碰撞频率 ($\nu_e \approx 100$ Hz), 因此, 垂直于地磁场方向的电子热导率 ($\lambda_{e\perp}$) 可以忽略不计^[25,26], 即 $\lambda_e \approx \lambda_{e//}$, 并可由 (36) 式给出^[27], 即:

$$\lambda_e = \frac{7.7 \times 10^5 T_e^{5/2}}{1 + 3.22 \times 10^4 (T_e^2 / N_e) \sum_j n_j \bar{Q}_{Dj}} [\text{eV}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K})], \quad (36)$$

其中, j 为中性粒子的序号, n 为中性粒子的数密度, 求和符号表示对所有存在的中性气体粒子求和, \bar{Q}_D 为粒子平均动量传输截面, 由表 1 中的经验公式给出^[27].

表 1 平均动量传输碰撞截面 \bar{Q}_D ^[27]
Table 1. Mean momentum transfer collision cross section \bar{Q}_D ^[27].

粒子种类	碰撞截面/cm ²
N ₂	$(2.82 - 3.41 \times 10^{-4} T_e) \times T_e^{1/2} \times 10^{-17}$
O ₂	$2.2 \times 10^{-16} \times (1 + 3.6 \times 10^{-2} T_e^{1/2})$
O	1×10^{-15}
H	$(54.7 - 7.45 \times 10^{-3} T_e) \times 10^{-16}$
He	5.6×10^{-16}

对于电子碰撞能量损失项 ($Q_{\text{chl}}^{\text{el}}$), 电子能量主要通过碰撞传递给重粒子, 电子碰撞频率 ν_e 包含了与中性成分碰撞的频率 ν_{en} 以及与离子碰撞的频率 ν_{ei} 两个部分^[25,28]; 其中, ν_{en} 可由表 2 中的公式计算得到^[27], 而 ν_{ei} 则可由公式 $\nu_{\text{ei}} = 54n_i/T_e^{3/2}$ 计算得到^[27], 碰撞过程中包括的主要过程可参见文献^[29,30].

表 2 电子与中性粒子碰撞频率 ν_{en} ^[27]
Table 2. Electron-neutral species collision frequency ν_{en} ^[27].

粒子种类	碰撞频率/Hz
N ₂	$2.33 \times 10^{-11} n(\text{N}_2)(1 - 1.2 \times 10^{-4} T_e) T_e$
O ₂	$1.8 \times 10^{-10} n(\text{O}_2)(1 + 3.6 \times 10^{-2} T_e^{1/2}) T_e^{1/2}$
O	$8.2 \times 10^{-10} n(\text{O}) T_e^{1/2}$
H	$4.5 \times 10^{-9} n(\text{H}) \times (1 - 1.35 \times 10^{-4} T_e) T_e^{1/2}$
He	$4.6 \times 10^{-10} n(\text{He}) T_e^{1/2}$

3 物理数学模型验证

基于本文第 2 节建立的物理数学模型, 本节将通过与文献中典型结果的对比, 验证该模型用于数

值预测电离层等离子体主动加热、电磁波传播和参量不稳定性发展等过程的可靠性.

3.1 电磁波对电离层等离子体的加热

本节研究地面发射的大功率寻常波 (ordinary wave, O 波) 对电离层等离子体的加热效果, 数值计算所采用的参数及其数值见表 3, 泵波的电场强度 [V/m] 由 (37) 式计算得到^[20,31]:

$$|\mathbf{E}_{0,r}| = |\mathbf{E}_{0,i}| = 5.5 \sqrt{W_{\text{ERP}}} [\text{MW}] / h [\text{km}], \quad (37)$$

其中, 发射机的有效辐射功率取 $W_{\text{ERP}} = 200$ MW, h 为距离地面的高度.

表 3 电磁波对电离层等离子体加热背景参数^[31]
Table 3. Parameters for modeling of electromagnetic waves heating ionospheric plasmas^[31].

参数名称	参数值
热层中性风速度 $v_n/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	100
模拟区域高度范围/km	150—400
地磁场倾角 $\theta/(\text{°})$	30.0
地磁场磁感应强度 B_g/T	4.6×10^{-5}
泵波频率 f_0/MHz	6.0
发射机有效辐射功率 W_{ERP}/MW	200

图 2 给出了 $t = 2$ s 时电子数密度和电子温度空间分布的计算结果, 其中, 下标“ref”和“new”分别表示文献^[31]和本文的数值模拟结果; $\Delta n_e = n_e - n_{e0}$ 和 $\Delta T_e = T_e - T_{e0}$ 分别表示电子数密度和电子温度的扰动量, n_{e0} 和 T_{e0} 分别表示由经验模型 MSIS-E-90 得到的初始时刻的电子数密度和电子温度. 由图 2(a) 可以看到: 在反射高度附近, 泵波加热导致电子温度升高, 温度梯度引起粒子向周围温度较低处的输运, 从而导致反射高度附近电子数密度的降低; 本文计算结果与文献^[31]中的变化趋势相同, 电子数密度扰动最大值为 $\Delta n_e = -122 \text{ cm}^{-3}$, 对应高度为 $h = 238 \text{ km}$, 与文献^[31]中给出的 $\Delta n_e = -113 \text{ cm}^{-3}$, $h = 235 \text{ km}$ 基本一致, 最大相对偏差分别为 8.0% 和 1.3%. 由图 2(b) 则可以看到: 电子温度的最大值在泵波反射点附近; 本文计算得到的反射高度处电子温度最大值相对初始温度上升了 $\Delta T_e = 398.34 \text{ K}$, 对应高度为 $h = 224 \text{ km}$, 这亦与文献^[31]中给出的 $\Delta T_e = 370.21 \text{ K}$, $h = 220 \text{ km}$ 基本一致, 最大相对偏差分别为 7.6% 和 1.8%. 综上所述, 本文电子数密度和电子温度的计算结果与文献^[31]中给出的变化趋势相一致,

Δn_e 和 ΔT_e 的相对偏差均小于 8%，且最大变化值对应的反射高度的相对偏差均小于 2%，这在一定程度上验证了本文第 2 节所建立的描述地面泵波作用下电离层等离子体中波-波、波-粒相互作用的物理数学模型的可靠性。

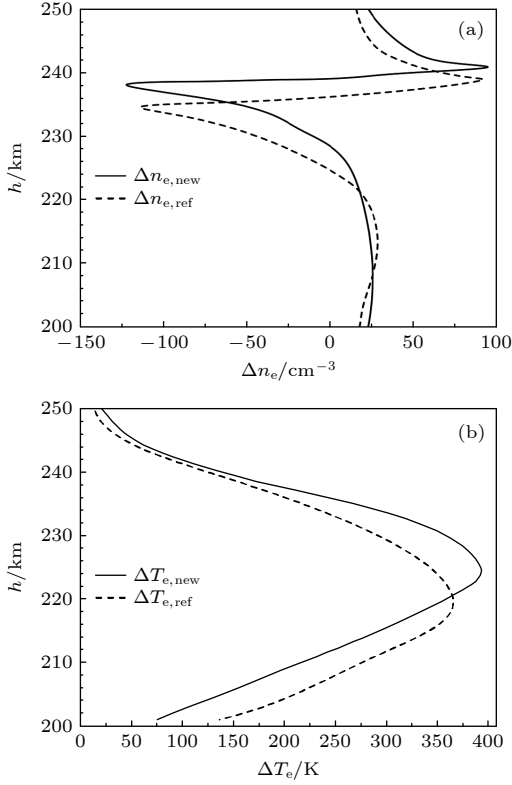


图 2 $t = 2$ s 时电子数密度 (a) 和电子温度 (b) 空间分布模拟结果及与文献 [31] 中相应结果的对比

Fig. 2. Simulation results of the spatial distributions of (a) electron number density and (b) temperature at $t = 2$ s, and comparisons with the corresponding results in Ref. [31].

3.2 受激布里渊散射过程中的波-波、波-粒耦合作用

本节研究受激布里渊散射 (stimulated Brillouin scattering, SBS) 过程中的波-波、波-粒耦合作用。泵波发射机有效辐射功率 $W_{\text{ERP}} = 80$ MW, 泵波频率 $f_0 = 5.125$ MHz, 实验地点为美国波多黎各邦阿雷西博天文台 (Arecibo Observatory), 时间为 2017 年 5 月 26 日 00:20(UT), 每个实验周期为 10 min, 前 5 min 发射机以 3 s 开启和 1 s 关闭的状态进行循环, 后 5 min 发射机为关闭状态 [32], 具体参数如表 4 所示。图 3 给出了电磁波频移 ($\Delta f = f_0 - f$) 和电子温度 (T_e) 的实验测量和数值模拟结果, 其中, 下标 “ref” 和 “new” 分别表示文献 [32]

的实验结果和本文的数值模拟结果。本节的数值模拟采用与实验相同的周期性加热方式。可以看到, 一方面, 虽然每个周期内发射机的开关状态相同, 但在整个实验过程中, 由于各个周期连续进行, 因此, 随着泵波加热过程的进行, 每个周期开始时电离层的物理参数及性质并不完全相同, 从而导致电子温度和频移在不同的周期并不完全一致; 另一方面, 本文数值模拟结果与实验测量结果在变化趋势上定性一致, Δf 和 T_e 的最大相对偏差分别为 26.9% 和 28.1%。这在一定程度上进一步验证了本文所建立的物理数学模型的可靠性。

表 4 阿雷西博天文台受激布里渊散射实验参数 [32]

Table 4. Parameters of stimulated Brillouin scattering experiment at Arecibo Observatory [32].

