

# 准一维玻色-爱因斯坦凝聚中集体激发的量子纠缠熵\*

齐莹<sup>1)2)</sup> 刘艳鸿<sup>1)2)3)</sup> 乔豪学<sup>1)†</sup> 张文献<sup>2)‡</sup>

1) (武汉大学物理科学与技术学院, 武汉 430072)

2) (杭州师范大学物理学院, 杭州 311121)

3) (合肥国家实验室, 合肥 230088)

(2025年6月21日收到; 2025年7月25日收到修改稿)

玻色-爱因斯坦凝聚体内的准粒子激发导致系统里真实的玻色原子间产生量子纠缠. 采用谱展开的方法, 本文在准一维无限深方势阱下数值求解了 Bogoliubov-de Gennes 方程的本征值和本征态. 针对准粒子低能激发态, 研究了玻色-爱因斯坦凝聚体的量子纠缠熵随散射长度的变化. 本文结果表明纠缠熵随散射长度增加缓慢增大, 并且这种增大趋势可以近似用幂函数模型描述. 这种幂函数的趋势类似于准一维均匀玻色-爱因斯坦凝聚体的 Bogoliubov 基态的纠缠熵近似与散射长度的  $1/2$  次幂成正比的情形.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, Bogoliubov 理论, 量子纠缠熵

**PACS:** 03.75.Gg, 03.67.-a, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250808

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250808

## 1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensation, BEC) 指在特征温度以下, 玻色子在最低能态宏观占据, 形成具有宏观量子效应的特殊凝聚体<sup>[1]</sup>. 人们通常采用平均场近似求解 Gross-Pitaevskii (G-P) 方程得到 BEC 的平均场基态与化学势<sup>[2]</sup>. G-P 方程是非线性偏微分方程, 大部分情况下人们只能得到 G-P 方程的数值解; 而在准一维无限深方势阱里, 排斥相互作用的定态 G-P 方程可以求解解析解<sup>[3]</sup>. 由于 BEC 具备纯净可控、强相干的优点, 人们对 BEC 在量子信息领域的应用寄予厚望.

由于粒子间存在相互作用, BEC 在平均场基态附近存在低能的集体激发模式. Bogoliubov 理

论把这种激发解释为系统内产生了处于激发态的无相互作用的准粒子与空穴<sup>[4]</sup>. 作为一种由量子涨落引起的声子激发, Bogoliubov 激发被证明在多种冷原子物理系统里普遍存在, 例如超导体、量子液滴、量子涡旋与超流等<sup>[4-7]</sup>. 通过求解 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程, 人们获得低能集体激发的模式<sup>[1]</sup>. 早在 1997 年 You 等<sup>[8]</sup> 在谐振子势阱里数值求解了 BEC 的低能集体激发的激发谱; Walczak 和 Anglin<sup>[9]</sup> 在周期性边界条件的灰孤子背景下求得了 BdG 方程的两个零动量模的解析解; Hu 等<sup>[10]</sup> 利用变分近似法研究了谐振子势下的 BdG 方程; 近年来, 焦宸等<sup>[11]</sup> 在研究可调控自旋-轨道耦合 BEC 时发现凝聚体的零动量相里存在声子激发, 且激发谱随周期驱动强度的增加表现出贝塞尔函数的行为.

\* 国家自然科学基金 (批准号:12274331) 和科技创新 2030—“量子通信与量子计算机”重大项目 (批准号:2021ZD0302100) 资助的课题

† 通信作者. E-mail: qhx@whu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wxzhang@hznu.edu.cn

另一方面,量子纠缠既在量子信息领域显示了重要的应用价值,又解释了如超辐射、超导、量子相变等重要的物理现象<sup>[12-15]</sup>.在冷原子领域,很多工作讨论了里德伯原子、低温原子阵列与多分量玻色-爱因斯坦凝聚体等物理系统里的量子纠缠.例如,Vidal等<sup>[16]</sup>早年预言了量子多体模型里粒子在集体激发的零模上宏观占据时系统内存在量子纠缠.Ueda课题组<sup>[17]</sup>在近几年研究了两组分BEC系统的量子纠缠熵.