参数名称	参数值
实验地点纬度	18°20'39" N
实验地点经度	66°45'10" W
地磁场磁感应强度 B_g /T	4.6×10^{-5}
泵波频率 f_0 /MHz	5.125
发射机有效辐射功率 W_{ERP} /MW	80
电离层 F2 层临界频率/MHz	~5.0
泵波反射高度/km	~325

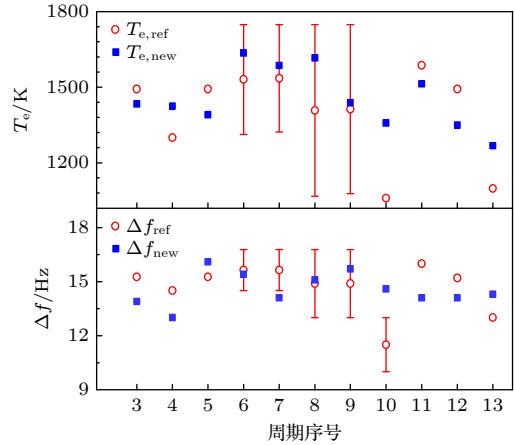


图 3 受激布里渊散射谱线频移和电子温度的计算结果与实验结果 [32] 的对比

Fig. 3. Comparisons of the calculated and measured [32] results for the spectral line shift and electron temperature during the stimulated Brillouin scattering process.

3.3 波-波相互作用及不稳定性

对于泵波在电离层等离子体中传播时三波相互作用的不稳定性过程, 本节选取 2014 年在挪威 EISCAT 设施上开展的实验 [20], 具体参数如表 5 所示。

表 5 挪威 EISCAT 电离层及电磁场参数^[20]
Table 5. Parameters of ionosphere and electromagnetic field at EISCAT in Norway^[20].

参数名称	参数值
O波频率 f_0 /MHz	6.3
发射机有效辐射功率 W_{ERP} /MW	554.1
探测波频率 f_{probe} /Hz	10
电场强度 E /(V·m ⁻¹)	0.2
地磁场磁感应强度 B_g /μT	48.59
地磁场倾角 θ (°)	78.2
离子温度 T_i /K	1000

图 4 给出了地面发射的 O 波、探测波和电离层等离子体离子声波三者之间满足频率和波矢匹配关系时的频谱特征; 其中, I_n 表示谱线强度, f_0 表示泵波频率, f 表示电离层等离子体中因波-波相互作用而产生的波的频率, $f_0 - f$ 则表示二者间的频率差, 下标“ref”和“new”分别表示文献 [20] 和本文的结果, “exp”和“cal”则分别表示实验结果和计算结果. 可以看到, 当泵波和探测波满足频率和波矢匹配关系时, 将激发受激布里渊散射的参量不稳定性, 从而在等离子体中产生第 3 支波, 即离子声波. 而离子声波引起的等离子体密度随时间振荡的作用类似于光栅, 将泵波和探测波散射为新的边带波. 新激发的电磁边带波再次被离子声波散射, 从而产生一系列不同频率的非线性边带波. 本文数值模拟结果与文献 [20] 中的实验测量结果和计算结果所给出的泵波、探测波和 SBS 非线性边带波这 3 种波的频移特征定性一致 (图 4). 另外, 此处

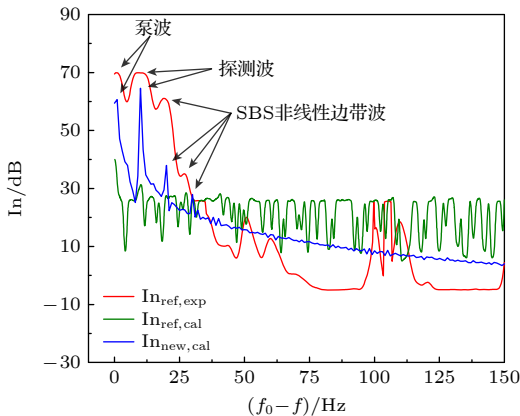


图 4 受激电磁辐射频谱特征的模拟结果与文献 [20] 中的计算和实验结果的对比

Fig. 4. Comparison of the calculated spectrum characteristics of the stimulated electromagnetic radiation with those presented in Ref. [20].

需要指出的是, 在文献 [20] 的实验结果中, 存在多组重复的 50 Hz 频移的边带波, 这很有可能是电源滤波不完全所导致的, 而在本文和文献 [20] 的数值模拟中则并未考虑电源辐射.

上述数值模拟结果与文献中已有的数值模拟和实验测量结果^[20,31,32]的对比, 在一定程度上验证了本文所建立的描述泵波与电离层等离子体相互作用过程的物理数学模型及其计算机程序代码的可靠性.

4 泵波作用下电离层等离子体中不稳定性的演化过程

为了深入研究大功率泵波作用下电离层等离子体中不稳定性的激发、发展和饱和过程, 本节选取 Frolov 等^[33]在俄罗斯 Sura 装置上进行的电离层加热实验的其中一个工况作为本文数值模拟的典型工况, 该典型工况的实验参数如表 6 所示. 如图 5 所示, 计算域为地面以上 200—220 km 的高度区间, 选取竖直向上为 y 方向, $h = 200$ km 为 y 方向的零点, 即 $h = y + 200$ km. 背景粒子 (包括不同种类电子、离子和中性粒子) 的浓度和温

表 6 俄罗斯 Sura 装置电离层加热实验典型参数^[33]

Table 6. Typical parameters of ionospheric heating experiment at the Sura facility in Russia^[33].

参数名称	参数值
泵波频率/MHz	4.3—9.5
实验时间范围/a	1996—2000
实验地点纬度	56.13°N
实验地点经度	46.10°E
有效辐射功率 W_{ERP} /MW	30—60

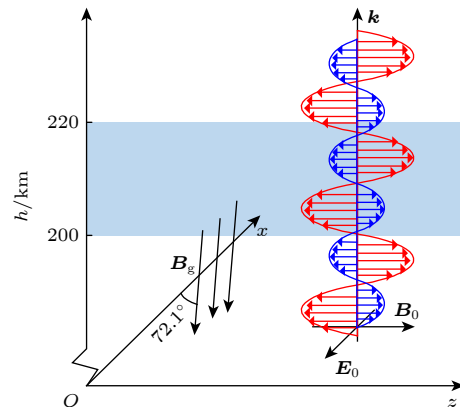


图 5 计算域示意图

Fig. 5. Schematic diagram of the calculational domain.

度通过 IRI-2016 模型 [34] 和 MSIS-E-90 模型 [35] 计算得到. 地磁场通过 IGRF 模型 [36] 计算得到, 具体参数如表 7 所示. 泵波频率 $f_0 = 6$ MHz, 发射机功率为 $W_{\text{ERP}} = 60$ MW, 发射方向为竖直向上. 为了解析电磁波的传播特性, 数值模拟中网格大小设置为 2 m. 时间步长的选取要大于高频波的时间尺度, 同时要能够解析低频波 (如下混杂波、离子声波等), 因此, 本文计算中时间步长设置为 5×10^{-6} s. 另外, 粒子数密度边界条件设置为边界处粒子数密度等于相邻网格的粒子数密度, 速度边界条件为质量流量连续, 场边界条件为一阶 Mur 吸收边界 [37], 即认为波在到达边界后传播到计算域以外区域, 不发生反射, 可由方程 $\left. \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{y=y_{\text{bound}}} = 0$ 描述, 其中下标“bound”表示计算域边界. 由于文献 [20] 的研究结果表明, 电磁波的最大幅值在泵波束流中心区域, 非线性相互作用效果最显著的位置亦在沿竖直方向的中心线上, 因此, 考虑到计算域空间尺

度较大、计算成本较高, 本文仅开展了沿电磁波传播方向上的一维数值模拟研究 (图 5).

表 7 电离层背景粒子及地磁场参数

Table 7. Parameters of ionospheric background particles and geomagnetic field.

参数名称	参数值
电子温度/K	1535.3—1832.4
电子数密度/ m^{-3}	3.72×10^{11} — 4.93×10^{11}
地磁场倾角/ $^\circ$	72.1
地磁场磁感应强度/T	4.6×10^{-5}
等离子体频率/MHz	5.47—6.30
上混杂频率/MHz	5.63—6.44
下混杂频率/kHz	7.88

4.1 不稳定性演化过程

图 6 给出了泵波加热过程中 O 波反射高度附近 ($h = 212$ km) 电离层等离子体参量不稳定性的演化过程, 其中, $|\varepsilon|$ 表示电场强度的幅值, 下标 x ,

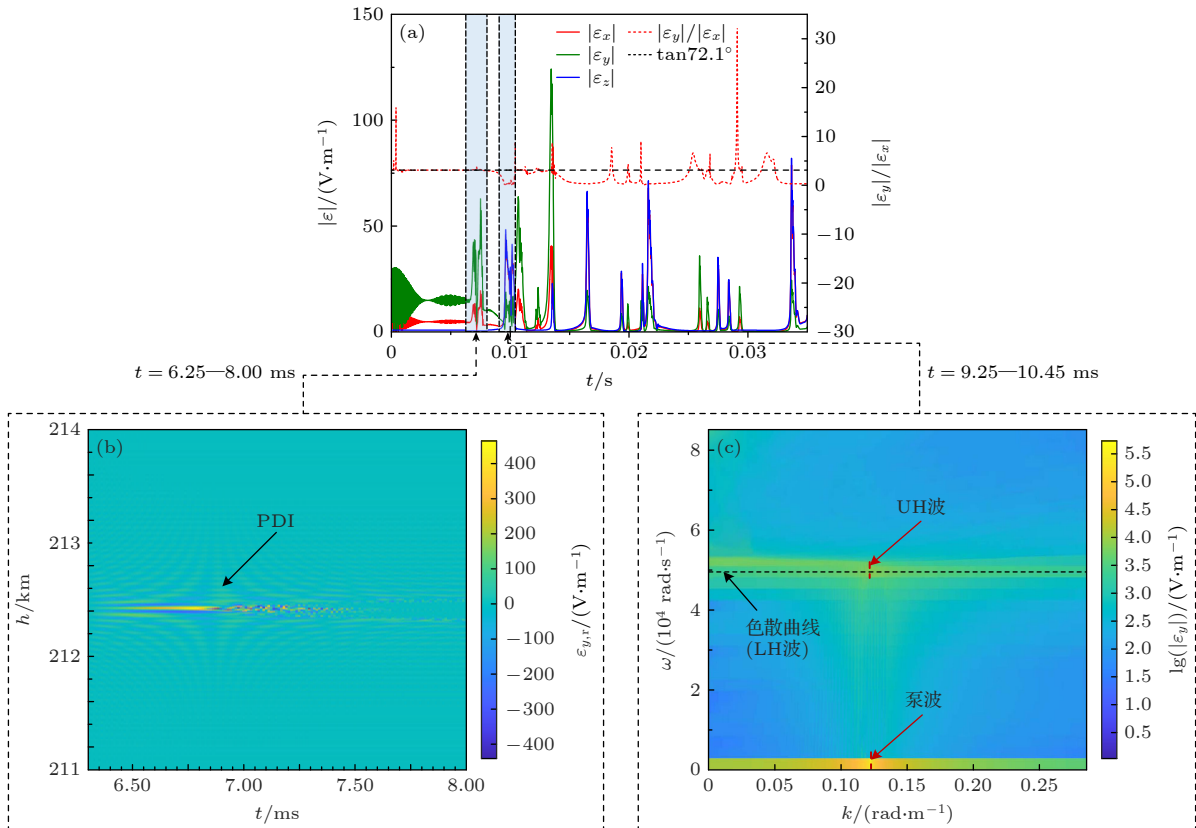


图 6 等离子体参量不稳定性演化过程 (a) $h = 212$ km 高度处 x, y, z 方向电场强度的时间演化; (b) $t = 6.25$ — 8.00 ms 时间内 y 方向电场慢变振幅实部 $\varepsilon_{y,r}$ 时空演化过程二维等值线图; (c) $t = 9.25$ — 10.45 ms 时间内 y 方向电场强度二维 Fourier 变换图

Fig. 6. Evolutions of plasma parametric instabilities: (a) Temporal evolutions of the electric field intensity in the x, y and z directions at a height of $h = 212$ km; (b) two-dimensional contour of the spatiotemporal evolution of the real part of the slow-varying amplitude of the electric field in the y direction ($\varepsilon_{y,r}$) during $t = 6.25$ — 8.00 ms; (c) two-dimensional Fourier transform of the electric field intensity in the y direction during $t = 9.25$ — 10.45 ms.

y, z 分别表示电场强度在 x, y, z 坐标方向的分量, 下标 r 表示实部, k 和 ω 则分别表示波数和角频率.

1) 在 $t = 0\text{--}6\text{ ms}$ 时间段内 [图 6(a)], 泵波电场沿 x 方向, 外电场驱动电子反向运动, 从而激发了电场强度方向与地磁场方向平行的 O 波, 即 $|\varepsilon_y|/|\varepsilon_x| = \tan 72.1^\circ$.

2) 在 $t = 6.25\text{ ms}$ 之后 [图 6(b)], 随着 O 波能量的不断沉积, 电场强度不断增大, 反射高度 ($h = 212.50\text{ km}$) 附近较强的局部电场 ($|\varepsilon_{y,r}| > 400\text{ V/m}$) 激发了参量衰减不稳定性 (parametric decay instability, PDI). 图 7 则给出了 $t = 6.25\text{ ms}$ 时反射高度附近 ($h = 211.50\text{--}213.00\text{ km}$) 空间内电场强度 y 方向分量的实部 ($\varepsilon_{y,r}$) 及其空间 Fourier 变换结果 ($|\varepsilon(\lambda^{-1})|$), 反映了局部强电场的分布特征. 可以看到, 在参量不稳定性演化过程中, O 波衰减为一支静电 Langmuir 波和一支离子声波, 这与文献 [38] 的数值模拟结果定性一致. 此后, 随着波对等离子体的加热, 在热效应的作用下该不稳定性过程逐渐饱和, 电场强度下降.

3) 如图 6(c) 所示的黑色虚线为上混杂波的色散关系曲线, 可由下式计算得到 [39]:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 + k^2 v_{th}^2, \quad (38)$$

其中, $v_{th} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$ 为电子热速度. 由图 6(a), (c) 可以看到, 随着泵波能量的沉积和电场强度的不断增大, 会激发出新的参量不稳定性过程, O 波衰减为两支新的静电波, 即一支频率为 $\omega_{LH} = 4.95 \times 10^4\text{ rad/s}$ 的下混杂 (low hybrid, LH) 波和一支频率为 $\omega_{UH} = \omega_0 - \omega_{LH} = 3.765 \times 10^7\text{ rad/s}$ 的上混杂 (upper hybrid, UH) 波.

另外, 本文数值模拟结果中观察到的参量不稳

定性过程的时间尺度为 ms 量级, 这与文献 [40] 给出的结果定性一致. 在 $t = 10\text{ ms}$ 之后, 以上两种参量不稳定性过程不断循环, 激发出不同的静电波, 进而产生了比外加电场强大 100 倍以上的局部强电场.

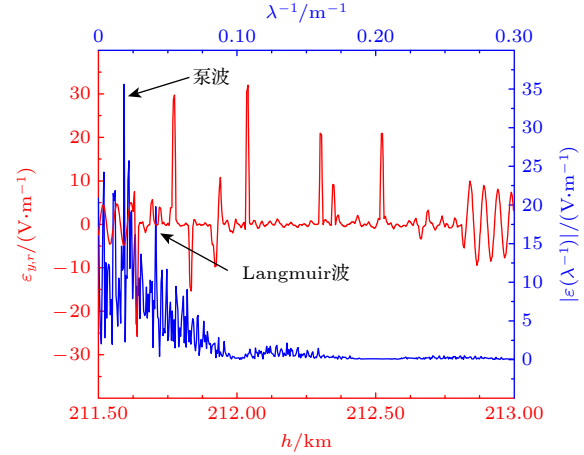


图 7 反射高度附近 y 方向电场强度分量及空间 Fourier 变换结果

Fig. 7. Electric field intensity in the y direction near the reflection height and its spatial Fourier transform.

图 8 给出了泵波作用下等离子体演化过程中电场复振幅模在 x, y, z 方向分量的时空分布. 可以看到, O 波能量在反射高度 ($h \approx 212.5\text{ km}$) 附近沉积, 电场强度逐渐增大, 在 $t = 0.6\text{ ms}$ 时刻达到最大值, 此时 x 方向和 y 方向的复振幅模分别为 $|\varepsilon_x|_{\max} = 173.7\text{ V/m}$ 和 $|\varepsilon_y|_{\max} = 537.7\text{ V/m}$, 两者满足关系 $|\varepsilon_y|_{\max}/|\varepsilon_x|_{\max} = \tan 72.1^\circ$, 即电场方向与地磁场方向平行; 随后, 随着波的能量达到饱和, 加热区无法束缚更多的波, 于是波包崩塌, 电场强度降低, 波向外传播并在 $t = 1.3\text{ ms}$ 时达到稳定.

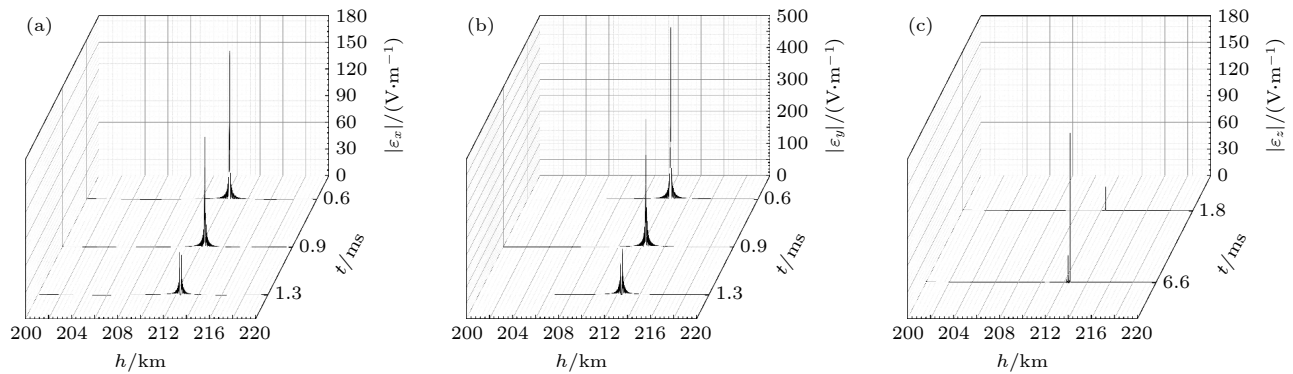


图 8 电场复振幅模在各个方向上分量的时空分布 (a) x 方向分量 $|\varepsilon_x|$; (b) y 方向分量 $|\varepsilon_y|$; (c) z 方向分量 $|\varepsilon_z|$

Fig. 8. Spatiotemporal distributions of the complex amplitude modulus of the electric field: (a) component in x -direction $|\varepsilon_x|$; (b) component in y -direction $|\varepsilon_y|$; (c) component in z -direction $|\varepsilon_z|$.