本文研究无限深方势阱里的准一维BEC在不同相互作用强度(散射长度)时量子纠缠熵的变化.本文采用谱展开方法(basis expansion method)<sup>[8]</sup>,数值求解了BdG方程,根据求出的集体激发模式,计算了系统处于Bogoliubov基态与Bogoliubov第一激发态的量子纠缠熵<sup>[18]</sup>.结果发现量子纠缠熵随散射长度增大而缓慢增大.为了量化纠缠熵与散射长度的关系,采用幂函数拟合了数值结果.BEC内原子间的相互作用强度可以通过Feshbach共振调控<sup>[19]</sup>,我们期待实验课题组通过测量势阱内BEC基态的密度矩阵验证本文理论预言.

## 2 准一维BEC的平均场基态

下面简要回顾BEC的平均场理论.定态G-P方程如下:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + U_0|\psi_0|^2\psi_0\right]\psi_0 = \mu\psi_0, \quad (1)$$

式中 $\psi_0(\mathbf{r})$ 是平均场基态波函数, $\mu$ 是化学势, $\hbar$ 是约化普朗克常数, $M$ 是单个粒子的质量, $V(\mathbf{r})$ 是势阱, $U_0 = 4\pi\hbar^2 a N/M$ 刻画了原子间相互作用强度, $N$ 是势阱里的总粒子数, $a$ 是散射长度.Carr等<sup>[3]</sup>在2000年针对准一维无限深方势阱求解了G-P方程.准一维无限深方势阱是一个高与宽都远小于长的细长方盒,假设盒长为 $L$ ,横截面积为 $A$ .通常人们选择 $A \sim \xi^2$ , $\xi \equiv (8\pi\bar{\rho}|a|)^{-1/2}$ 为凝聚体的特征长度, $\bar{\rho}$ 是平均粒子密度.

假设 $\psi_0(\mathbf{r}) = (LA)^{-1/2}f(x)g(y,z)$ ,且 $g(y,z) = 2\sin(\pi y/\xi)\sin(\pi z/\xi)$ , $f(x)$ 是基态波函数沿盒长的分量.对(1)式中等号两边坐标 $y$ 与 $z$ 积分,令 $\tilde{x} = x/L$ (无量纲化),得到准一维近似的G-P方程:

$$\left[-\frac{\xi^2}{L^2}\partial_{\tilde{x}}^2 + 2\pi^2 + \frac{9}{4}|f(\tilde{x})|^2\right]f(\tilde{x}) = (\tilde{\mu} - \tilde{V}(\tilde{x}))f(\tilde{x}), \quad (2)$$

式中, $\tilde{V}(\tilde{x}) = (2M\xi^2/\hbar^2)V(\tilde{x})$ 是无量纲化后的势阱, $\tilde{\mu} = (2M\xi^2/\hbar^2)\mu$ 是无量纲的化学势.在无限深方势阱内,这个非线性二阶微分方程与描述单摆幅角运动的微分方程相同.它的解如下:

$$f(\tilde{x}) = \sqrt{2m}[2jK(m)]\lambda \operatorname{sn}(2jK(m)\tilde{x}|m), \quad (3)$$

式中, $\operatorname{sn}(x|m)$ 是雅可比椭圆函数, $K(m)$ 是第一类椭圆积分, $\lambda = 1/(L\sqrt{8\pi a\rho})$ 是凝聚体的特征长度与势阱长度之比. $f(\tilde{x})$ 的节点数为 $j-1$ .对于基态波函数,由于它没有节点,因此基态时 $j=1$ .其中 $m$ 由波函数归一化条件确定.为了简便,后文里将 $f(\tilde{x})$ 改记作 $\psi_0(\tilde{x})$ .相应的基态本征值,即化学势为

$$\tilde{\mu} = [2jK(m)]^2\lambda^2(1+m). \quad (4)$$

## 3 Bogoliubov 准粒子激发态

引入二次量子化的BEC系统的哈密顿量<sup>[1]</sup>:

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{U_0}{2} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5)$$