此时反射高度处电场强度接近于 0, 最大电场出现在反射高度两侧约 80 m 处. 在 $t = 1.8$ ms 之前, z 方向电场强度接近于 0, 而在 $t = 1.8$ ms 时, z 方向电场强度开始逐渐增大, 并在 $t = 6.6$ ms 时达到最大值 $|\varepsilon_z|_{\max} = 168.8$ V/m, 表明在反射高度附近 O 波、UH 波和 LH 波三波相互作用过程逐渐增强.

对电场强度进行 Fourier 分析, 可获得泵波作用过程中电离层等离子体受激电磁辐射的频谱结构, 其中, I_n 和 f_0 依然分别表示谱线强度和泵波频率, f 表示受激电磁辐射产生的电磁波频率, $f_0 - f$ 则表示泵波与该受激辐射电磁波间的频率差, 下标“new”表示本文数值模拟结果, 而“ref, exp”则表示文献 [33] 给出的实验测量结果 (如图 9 所示). 可以看到, 本文数值模拟结果与实验测量结果 [33] 给出的热窄带连续谱 (thermal narrow continuum, NC_{th})、最大值向下频移 (downshifted maximum,

DM) 和宽带连续谱 (broad continuum, BC) 三种典型的频谱特征吻合良好. 对上述这三种典型电磁频谱的特征和形成机制的物理解释为: NC_{th} 的频移范围为 0—5 kHz, 是热 (共振) 不稳定性引起的频移, 该不稳定性激发产生了上混杂波; DM 的频移在 15 kHz 附近, 是由上混杂波被不规则体散射所产生的; 而 BC 的频移在 25 kHz 以上, 则是由上混杂波被热离子诱导散射所引起.

4.2 不同泵波参数对等离子体特性的影响

4.2.1 泵波频率对电场强度的影响

分别取泵波频率为 $f_0 = 6.0, 5.7$ MHz, 两者对应的电子回旋频率关系分别为 $f_0 = 4.5f_{ce}$ 和 $f_0 = 4.2f_{ce}$. 由于等离子体频率随着电子数密度的减小而降低, 因此, 随着泵波频率的降低, 电离层等离子体的临界层高度亦随之降低. 当泵波频率由 $f_0 = 6.0$ MHz 降低为 5.7 MHz 时, 对应的反射层等离子体密度由 $4.5 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ 降低到 $4.0 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$; 相应地, O 波反射高度从 $h = 212.5$ km 降低到 204.1 km. 图 10 给出了上述两个不同泵波频率下电场复振幅模在 x, y, z 三个方向上分量的时空分布计算结果.

1) 对应于 $f_0 = 6.0$ MHz 和 $f_0 = 5.7$ MHz, 电场复振幅的模 ($|\varepsilon_j|, j = x, y, z$) 分别在 $h = 212.55$ km 和 $h = 204.05$ km 处出现局部电场的显著增大, 这与上述理论分析预测的 O 波反射高度吻合良好.

2) 除 O 波在反射高度附近增大的局部电场外, 当泵波频率与左旋截止频率 ω_L 相等时, 左旋圆极化偏振波 (L 波) 会被反射. 根据左旋截止频率的

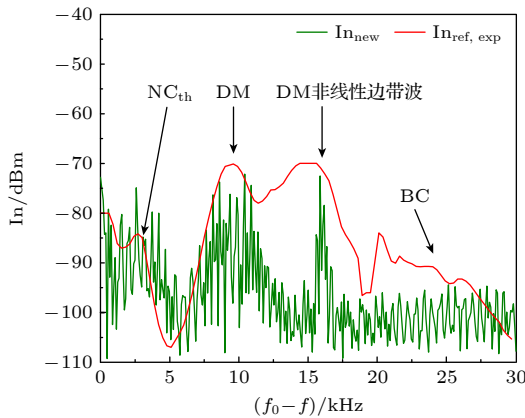


图 9 受激电磁辐射频谱特征模拟结果与实验结果的对比 [33]
Fig. 9. Comparison of the calculated spectrum characteristics of the stimulated electromagnetic emission with the experimental results [33].

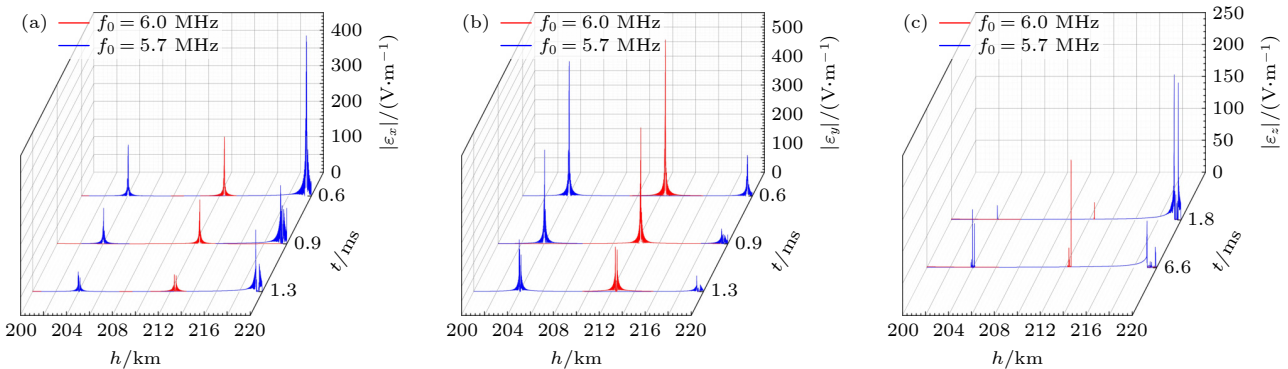


图 10 不同泵波频率下电场复振幅模在各个方向上分量的时空分布 (a) x 方向分量 $|\varepsilon_x|$; (b) y 方向分量 $|\varepsilon_y|$; (c) z 方向分量 $|\varepsilon_z|$.
Fig. 10. Spatiotemporal distributions of the complex amplitude modulus of the electric field: (a) Component in x -direction $|\varepsilon_x|$; (b) component in y -direction $|\varepsilon_y|$; (c) component in z -direction $|\varepsilon_z|$.

计算公式:

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_{ce} + (\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2)^{1/2} \right], \quad (39)$$

可以得到, 当泵波频率为 5.7 MHz 时, L 波能量会在高度 $h = 220.75$ km 处沉积, 并产生较大的局部电场. 从图 10 的计算结果同样可以看到 L 波在 $h = 219.58$ km 处的反射现象, 以及由于能量沉积而产生的局部强电场, 这亦与理论预测相吻合.

3) 从图 10(c) 还可以看到, 电场强度的 z 方向分量在 O 波反射高度处从 1.8 ms 开始增长, 直到 6.6 ms 增长到最大值; 而 L 波反射高度处的演化过程则不同, 在 1.8 ms 时该高度处的电场强度 z 方向分量远大于 O 波在反射高度处的值, 并在随后逐渐减小.

4.2.2 泵波频率和功率对等离子体电子温度的影响

本节的数值模拟结果表明, 当 $t > 5$ s 时, 计算得到的电子温度已基本趋于稳定, 密度条纹体亦基本饱和, 且随着时间的推移, 泵波对电离层等离子体的作用效率降低. 基于此, 图 11 给出了 $t = 10$ s 时不同泵波频率下电子温度的空间分布, 其中, T_{e0} 和 T_e 分别表示初始电子温度和泵波作用后的电子温度, 发射机有效辐射功率为 $W_{\text{ERP}} = 60$ MW. 由于对于一定的泵波频率 ω_0 , 当等离子体密度满足公式 $n_e = \epsilon_0 m_e \omega_0^2 / e^2$ 时, O 波会在对应高度处反射, 因此, 当泵波频率为 6.5, 6.0, 5.7 MHz 时, 对应的 O 波反射层高度分别为 $h = 218.0, 212.1, 203.9$ km, 且在反射层高度附近的电子温度相对其初始状态分别升高了 38.0%, 42.7%, 46.5%,

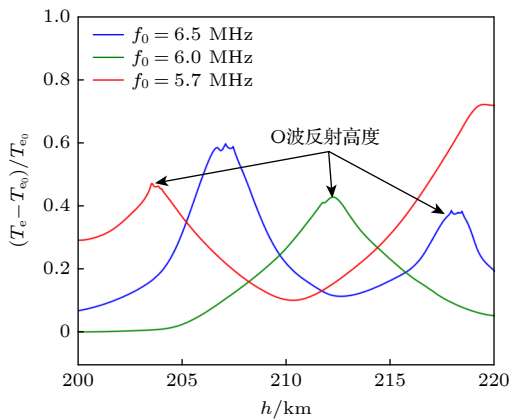


图 11 不同泵波频率下电子温度的空间分布

Fig. 11. Spatial distributions of the electron temperature under different pump frequencies.

即在一定的频率和时间范围内, 较低的泵波频率会导致密度条纹体产生的空间高度下移, 而 O 波反射高度附近的电子温度增长量则会有所提高. 另外, 由 (39) 式和图 10 的计算结果可知, 当泵波频率与左旋截止频率 ω_L 相等时, L 波能量会在另一高度处沉积, 也会产生较大的局部电场 (根据理论计算, 对应于泵波频率 6.5, 6.0, 5.7 MHz 的高度分别为 208.6, 237.4, 220.75 km); 而局部电场的增强则使得其附近的电子温度升高, 从而在泵波频率为 6.5 和 5.7 MHz 时出现了图 11 中所给出的电子温度变化的“双峰”现象.

图 12 给出了泵波频率 $f_0 = 6.0$ MHz, $t = 10$ s 时不同泵波有效辐射功率 (W_{ERP}) 下电子温度的空间分布. 可以看到, 泵波功率的增大会使得等离子体从泵波中吸收的能量增加; 对应于 $W_{\text{ERP}} = 60, 100, 150$ MW, 在反射高度附近的最大电子温度相对其初始状态分别上升了 42.7%, 60.1% 和 82.5%, 且电子温度最大值均出现在 O 波反射高度 ($h = 212.5$ km) 附近, 不同 W_{ERP} 下的高度偏差值约为 0.5 km.

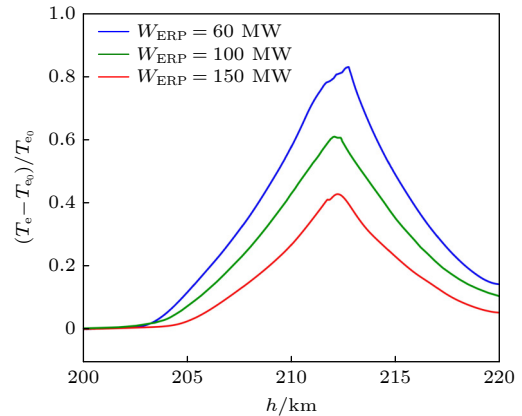


图 12 不同泵波功率下的电子温度空间分布

Fig. 12. Spatial distributions of the electron temperature under different pump powers.

5 结论

本文结合描述等离子体质量、动量和能量非平衡协同输运过程的流体模型和解耦高低频信号的 Zakharov 方法, 针对大功率电磁波与电离层等离子体的相互作用过程, 建立了描述地面泵波作用下电离层等离子体参数时空演化, 特别是低气压下波-波、波-粒相互作用的物理数学模型, 并基于该模型对地面泵波作用下电离层等离子体中的不稳

定性发展过程和波粒相互作用过程进行了一维数值模拟研究, 阐释了实验观察到的参量不稳定性和受激电磁辐射机制, 并探讨了不同泵波参数下的电离层主动加热效果. 主要得到如下结论:

1) 当地面发射的泵波在电离层等离子体中传播时, 反射高度处电磁波能量的沉积会产生较强的局部电场, 从而激发参量不稳定性;

2) 当地面发射的泵波、探测波和电离层等离子体离子声波三者之间满足频率和波矢匹配关系时, 会激发泵波、Langmuir 波和离子声波三波相

互作用的参量衰减不稳定性, 以及泵波、上混杂波和下混杂波三波相互作用的参量不稳定性;

3) 在一定的频率和功率范围内, 电离层等离子体中 O 波的反射高度随着泵波频率的减小而降低, 而反射高度附近的电子温度增长量则随着泵波频率的减小和功率的增大而增大.

附录A 控制方程线性化处理的理论推导

由于初始/稳态项满足平衡态方程, 即:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{i0}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i0}) &= 0, \quad M \frac{\partial n_{i0} \mathbf{v}_{i0}}{\partial t} + M \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i0} \mathbf{v}_{i0}) = -\nabla p_{i0} + n_{i0} e (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{i0} \times \mathbf{B}_0), \quad \frac{\partial n_{e0}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e0}) = 0, \\ m \frac{\partial n_{e0} \mathbf{v}_{e0}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e0}) &= -\nabla p_{e0} - n_{e0} e (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_0), \quad m \frac{\partial n_{e0} h_{e0}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{e0}) = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e0}) - e n_{e0} \mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E} + Q_{\text{ch}0}^{\text{el}}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{i0} \mathbf{v}_{i0} - n_{e0} \mathbf{v}_{e0}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{e(n_{i0} - n_{e0})}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

同时, 由于 $M \gg m$, 因此, 可以认为初始时刻离子保持静止不变, 即:

$$\mathbf{v}_{i0} = 0. \quad (\text{A2})$$

而电子速度则受电场力和洛伦兹力的共同作用, 即:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{e0}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{A3})$$

将线性化项 (7) 式代入控制方程 (1)–(6), 等号两边分别与 (A1) 式中的相应方程作差, 即:

$$\frac{\partial (n_{i0} + n_{i1})}{\partial t} + \nabla \cdot [(n_{i0} + n_{i1}) (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1})] - \frac{\partial n_{i0}}{\partial t} - \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i0}) = 0, \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} M \frac{\partial [(n_{i0} + n_{i1}) (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1})]}{\partial t} + M \nabla \cdot [(n_{i0} + n_{i1}) (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1}) (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1})] - M \frac{\partial n_{i0} \mathbf{v}_{i0}}{\partial t} - M \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i0} \mathbf{v}_{i0}) \\ = -\nabla p_i + \nabla p_{i0} + (n_{i0} + n_{i1}) e [(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) + (\mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1}) \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)] - n_{i0} e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{i0} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial (n_{e0} + n_{e1})}{\partial t} + \nabla \cdot [(n_{e0} + n_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1})] - \frac{\partial n_{e0}}{\partial t} - \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e0}) = 0, \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial [(n_{e0} + n_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1})]}{\partial t} + m \nabla \cdot [(n_{e0} + n_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1})] - m \frac{\partial n_{e0} \mathbf{v}_{e0}}{\partial t} - m \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e0}) \\ = -\nabla p_e + \nabla p_{e0} - (n_{e0} + n_{e1}) e [(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) + (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)] + n_{e0} e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial [(n_{e0} + n_{e1}) (h_{e0} + h_{e1})]}{\partial t} + m \nabla \cdot [(n_{e0} + n_{e1}) (h_{e0} + h_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1})] - m \frac{\partial n_{e0} h_{e0}}{\partial t} - m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{e0}) \\ = \nabla \cdot [\lambda_e \nabla (T_{e0} + T_{e1})] - \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e0}) - e (n_{e0} + n_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) \cdot (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) + Q_{\text{ch}0}^{\text{el}} + Q_{\text{ch}1}^{\text{el}} + e n_{e0} \mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E} - Q_{\text{ch}0}^{\text{el}}, \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) + \nabla \times \mathbf{E}_0, \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{i1} \mathbf{v}_{i1} - n_{e1} \mathbf{v}_{e1}) - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{i0} \mathbf{v}_{i0} - n_{e0} \mathbf{v}_{e0}), \quad (\text{A10})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (\text{A11})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) - \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{e(n_{i0} + n_{i1} - n_{e0} - n_{e1})}{\varepsilon_0} - \frac{e(n_{i0} - n_{e0})}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A12})$$

将方程 (A2) 和 (A3) 代入方程 (A4)–(A12), 并忽略 $n_{i1} \mathbf{v}_{i1}$, $n_{i1} \mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}$, $n_{e1} \mathbf{v}_{e1}$ 等高阶小量, 于是可以得到:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (\text{A13})$$

$$M \frac{\partial n_{i0} \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + M n_{i0} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) = -\nabla (n_{i1} k_B T_i) + e n_{i0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0), \quad (\text{A14})$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e1} \mathbf{v}_{e1}) = 0, \quad (\text{A15})$$

$$m \frac{\partial (n_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e1} \mathbf{v}_{e1})}{\partial t} + m \nabla \cdot [(n_{e0} + n_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) - n_{e0} \mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{e0}]$$

$$= -\nabla (n_{e1} k_B T_c) - en_{e0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0) - en_{e1} [\mathbf{E}_0 + (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{e1}) \times \mathbf{B}_0], \quad (\text{A16})$$

$$m \frac{\partial (n_{e0} h_{e1} + n_{e1} h_{e0})}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{e1} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e1}) = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) - en_{e0} (\mathbf{v}_{e0} \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e1} \mathbf{E}_1) + Q_{eh1}^{el}, \quad (\text{A17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 - \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i0} \mathbf{v}_{i1} + n_{i1} \mathbf{v}_{i0} + n_{i1} \mathbf{v}_{i1} - n_{e0} \mathbf{v}_{e1} - n_{e1} \mathbf{v}_{e0} - n_{e1} \mathbf{v}_{e1}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{e (n_{i1} - n_{e1})}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A18})$$

而对于 (A17) 式的弹性碰撞项 Q_{eh1}^{el} , 则有:

$$Q_{eh1}^{el} = -n_{e1} \nu_e \frac{2m}{M} \frac{3}{2} k_B (T_c - T_i), \quad (\text{A19})$$

$$Q_{eh0}^{el} = -n_{e0} \nu_e \frac{2m}{M} \frac{3}{2} k_B (T_{c0} - T_i), \quad (\text{A20})$$

两者作差, 忽略高阶小量, 可以得到:

$$Q_{eh1}^{el} = -\nu_e \frac{2m}{M} \frac{3}{2} k_B (n_{e0} T_{c1} + n_{e1} T_{c0}). \quad (\text{A21})$$