式中, $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ 是满足玻色对易关系 $[\hat{\psi}(\mathbf{r}_1),\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)] = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ 的场算符.我们利用Bogoliubov理论求系统的本征谱与本征态<sup>[20]</sup>.通常平均场基态的占据数很大,因此本文只考虑基态与其他模式的耦合.在粒子数守恒的情况下,设:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r}) + \hat{\varphi}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

式中, $\psi_0(\mathbf{r})$ 是平均场基态波函数, $N_0$ 是占据平均场基态的粒子数.使用Bogoliubov变换,令:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_{k'} [u_k(\mathbf{r})\hat{\alpha}_k - v_k^*(\mathbf{r})\hat{\alpha}_k^\dagger], \quad (7)$$

式中, $k$ 是正整数,表示本征模式的指标; $\sum_{k'}$ 是对所有非平均场基态的模式求和; $\hat{\alpha}_k$ 与 $\hat{\alpha}_k^\dagger$ 是满足玻色对易关系 $[\hat{\alpha}_{k_1},\hat{\alpha}_{k_2}^\dagger] = \delta_{k_1 k_2}$ 的准粒子湮灭与产生算符.玻色对易关系要求 $(u_k, v_k)$ 满足归一化条件 $\int (u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}))d\mathbf{r} = \delta_{ij}$ .Bogoliubov变换(7)利用真实原子的产生-湮灭算符( $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ 与 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ )的线性组合,构建准粒子的产生-湮灭算符( $\hat{\alpha}_k^\dagger$ 与 $\hat{\alpha}_k$ ),以此对角化系统哈密顿量.Bogoliubov变换是么正线性正则变换,它保证变换前后原子数 $N$ 保持不变<sup>[21]</sup>.由于准粒子算符是真实原子的

产生湮灭算符的线性组合, 所以准粒子可以看作是原子与空穴形成的复合粒子.

将 (7) 式代入 (5) 式与 (6) 式, 忽略  $\hat{\varphi}$  的二阶以上项, 可以导出 BdG 方程<sup>[1]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \hat{L} & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -\hat{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = E_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中,  $n_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2$ ,  $\hat{L} = -(\hbar^2/(2m))\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2U_0 n_0(\mathbf{r}) - \mu$ . 求解 BdG 方程得到能量本征函数  $(u_k(\mathbf{r}), v_k(\mathbf{r}))$  与本征能量  $E_k$ . 需要留意  $(u_0, v_0) = (\psi_0, \psi_0)$  是 BdG 方程的能量  $E_0 = 0$  的本征函数, 其范数为 0.

针对准一维无限深方势阱, 采用与处理 G-P 方程相同的办法对 BdG 方程作了准一维近似, 后文里的  $(u_k, v_k)$  皆指准一维近似后 BdG 方程的解. 为了求解 BdG 方程, 选用  $\sin(k\tilde{x})$  函数系作为基矢, 共使用了 501 个基函数, 对应的截断波数  $k_t = 500$ . 接着分别展开  $u_k$  与  $v_k$ , 将 (8) 式等号左边的矩阵对角化求得 Bogoliubov 本征能量与本征函数. 这里选用的准一维无限深方势阱长  $10 \mu\text{m}$ , 横截面积  $0.16 \mu\text{m}^2$ . 为了满足通常实验室里制备的 BEC 的平

均原子密度  $\bar{\rho} \sim 10^{14} \text{cm}^{-3}$ , 合理地设置势阱内总粒子数  $N = 120$ . 为验证数值结果的收敛性, 在散射长度  $a$  分别为 1, 3, 5 与 7 nm 时, 计算了  $u_0$  (对应于  $E_0 = 0$  的能量本征函数) 相较于基态解析解 (3) 式的保真度 (两个态内积的模的平方). 该保真度与 1 的偏差均小于  $1.2 \times 10^{-10}$ .

图 1 展示了典型的弱相互作用和强相互作用下能量最低的 3 个本征模式. 通常弱相互作用是指相互作用能量小于动能, 而强相互作用则指相互作用能量大于动能. 可以看出基态模式  $(u_0, v_0)$  无节点, 而激发态模式  $(u_k, v_k)$  节点数为  $k$ . 激发态的  $u_k$  的振幅通常大于  $v_k$ . 弱相互作用下本征函数的振幅小于强相互作用下的情况.

Bogoliubov 基态是准粒子真空态, 将这个多粒子的量子态记作  $|\Phi_0\rangle$ , 对于所有的  $k' > 0$ ,

$$\hat{\alpha}_{k'} |\Phi_0\rangle = 0. \quad (9)$$

根据 Goldstone 理论, 这个多体量子态实际上是因粒子间相互作用使系统发生自发对称性破缺而出现的 Goldstone 模式<sup>[22]</sup>. 该多体量子基态其实包含了由相互作用引起的微小量子涨落对平均场基态的修正.

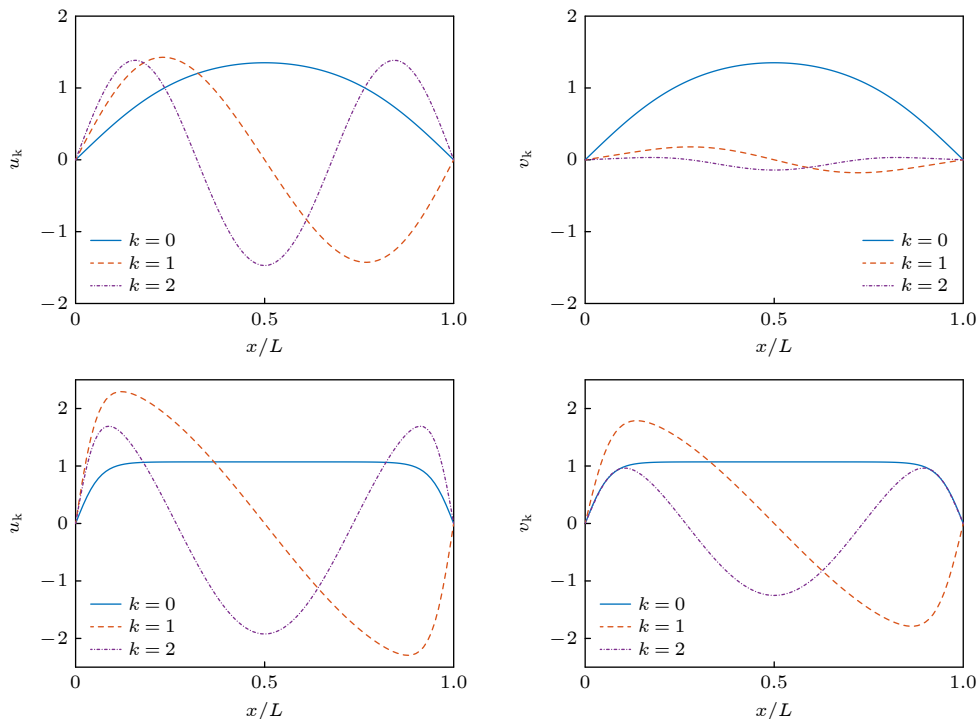


图 1 弱相互作用与强相互作用下准一维无限深方势阱里 BdG 方程的最低 3 个能量本征态, 其中散射长度分别为 0.1 nm (上图) 与 5 nm (下图)

Fig. 1. Three lowest-energy eigenstates of BdG equation in a quasi-one-dimensional box potential. The weak and strong interaction are denoted by the scattering length being 0.1 nm (upper panels) and 5 nm (lower panels).

进一步考虑 Bogoliubov 第一激发态, 记作  $|\Phi_1\rangle$ . 该多体激发态中, 1 个准粒子处于第一激发态模式, 即

$$|\Phi_1\rangle = \hat{\alpha}_1^\dagger |\Phi_0\rangle. \quad (10)$$

#### 4 量子纠缠熵

若一个多体系统的量子态不能写成其子系统的量子态的直积, 人们认为这些子系统之间存在量子纠缠<sup>[12]</sup>. 尽管两体的量子纠缠存在很多衡量方式, 多体量子系统的量子纠缠刻画起来非常困难. 量子纠缠熵是人们普遍采用的衡量多体量子纠缠的一种方法, 公式为

$$S = -\text{tr}(\rho \ln \rho), \quad (11)$$

其中  $\rho$  是子系统的约化密度矩阵<sup>[23]</sup>. 很明显, 为了计算量子纠缠熵, 需要计算多体系统中子系统的约化密度矩阵  $\rho$ <sup>[18]</sup>.