附录B Zakharov 高低频解耦的理论推导

将 (17) 式的高低频项代入方程 (8)–(16), 并按 (18) 式取时间平均, 可以得到:

$$\partial n_{i1} / \partial t + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (\text{B1})$$

$$M n_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + M n_{i0} \nabla (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) = -\nabla (n_{i1} k_B T_i) + en_{i0} [\overline{(\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)} + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0], \quad (\text{B2})$$

$$\frac{\partial (n_{eL} + n_{eH})}{\partial t} + \nabla \cdot [n_{e0} (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) + (n_{eL} + n_{eH}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH})] = 0, \quad (\text{B3})$$

$$m n_{e0} \frac{\partial (\overline{\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}})}{\partial t} + m n_{e0} \nabla \cdot [\overline{2\mathbf{v}_{e0} (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) + (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH})}] = -\nabla \cdot ((n_{eL} + n_{eH}) k_B T_c) - en_{e0} [\overline{(\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)} + (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) \times \mathbf{B}_0], \quad (\text{B4})$$

$$m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot [\overline{n_{e0} h_{e0} (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH})}]$$

$$= \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) - en_{e0} [\overline{\mathbf{v}_{e0} (\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)} + (\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH}) \cdot (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)] + Q_{eh1}^{el}, \quad (\text{B5})$$

$$\frac{\partial (\overline{\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_H})}{\partial t} = -\nabla \times \overline{(\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)}, \quad (\text{B6})$$

$$\frac{\partial (\overline{\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H})}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \overline{(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_H)} + \frac{e}{\varepsilon_0} [n_{e0} \overline{(\mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH})} + \overline{(n_{eL} + n_{eH}) (\mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_{eL} + \mathbf{v}_{eH})}], \quad (\text{B7})$$

$$\nabla \cdot \overline{(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_H)} = 0, \quad (\text{B8})$$

$$\nabla \cdot \overline{(\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H)} = e (n_{i1} - n_{eL} - n_{eH}) / \varepsilon_0. \quad (\text{B9})$$

此处需要注意的是: 在做高、低频解耦时, 对于低频项与高频项的乘积, 可将低频项视为常数, 平均后结果为 0; 但两个高频项的乘积不能作类似处理, 即时间平均不一定为 0; 计算中电子速度 v_{e0} 为高频量, 推导中还忽略了 $\nabla \cdot (n_{eH} \mathbf{v}_{eH} - \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{eH}})$ 和 $\nabla \cdot (\mathbf{v}_{eH} \mathbf{v}_{eH} - \overline{\mathbf{v}_{eH} \mathbf{v}_{eH}})$ 等项。

用方程 (8)–(16) 减去平均后的相应方程组 (B1)–(B9), 并根据 (19) 式计算时间平均项, 可以得到:

$$\partial n_{i1} / \partial t + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0, \quad (\text{B10})$$

$$M n_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + M n_{i0} \nabla (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) = -\nabla (n_{i1} k_B T_i) + en_{i0} (\mathbf{E}_L + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0), \quad (\text{B11})$$

$$\begin{cases} \partial n_{eL} / \partial t + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{eL} + n_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{eH}} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{e0}}) = 0, \\ \partial n_{eH} / \partial t + \nabla \cdot (n_{e0} \mathbf{v}_{eH} + n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eL} \mathbf{v}_{eH} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}) = 0, \end{cases} \quad (\text{B12})$$

$$\begin{cases} m n_{e0} \frac{\partial \mathbf{v}_{eL}}{\partial t} + m n_{e0} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + 2\mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{eH} + \mathbf{v}_{eH} \mathbf{v}_{eH}) = -\nabla (n_{eL} k_B T_c) - en_{e0} (\mathbf{E}_L + \mathbf{v}_{eL} \times \mathbf{B}_0), \\ m n_{e0} \frac{\partial \mathbf{v}_{eH}}{\partial t} = -\nabla (n_{eH} k_B T_c) - en_{e0} (\mathbf{E}_H + \mathbf{v}_{eH} \times \mathbf{B}_0), \end{cases} \quad (\text{B13})$$

$$m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e0} \mathbf{v}_{eL} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{eL}) = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) - en_{e0} [\overline{\mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E}_H} + \mathbf{v}_{eL} \cdot \mathbf{E}_L + \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_H] + Q_{eh1}^{el}, \quad (\text{B14})$$

$$\partial \mathbf{B}_L / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}_L, \quad \partial \mathbf{B}_H / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}_H, \quad (\text{B15})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_L + \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{e0} \mathbf{v}_{eL} + n_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{eH}} + \overline{n_{eH} \mathbf{v}_{e0}}), \\ \frac{\partial \mathbf{E}_H}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_H + \frac{1}{\varepsilon_0} e (n_{e0} \mathbf{v}_{eH} + n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eL} \mathbf{v}_{eH} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}), \end{cases} \quad (\text{B16})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_H = 0, \quad (\text{B17})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = e (n_{i1} - n_{eL}) / \varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_H = -e n_{eH} / \varepsilon_0. \quad (\text{B18})$$

另外, 若假设在低频时间尺度上电子与离子的数密度和速度相等, 即 $n_{eL} = n_{i1}$, $\mathbf{v}_{eL} = \mathbf{v}_{i1}$, 则可以省略上述方程组中电子质量守恒和动量守恒的低频方程, 即只求解与离子相关的量, 从而可进一步简化运算.

附录C Zakharov 高频波分解的理论推导

对于 (29) 式, 可写为如下含有共轭项的形式:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} (\tilde{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + \tilde{E}_{0,cc} e^{i\omega_0 t}), \quad \mathbf{E}_H = \frac{1}{2} (\varepsilon e^{-i\omega_0 t} + \varepsilon_{cc} e^{i\omega_0 t}), \quad \mathbf{v}_{eH} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t}). \quad (\text{C1})$$

将 (C1) 式中各项代入控制方程 (20)–(28), 分别进行如下化简.

i) 离子质量守恒方程: 不涉及 (C1) 式中的项, 方程 (B10) 的形式保持不变, 即:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i0} \mathbf{v}_{i1}) = 0. \quad (\text{C2})$$

ii) 电子质量守恒方程: 将 \mathbf{v}_{eH} 代换, 于是得到:

$$\frac{\partial n_{eH}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot ((n_{e0} + n_{eL}) (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t})) = 0. \quad (\text{C3})$$

iii) 离子动量守恒方程, 根据 $\frac{\partial \mathbf{v}_{e0}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_0)$, 可忽略 $\mathbf{v}_{e0} \times \mathbf{B}_0$, 于是得到:

$$\mathbf{v}_{e0} = -\frac{e}{2m} \left(\frac{\tilde{E}_0 e^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} e^{i\omega_0 t}}{i\omega_0} \right). \quad (\text{C4})$$

对于电子低频动量守恒方程 (B13) 左侧项, 将 (C4) 式代入并化简, 可进一步得到:

$$\begin{aligned} mn_{e0} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + 2\mathbf{v}_{e0} \mathbf{v}_{eH} + \mathbf{v}_{eH} \mathbf{v}_{eH}) &= mn_{e0} \nabla \cdot \left[\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{e}{2m} \left(\frac{\tilde{E}_0 e^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} e^{i\omega_0 t}}{i\omega_0} \right) (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t}) + \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t})^2 \right] \\ &= mn_{e0} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL}) - \frac{en_{e0}}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{E}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) + \frac{mn_{e0}}{4} \nabla \cdot (\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

将 (C5) 式代入原方程 (B13), 可以得到低频电场项:

$$\mathbf{E}_L = -\frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{v}_{eL}}{\partial t} - \frac{m}{e} \nabla \cdot \left(\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon}{4} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{E}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) - \frac{\nabla \cdot (n_{eL} k_B T_e)}{n_{e0} e}. \quad (\text{C6})$$

于是得到离子动量守恒方程:

$$Mn_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + Mn_{i0} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) = -\nabla \cdot [n_{i1} k_B (T_i + T_e)] - mn_{i0} \nabla \cdot \left(\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon}{4} \right) + \frac{en_{i0}}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{E}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) + en_{i0} \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0. \quad (\text{C7})$$

iv) 电子高频动量方程: 将 \mathbf{E}_H 和 \mathbf{v}_{eH} 代入 (B13) 中的高频方程, 等号两边除以 mn_{e0} , 于是得到

$$\frac{\partial (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + c.c.v)}{\partial t} = -\frac{2}{mn_{e0}} \nabla \cdot (n_{eH} k_B T_e) - \frac{e}{m} [(\varepsilon e^{-i\omega_0 t} + c.c.E) + (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + c.c.v) \times \mathbf{B}_0]. \quad (\text{C8})$$

展开等号左侧的求导项, 对于等号右侧的 n_{eH} , 用泊松方程 (B18) 进行代换, 可进一步得到:

$$\left(-i\omega_p \mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s \right) + \left(i\omega_p \mathbf{v}_{s,cc} e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{s,cc} \right) = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{men_{e0}} \nabla \cdot (\nabla \cdot (\varepsilon e^{-i\omega_0 t} + c.c.E)) - \frac{e}{m} [(\varepsilon e^{-i\omega_0 t} + c.c.E) + (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + c.c.v) \times \mathbf{B}_0]. \quad (\text{C9})$$

分别按 e 的正负指数项提出系数, 根据对称性得到 $e^{-i\omega_0 t}$ 项应满足的方程:

$$e^{-i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s = i\omega_0 \mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t} + \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{men_{e0}} \nabla \cdot (\nabla \cdot (\varepsilon e^{-i\omega_0 t})) - \frac{e}{m} [(\varepsilon e^{-i\omega_0 t}) + (\mathbf{v}_s e^{-i\omega_0 t}) \times \mathbf{B}_0]. \quad (\text{C10})$$