当势阱里所有原子均占据在平均场基态时, 系统密度矩阵可以写成  $N$  个纯态密度矩阵  $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  的直积, 单粒子约化密度矩阵的纠缠熵为 0. 此时原子间没有纠缠.

当系统处于 Bogoliubov 基态 (9) 时, 单粒子约化密度矩阵如下:

$$\begin{aligned} \rho_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= \frac{1}{N} \langle \Phi_0 | \hat{\psi}^\dagger(\tilde{x}_1) \hat{\psi}(\tilde{x}_2) | \Phi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{N} \left[ N_0 \psi_0^*(\tilde{x}_1) \psi_0(\tilde{x}_2) + \sum_{k'} v_k(\tilde{x}_1) v_k(\tilde{x}_2) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

当  $U_0 \rightarrow 0$  时,  $\psi_0(\tilde{x}) \rightarrow \sin(\tilde{x})$ , 而且  $\tilde{\mu} \rightarrow 1$ . 容易解得  $u_{k'}(\tilde{x}) = \sin(k'\tilde{x})$  且  $v_{k'}(\tilde{x}) = 0$ . 相应地, (12) 式里等号右边的量子涨落项  $\sum_{k'} v_k(\tilde{x}_1) v_k(\tilde{x}_2) = 0$ , 即在相互作用强度趋近于 0 时, Bogoliubov 基态的单粒子约化密度矩阵 (12) 将趋同于平均场基态的单粒子约化密度矩阵  $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ . 此时, 粒子间没有量子纠缠. 当  $U_0 > 0$  时, 处于 Bogoliubov 基态的系统原子间将出现量子纠缠, 因为 Bogoliubov 变换改变了量子多体系统的基.

当系统处于 Bogoliubov 第一激发态 (10) 时, 单粒子约化密度矩阵如下:

$$\begin{aligned} \rho_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= \frac{1}{N} \langle \Phi_1 | \hat{\psi}^\dagger(\tilde{x}_1) \hat{\psi}(\tilde{x}_2) | \Phi_1 \rangle \\ &= \frac{1}{N} \left[ N_0 \varphi_0^*(\tilde{x}_1) \varphi_0(\tilde{x}_2) + \sum_{k'} v_k(\tilde{x}_1) v_k(\tilde{x}_2) \right. \\ &\quad \left. + u_1(\tilde{x}_1) u_1(\tilde{x}_2) + v_1(\tilde{x}_2) v_1(\tilde{x}_1) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

为了衡量系统处于低能集体激发态时的量子纠缠程度, 将 (12) 式与 (13) 式代入 (11) 式, 计算量子纠缠熵. 对于不同的散射长度  $a$  (不同相互作用强度  $U_0$ ), 处于 Bogoliubov 基态与第一激发态的准一维 BEC 系统的量子纠缠熵如图 2 所示. 结果表明, 当散射长度  $a \rightarrow 0$  时, Bogoliubov 基态的量子纠缠熵趋于 0, Bogoliubov 第一激发态的纠缠熵趋于  $\frac{1}{N} \ln(N-1) - \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) \simeq 0.048$ . 当散射长度  $a$  逐渐增加时, 系统的量子纠缠熵平缓地增大.

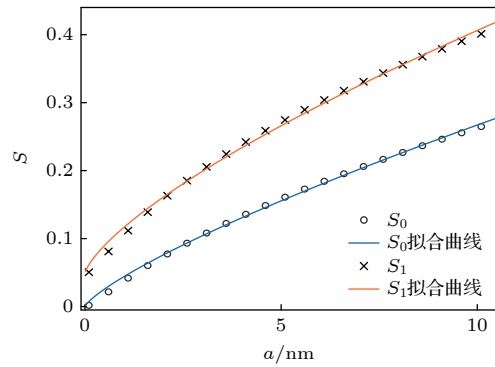


图 2 Bogoliubov 基态与第一激发态下系统的量子纠缠熵随散射长度的变化. 粒子数与势阱参数与图 1 相同

Fig. 2. Dependence of quantum entanglement entropy for the Bogoliubov ground state and first excited state on the scattering length. The particle number  $N$  and trap parameters are the same as those in Fig. 1.

为了从物理上理解上述数值计算结果, 采用幂函数模型  $S(a) = c_1 a^{c_2} + c_3$  拟合量子纠缠熵与散射长度之间的关系. 该函数模型可以类比均匀的准一维 BEC. 当均匀系统处于 Bogoliubov 基态时, 量子涨落  $\frac{1}{L} \sum_{k'} v_k^2 \sim (n_0 a)^{1/2}$ , 相较于基态的粒子密度  $n_0$  是小量<sup>[1]</sup>. 相应地, Bogoliubov 基态的密度矩阵近似写作  $\rho_0 \sim I - \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon = (n_0 a)^{1/2}$  是小量. 当只保留一阶项时, 对于均匀系统  $S_0 \propto (n_0 a)^{1/2}$ . 拟合结果如图 2 所示, 相应的拟合参数见表 1. 拟合参数  $c_2$  大于 1/2, 这可能来源于上述展开里的高阶项或  $n_0$  在势阱里的空间不均匀性.

表 1 拟合参数, 其中 SSE (sum of square error) 表示误差平方和

Table 1. Fitting parameters (SSE, sum of square error).

数据	$c_1$	$c_2$	$c_3$	SSE
$S_0$	$4.669 \times 10^5$	0.7803	0	$2.3327 \times 10^{-4}$
$S_1$	$1.9058 \times 10^5$	0.7158	0.0482	$7.482 \times 10^{-4}$

## 5 结 论

本文采用 Bogoliubov 理论, 数值求解了准一维无限深方势阱下的 BdG 方程, 得到了准一维无限深方势阱下 BEC 的集体激发态与激发谱. 计算了系统处于 Bogoliubov 基态与第一激发态时的单粒子约化密度矩阵, 并进一步计算了不同相互作用强度  $U_0$  (散射长度  $a$ ) 时, 系统在这两个多体量子态下的量子纠缠熵. 结果表明, 随着散射长度增加, 量子纠缠熵平缓增加, 并近似符合幂函数的形式. 该结果可类比一维均匀 BEC 系统中, Bogoliubov 基态的纠缠熵近似与散射长度的  $1/2$  次幂成正比的物理现象. 本文工作揭示了在势阱内的玻色-爱因斯坦凝聚体中存在着与相互作用强度呈正相关的多体量子纠缠. BEC 作为冷原子物理的基本物态之一, 对其内部子系统间的量子纠缠性质的研究有望在量子信息、低温超导、量子多体纠缠等领域产生启发作用.

## 参考文献

- [1] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press) pp26, 194, 236
- [2] Leggett A J 2009 *Compendium of Quantum Physics* (Berlin: Springer Berlin Heidelberg Press) p77
- [3] Carr L D, Clark C W, Reinhardt W P 2000 *Phys. Rev. A* **62** 063610
- [4] Teo J C Y, Kane C L 2010 *Phys. Rev. B* **82** 115120
- [5] Li B, Duan L, Wang S, Yang Z Y 2025 *Phys. Lett. A* **548** 130534
- [6] Hayashi N, Isoshima T, Ichioka M, Machida K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2921
- [7] Cichy A, Ptok A 2020 *J. Phys. Commun.* **4** 055006
- [8] You L, Hoston W, Lewenstein M 1997 *Phys. Rev. A* **55** R1581
- [9] Walczak P B, Anglin J R 2011 *Phys. Rev. A* **84** 013611
- [10] Hu B, Huang G X, Ma Y L 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063608
- [11] Jiao C, Jian Y, Zhang A X, Xue J K 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 060302 (in Chinese) [焦宸, 简粤, 张爱霞, 薛具奎 2023 物理学报 **72** 060302]
- [12] Nielsen M A, Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) pp571–580
- [13] Lambert N, Emary C, Brandes T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 073602
- [14] Brukner C, Vedral V, Zeilinger A 2006 *Phys. Rev. A* **73** 012110
- [15] Osborne T J, Nielsen M A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 032110
- [16] Vidal J, Dusuel S, Barthel T 2007 *J. Stat. Mech.* **2007** P01015
- [17] Yoshino T, Furukawa S, Ueda M 2021 *Phys. Rev. A* **103** 043321
- [18] Ueda M 2010 *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation* (World Scientific) pp33–72
- [19] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [20] Landau L 1949 *Phys. Rev.* **75** 884
- [21] Blaizot J P, Ripka G 1986 *Quantum Theory of Finite Systems* (Cambridge: MIT Press)
- [22] Brauner T 2010 *Symmetry* **2** 609
- [23] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865