最后, 消去共同的 e 指数项, 于是得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s = i\omega_0 \mathbf{v}_s + \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{em_{e0}} \nabla \cdot (\nabla \cdot \varepsilon) - \frac{e}{m} (\varepsilon + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{C11})$$

v) 电子能量守恒方程: 对于方程 (B14) 中的几个时间平均项, 将 \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_H , \mathbf{v}_{e0} , \mathbf{v}_{eH} 代入, 有:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E}_H &= -\frac{e}{4m} \left(\frac{\tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}}{i\omega_0} \right) (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}) \\
 &= -\frac{e}{4m} \left(\frac{\tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \frac{\tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}}{i\omega_0} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}}{i\omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \right), \\
 \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}) (\tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}) \\
 &= \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \tilde{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \tilde{E}_{0,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}), \\
 \mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_H &= \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}) (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}) \\
 &= \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{v}_{s,cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} \mathbf{e}^{i\omega_0 t}). \tag{C12}
 \end{aligned}$$

于是得到:

$$\overline{\mathbf{v}_{e0} \cdot \mathbf{E}_H} = -\frac{e}{4m} \left(\frac{\tilde{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \boldsymbol{\varepsilon}}{i\omega_0} \right), \quad \overline{\mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_0} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \tilde{E}_{0,cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \tilde{E}_0), \quad \overline{\mathbf{v}_{eH} \cdot \mathbf{E}_H} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \boldsymbol{\varepsilon}). \tag{C13}$$

将 (C13) 式代入 (B14) 式, 由此得到电子能量守恒方程:

$$\begin{aligned}
 & m \frac{\partial n_{e0} h_{e1}}{\partial t} + m \nabla \cdot (n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e1} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e0} + n_{e0} h_{e1} \mathbf{v}_{e1}) \\
 &= \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_{e1}) + Q_{ch1}^{sl} + e n_{e0} \left\{ \frac{e}{4m} \left(\frac{\tilde{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \boldsymbol{\varepsilon}}{i\omega_0} \right) - \frac{1}{4} (\mathbf{v}_s \tilde{E}_{0,cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \tilde{E}_0 + \mathbf{v}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \boldsymbol{\varepsilon}) \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{v}_{eL} \cdot \left[-\frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{v}_{eL}}{\partial t} - \frac{m}{e} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \boldsymbol{\varepsilon}}{4}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\tilde{E}_{0,cc} \boldsymbol{\varepsilon}}{i\omega_0} \right) - \frac{\nabla \cdot (n_{eL} k_B T_e)}{n_{e0} e} \right] \right\}. \tag{C14}
 \end{aligned}$$

vi) 电磁场方程: 令 (B16) 式中高频电场方程各项对时间求导, 并将 (B15) 式中的高频磁场方程代入, 得到:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_H}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_H) + \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{\partial (n_{e0} \mathbf{v}_{eH} + n_{eL} \mathbf{v}_{e0} + n_{eL} \mathbf{v}_{eH} + n_{eH} \mathbf{v}_{eL})}{\partial t}. \tag{C15}$$

将 (B13) 式中的电子高频动量守恒方程和 (B18) 式中的高频泊松方程代入, 并根据 (C1) 式代换, 得到:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times (\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E)) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla \cdot (\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E)) \\
 & \quad - \frac{(n_{e0} + n_{eL}) e^2}{m \varepsilon_0} [(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E) + (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_v) \times \mathbf{B}_0]. \tag{C16}
 \end{aligned}$$

对于 (C16) 式等号左边关于时间的二阶导数项, 由于 ε 是缓变振幅, 故可舍去其二阶导数项, 并代入等离子体频率 $\omega_p^2 = \frac{n_{e0} e^2}{m \varepsilon_0}$, 进一步得到:

$$\begin{aligned}
 & -2i\omega_0 \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} + 2i\omega_0 \mathbf{e}^{i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}_{cc} - \omega_0^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E) \\
 &= -c^2 \nabla \times (\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E)) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla \cdot (\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E)) - \omega_p^2 \frac{n_{e0} + n_{eL}}{n_{e0}} [(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_E) + (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + c.c_v) \times \mathbf{B}_0]. \tag{C17}
 \end{aligned}$$

同样地, 分别按 \mathbf{e} 的正负指数项提出系数, 根据对称性得到 $\mathbf{e}^{-i\omega_0 t}$ 项应满足的方程:

$$-2i\omega_p \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} = -c^2 \nabla \times (\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t})) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla \cdot (\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t})) + \omega_0^2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} - \omega_p^2 \frac{n_{e0} + n_{eL}}{n_{e0}} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^{-i\omega_0 t} + (\mathbf{v}_s \mathbf{e}^{-i\omega_0 t}) \times \mathbf{B}_0), \tag{C18}$$

提出 $\mathbf{e}^{-i\omega_0 t}$ 项, 最终得到电磁场方程:

$$-2i\omega_p \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} = -c^2 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \omega_0^2 \boldsymbol{\varepsilon} - \omega_p^2 \frac{n_{e0} + n_{eL}}{n_{e0}} (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0). \tag{C19}$$

参考文献

- [1] Stubbe P, Hagfor T 1997 *Surv. Geophys.* **18** 57
- [2] Zhan L 2007 *M. S. Thesis* (Beijing: Graduate School of Chinese Academy of Science) (in Chinese) [占亮 2007 硕士学位论文 (北京: 中国科学院研究生院)]
- [3] Huang W G, Gu S F, Gong J C 2004 *Chin. J. Radio* **19** 296 (in Chinese) [黄文耿, 古士芬, 龚建村 2004 电波科学学报 **19** 296]
- [4] Chang S S, Ni B B, Zhao Z Y, Gu X D, Zhou C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 089401
- [5] Gondarenko N A, Ossakow S L, Milikh G M 2005 *J. Geophys.*

- Res-Space Phys.* **110** A09304
- [6] Li H P, Ostrikov K K, Sun W T 2018 *Phys. Rep.* **770-772** 1
- [7] Streltsov A V, Berthelier J J, Chernyshov A A, et al. 2018 *Space Sci. Rev.* **214** 1
- [8] Huang W G 2003 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Graduate School of Chinese Academy of Science) (in Chinese) [黄文耿 2003 博士学位论文 (北京: 中国科学院研究生院)]
- [9] Li J T 2012 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xidian University) (in Chinese) [李江挺 2012 博士学位论文 (西安: 西安电子科技大学)]
- [10] Gurevich A V, Lukyanov A V, Zybin K P 1996 *Phys. Lett. A* **211** 363
- [11] Gurevich A V, Milikh G M 1997 *J. Geophys. Res-Space Phys.* **102** 389
- [12] Stubbe P 1996 *J. Atmos. Terr. Phys.* **58** 349
- [13] Bernhardt P A, Wong M, Huba J D, Fejer B G, Wagner L S, Goldstein J A, Selcher C A, Frolov V L, Sergeev E N 2000 *J. Geophys. Res-Space Phys.* **105** 10657
- [14] Wang X G 2014 *Fundamentals of Plasma Physics* (Beijing: Peking University Press) pp3–15 (in Chinese) [王晓钢 2014 等离子体物理基础 (北京: 北京大学出版社) 第 3—15 页]
- [15] Ma T C, Hu X W, Chen Y H 2012 *Principles of Plasma Physics* (Revised Edition) (Hefei: University of Science and Technology of China Press) pp16–34 (in Chinese) [马腾才, 胡希伟, 陈银华 2012 等离子体物理原理 (修订版) (合肥: 中国科学技术大学出版社) 第 16—34 页]
- [16] Wang S C, Fang H X, Yang S G, Weng L B 2012 *Chin. J. Space Sci.* **32** 818 (in Chinese) [汪四成, 方涵先, 杨升高, 翁利斌 2012 空间科学学报 **32** 818]
- [17] Wong A Y 1977 *Laser Interact. Relat. Plasma Phenom.* **4B** 783
- [18] Zakharov V E 1972 *Sov. Phys. JETP* **35** 908
- [19] DuBois D F, Rose H A, Russell D 1990 *J. Geophys. Res-Space Phys.* **95** 21221
- [20] Eliasson B, Senior A, Rietveld M, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 6209
- [21] Yang L X, Liu C, Li Q L, Yan Y B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 064101 (in Chinese) [杨利霞, 刘超, 李清亮, 闫玉波 2022 物理学报 **71** 064101]
- [22] Bernhardt P A, Duncan L M 1982 *J. Atmos. Terr. Phys.* **44** 1061
- [23] Gurevich A, Hagfors T, Carlson H, Karashtin A, Zybin K 1998 *Phys. Lett. A* **239** 385
- [24] Wang C, Zhou C, Zhao Z Y, Zhang Y N, Yang X B 2015 *Chin. J. Geophys.* **58** 1853 (in Chinese) [王琛, 周晨, 赵正予, 张援农, 杨许铂 2015 地球物理学报 **58** 1853]
- [25] Gurevich A V (translated by Liu X M, Zhang X J) 1986 *Nonlinear Phenomena in the Ionosphere* (Beijing: Science Press) pp245–249 (in Chinese) [古列维奇 A V 著 (刘选谋, 张训械译) 1986 电离层中的非线性现象 (北京: 科学出版社) 第 245—249 页]
- [26] Dysthe K B, Mjølhus E, Pécseli H L, Rypdal K 1983 *Phys. Fluids* **26** 146
- [27] Banks P M, Kockarts G 1973 *Aeronomy* (New York: Academic Press)
- [28] Wang C 2016 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: Wuhan University) (in Chinese) [王琛 2016 博士学位论文 (武汉: 武汉大学)]
- [29] Huang W G, Gu S F 2003 *Chin. J. Space Sci.* **23** 181 (in Chinese) [黄文耿, 古士芬 2003 空间科学学报 **23** 181]
- [30] Stubbe P, Varnum W S 1972 *Planet Space Sci.* **20** 1121
- [31] Huang W G, Gu S F 2003 *Chin. J. Space Sci.* **23** 343 (in Chinese) [黄文耿, 古士芬 2003 空间科学学报 **23** 343]
- [32] Mahmoudian A, Nossa E, Isham B, Bernhardt P A, Briczinski S J, Sulzer M 2019 *J. Geophys. Res-Space Phys.* **124** 3699
- [33] Frolov V L, Sergeev E N, Ermakova E N, Komrakov G P 2001 *Geophys. Res. Lett.* **28** 3103
- [34] Bilitza D, Altadill D, Truhlik V, Shubin V, Galkin I, Reinisch B, Huang X 2017 *Space Weather* **15** 418
- [35] Hedin A E 1991 *J. Geophys. Res-Space Phys.* **96** 1159
- [36] Alken P, Thébault E, Beggan C D, et al. 2021 *Earth Planets Space* **73** 1
- [37] Mur G 1981 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **23** 377
- [38] Eliasson B, Thidé B 2007 *Geophys. Res. Lett.* **34** L06106
- [39] Wang X G 2014 *Fundamentals of Plasma Physics* (Beijing: Peking University Press) pp79–81 (in Chinese) [王晓钢 2014 等离子体物理基础 (北京: 北京大学出版社) 第 79—81 页]
- [40] Zhou C, Wang X, Liu M R, Ni B B, Zhao Z Y 2018 *Chin. J. Geophys.* **61** 4323 (in Chinese) [周晨, 王翔, 刘默然, 倪彬彬, 赵正予 2018 地球物理学报 **61** 4323]