# Quantum entanglement entropy of collective excitations in a quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensate<sup>\*</sup>

QI Ying<sup>1)2)</sup> LIU Yanhong<sup>1)2)3)</sup> QIAO Haoxue<sup>1)†</sup> ZHANG Wenxian<sup>2)‡</sup>

1) (*School of Physics Science and Technology, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

2) (*School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China*)

3) (*Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China*)

( Received 21 June 2025; revised manuscript received 25 July 2025 )

## Abstract

Quasi-particle excitation in a Bose-Einstein condensate leads to quantum entanglement between real bosonic atoms in the system. By using spectral expansion method, the eigenvalues and eigenstates of Bogoliubov-de Gennes equation are numerically calculated in a quasi-one-dimensional infinite square well potential. For the low-energy collective excitations of the quasi-particles, we explore the dependence of quantum entanglement entropy of the Bose-Einstein condensate on scattering length. Our results show that the entanglement entropy increases slowly with the increase of the scattering length, and such an increasing trend can be well described by a power function. These results are analogous to those in a one-dimensional uniform BEC, where the entanglement entropy of the Bogoliubov ground state is approximately proportional to the square root of the scattering length. This work provides a viable way for investigating many-particle entanglement in a quasi-one-dimensional trapped Bose-Einstein condensate where the quantum entanglement is closely related to the interaction strength between particles.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, Bogoliubov theory, quantum entanglement entropy

**PACS:** 03.75.Gg, 03.67.-a, 67.85.-d

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250808](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250808)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250808](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250808)

<sup>\*</sup> Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12274331) and the Innovation Program for Quantum Science and Technology, China (Grant No. 2021ZD0302100).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [qh@whu.edu.cn](mailto:qh@whu.edu.cn)

<sup>‡</sup> Corresponding author. E-mail: [wzhang@hznu.edu.cn](mailto:wzhang@hznu.edu.cn)

准一维玻色-爱因斯坦凝聚中集体激发的量子纠缠熵

齐莹 刘艳鸿 乔豪学 张文献

Quantum entanglement entropy of collective excitations in a quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensate

QI Ying LIU Yanhong QIAO Haoxue ZHANG Wenxian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 210303 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250808

CSTR: 32037.14.aps.74.20250808

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250808>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

不对称双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学

Dynamics of Bose-Einstein condensation in an asymmetric double-well potential

物理学报. 2023, 72(13): 130303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230419>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬灭孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>

玻色-爱因斯坦凝聚中的非正则涡旋态及其动力学

Noncanonical vortex states and dynamics in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2023, 72(10): 100306 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222289>

自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚的动力学性质

Dynamics of spin-tensor-momentum coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2023, 72(18): 180304 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231076>

基于退磁冷却的镝原子玻色-爱因斯坦凝聚制备

Preparation of Bose-Einstein condensate of dysprosium atoms based on demagnetization cooling

物理学报. 2024, 73(21): 216701 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241299>

双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中PT对称势下的异步量子Kármán涡街

Asynchronous quantum Kármán vortex street in two-component Bose-Einstein condensate with PT symmetric potential

物理学报. 2024, 73(11): 110501 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20232003>