SPECIAL TOPIC—Non-equilibrium transport and active control strategy in low-temperature plasmas

Modeling of wave-wave and wave-particle interactions in ionospheric plasma under pump wave action

ZHANG Menglong FANG Chuan ZHANG Ziming LI Heping[†]

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 18 June 2025; revised manuscript received 15 August 2025)

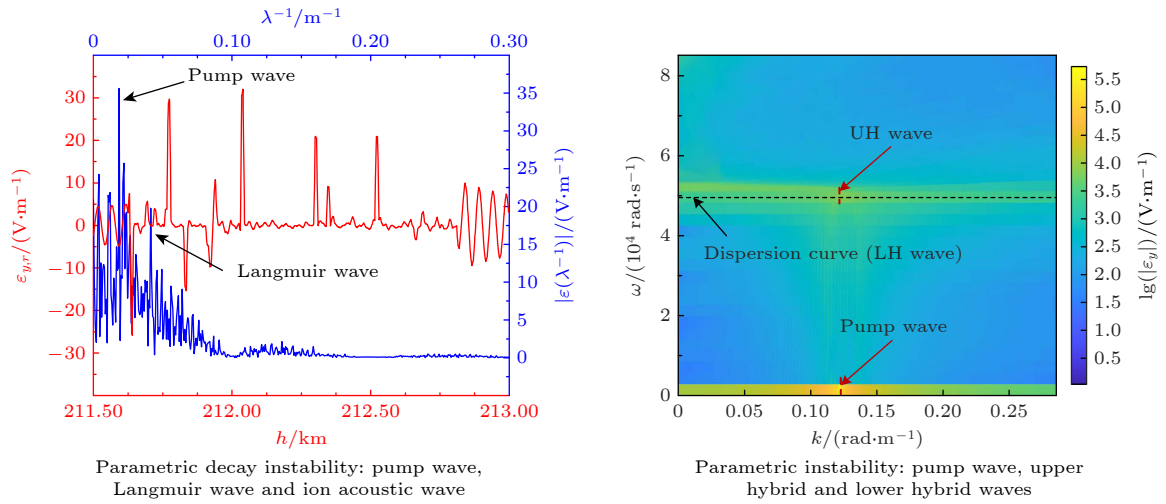
Abstract

In low-pressure plasmas, the collisions between particles are weak and insufficient damping from collisions, leading to the gradual development of various waves and instabilities. Thus, the effects of wave-particle

interaction are non-negligible in the non-equilibrium transport processes in plasma under low pressure conditions. For example, the heating of ionospheric plasma by high-frequency electromagnetic waves plays an important role in achieving over-the-horizon communication. During the wave propagation through the ionosphere, the electromagnetic radiation changes the local electron temperature and density, and simultaneously, excites various wave modes and instabilities. This study focuses on the interactions between high-power electromagnetic waves emitted from the ground and ionospheric plasma. Based on the plasma fluid model and Zakharov method, a physical-mathematical model is established to describe the wave-wave and wave-particle interactions in the ionospheric plasmas under the excitation of the pump waves. The modeling results of the active heating of ionosphere show that when the ground-emitted waves propagate in the ionospheric plasma, the energy deposition of the electromagnetic waves at the reflection height will excite a strong localized electric field, leading to the parametric instabilities. When the frequency and wave vector matching conditions are satisfied, two different three-wave interactions will be excited, i.e. the parametric decay instability involving the pump wave, Langmuir wave and ion acoustic wave, as well as the parametric instability related to the pump wave, upper hybrid and lower hybrid waves. Within a certain range of pump frequency and power studied in this study, the decrease of the pump frequency will lead to the decrease of the reflection height of the ordinary waves, and simultaneously, the perturbation ratios of the electron temperature will also increase. A higher pump wave power will enhance the energy absorption of the ionospheric plasma by the pump wave, thereby increasing the electron temperature. The modeling results not only reveal the spatiotemporal evolutions of the ionospheric plasma characteristics under various pump parameters and the energy transport processes between waves and particles, but also theoretically explain the parametric instability, stimulated electromagnetic emission and other phenomena observed in experiments.

Representative terms describing the three-wave interactions between the pump wave and the ionospheric plasma

$$\begin{aligned}
 & Mn_{i0} \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} + Mn_{i0} \nabla(\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i1}) = -\nabla[n_{i1} k_B (T_i + T_e)] + en_{i0} \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0 \\
 & -mn_{i0} \nabla \left(\mathbf{v}_{eL} \mathbf{v}_{eL} + \frac{\mathbf{v}_s \varepsilon_{cc} + \mathbf{v}_{s,cc} \varepsilon}{4} \right) + \frac{en_{i0}}{2} \nabla \left(\frac{\mathbf{E}_0 \varepsilon_{cc}}{-i\omega_0} + \frac{\mathbf{E}_{0,cc} \varepsilon}{i\omega_0} \right) \\
 & -2i\omega_p \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = -c^2 \nabla \times (\nabla \times \varepsilon) + \frac{k_B T_e}{m} \nabla (\nabla \cdot \varepsilon) + \omega_0^2 \varepsilon - \omega_p^2 \frac{n_{e0} + n_{eL}}{n_{e0}} (\varepsilon + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0)
 \end{aligned}$$



Keywords: artificial heating of ionosphere, non-equilibrium transport, parametric instability, numerical simulation

PACS: 94.05.Pt, 52.20.-j, 94.20.Bb, 52.65.-y

DOI: 10.7498/aps.74.20250788

CSTR: 32037.14.aps.74.20250788

† Corresponding author. E-mail: liheping@tsinghua.edu.cn

泵波作用下电离层等离子体中波-波、波-粒相互作用过程的数值模拟

张梦龙 方川 张子明 李和平

Modeling of wave-wave and wave-particle interactions in ionospheric plasma under pump wave action

ZHANG Menglong FANG Chuan ZHANG Ziming LI Heping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 209401 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250788

CSTR: 32037.14.aps.74.20250788

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250788>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

斜入射非线性电离层Langmuir扰动的电磁波传播特性

Electromagnetic wave propagation characteristics of oblique incidence nonlinear ionospheric Langmuir disturbance

物理学报. 2022, 71(6): 064101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211204>

大功率热平衡感应耦合等离子体数值模拟及实验研究

Numerical simulation and experimental study of high-power thermal equilibrium inductively coupled plasma

物理学报. 2021, 70(9): 095204 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201610>

地下黏弹性介质波动方程及波场数值模拟

Wave equation for underground viscoelastic media and wavefield numerical simulation

物理学报. 2021, 70(14): 149102 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210005>

激光入射双层等离子体靶产生的表面等离子体波及应用

Surface plasma wave excited by laser pulse obliquely incident on a double-layer plasma target and its application

物理学报. 2023, 72(4): 045201 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221305>

环形磁场金属等离子体源冷却流场的数值模拟与优化

Numerical simulation and optimization of cooling flow field of cylindrical cathode with annular magnetic field

物理学报. 2021, 70(7): 075203 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201368>

托卡马克中低频磁流体不稳定性协同作用引起快粒子输运的混合模拟研究

Hybrid numerical simulation on fast particle transport induced by synergistic interaction of low- and medium-frequency magnetohydrodynamic instabilities in tokamak plasma

物理学报. 2023, 72(21): 215210 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230620>