

## 量子态间渐近转化率的分布\*

高冬梅<sup>1)2)3)†</sup>

1) (山东工商学院数学与信息科学学院, 烟台 264005)

2) (烟台市大数据建模与智能计算重点实验室, 烟台 264005)

3) (沉浸技术与评价山东省工程研究中心, 烟台 264005)

(2025年7月4日收到; 2025年9月12日收到修改稿)

在量子资源理论中, 系统中不可避免存在的噪声使得调控和转化量子资源变得困难. 为了克服转化量子资源态时噪声的影响, 高资源初态  $\rho$  到低资源目标态  $\rho'$  的转化往往考虑多份初始态到多份目标态的渐近转化. 渐近转化率  $R(\rho \rightarrow \rho')$  可以刻画这类转化过程中量子操作的能力, 并且它被定义为目标态份数与初态份数的比值. 一般地, 要得到渐近转化率的确切值是困难的. 在一般的多体量子资源理论中, 本文研究了两部划分下渐近转化率的分布特征: 当  $\alpha \geq 1$  时  $R^\alpha(\rho \rightarrow \rho')$  服从单配性关系式, 并且证明得到边际转化率和边际的催化转化率也都服从上述分布特征. 这些关系式表明多体系统中量子资源的分布以及子系统间量子资源的配置是存在束缚的.

**关键词:** 量子资源理论, 渐近转化率, 单配性关系

**PACS:** 03.67.-a, 03.65.Ta, 03.65.Yz

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250877

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250877

## 1 引言

量子资源理论框架<sup>[1-4]</sup>是从物理资源的角度建立的一个严格量化量子力学特性的公理化框架. 这个框架由自由态集合  $\mathbb{F}$ 、自由操作集合  $\mathbb{O}$  和资源度量  $G$  三部分组成. 常用的量子资源包括量子纠缠<sup>[5,6]</sup>、魔性资源 (magic resource)<sup>[7]</sup>、量子相干<sup>[8-10]</sup> 和量子置乱 (quantum scrambling)<sup>[11]</sup> 等. 该理论的基本思想是研究特定物理场景以及限制条件下被允许的物理操作作用后量子态的性质, 这些被允许的量子操作  $\Lambda \in \mathbb{O}$  称为自由操作; 一般地, 将系统中不包含量子资源的态称为自由态  $\sigma \in \mathbb{F}$ , 其余的量子态称为资源态, 它们满足  $\Lambda(\sigma) \in \mathbb{F}$ . 常见的自由操作有纠缠资源理论中的局域操作与经典通信 (LOCC)、相干资源理论中的退相干操作等. 在一般

量子资源理论 (general quantum resource theory) 框架中, 一个基本的问题是: 对于给定的初始量子态  $\rho$  与目标量子态  $\rho'$ , 是否存在自由操作  $\Lambda$ , 使得  $\Lambda(\rho) = \rho'$ ?

最近, Shiraishi 与 Takagi<sup>[12]</sup> 给出的 No-Go 定理揭示了初态  $\rho$  中有非 0 的量子资源  $G(\rho) \neq 0$  是实现量子态转化的必要条件, 而自由态只能被自由操作转化为自由态. 但是, 单份的资源态在自由操作下不一定总可以被转化为所需的目标态. 例如<sup>[13,14]</sup> 两体纠缠资源理论中初态

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |11\rangle + \frac{\sqrt{10}}{5} |22\rangle + \frac{\sqrt{10}}{10} |33\rangle$$

就不能被 LOCC 转化为目标态

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{15}}{5} |11\rangle + \frac{\sqrt{5}}{5} |22\rangle + \frac{\sqrt{5}}{5} |33\rangle.$$

一般地准备多份相同的初态能够提高量子态间转

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61771294) 和山东工商学院博士科研启动基金 (批准号: 014-306518) 资助的课题.

† E-mail: gaomei8006@126.com

化的可能性, 这种把多份初态 (近似地) 转化为多份目标态的操作, 被称为量子态间的渐近转化<sup>[15-17]</sup>, 即: 自由操作把  $n$  份初态转化为  $rn$  份终态, 其中  $r$  是转化率, 用于度量近似转化下自由操作的能力.

资源纯态在量子通信和量子计算领域都扮演着重要角色, 但是通过自由操作将混合态转化为纯态是一件困难的量子任务. 对于秩等于密度矩阵行 (列) 数的全阶态, Marvian<sup>[18]</sup> 研究了量子相干资源理论中这类态的渐近转化问题, 指出协方操作 (covariant operation) 下任何全阶态被转化为相干纯态的渐近转化率均为 0: 这是因为即使  $G(\rho) \approx 0$  时, 初态  $\rho$  到目标态  $\rho'$  的转化率也要服从:

$$0 \leq R(\rho \rightarrow \rho') \leq \frac{G(\rho)}{G(\rho')} \rightarrow 0,$$

其中  $G$  是超可加的量子资源度量, 第二个不等式源自文献 [19] 的定理 4. 需要指出的是, 这个约束条件只适用于具有张量可加性与超可加性的量子资源度量. 但是大多数的量子资源度量不满足这些性质.

既然在执行实际的量子任务时参与者一般只持有混合态 (噪声态), 本文将首先把 Ganardi 等<sup>[16]</sup> 关于纠缠蒸馏时渐近转化率的主要结果推广至一般的两体量子资源理论中, 得到自由操作下高资源混合初态到低资源混合目标态渐近转化率的超可加不等式. 然后把结果推广至一般的多体量子资源理论中, 得到渐近转化率服从单配性的结果, 以及两部划分下当  $\alpha \geq 1$  时  $R^\alpha(\rho \rightarrow \rho')$  服从单配性关系式的结果. 这些关系式表明多体系统中量子资源的分布以及子系统间量子资源的配置是存在束缚的. 我们还研究了边际转化率和边际的催化转化率等其他类型转化率的分布特征.

## 2 基本概念

本节阐明文中要用到的主要概念.

### 1) 超可加性

对于资源度量  $G$ , 若  $G(\rho_A \otimes \rho_B) = G(\rho_A) + G(\rho_B)$  则称  $G$  是张量可加的; 若  $G(\rho_{AB}) \geq G(\rho_A) + G(\rho_B)$  则称  $G$  是两体系统上超可加的, 其中  $\rho_A = \text{tr}_B[\rho_{AB}]$ ,  $\rho_B = \text{tr}_A[\rho_{AB}]$ .

### 2) 单配性关系式 (CKW 不等式)

单配性关系式是用不等式刻画多体量子系统中量子资源度量分布的一种常用方法, 也是量子密

钥分发实现安全的必要特征<sup>[20-22]</sup>. 对于  $N$ -qubit 态  $\rho_{AB_1 \dots B_{N-1}}$  和量子资源度量  $G$ , 在两部划分  $A|B_1 \dots B_{N-1}$  下, 服从 Coffman-Kundu-Wootters (CKW) 不等式<sup>[23]</sup>

$$\begin{aligned} R_{A|B_1 \dots B_{N-1}} &\geq R_{AB_1} + R_{AB_2} + \dots + R_{AB_{N-1}}, \\ R_{AB_i} &= R(\rho_{AB_i}), \\ R_{A|B_1 \dots B_{N-1}} &= R(\rho_{A|B_1 \dots B_{N-1}}), \\ \rho_{AB_i} &= \text{tr}_{B_1 \dots B_{i-1} B_{i+1} \dots B_{N-1}}(\rho_{AB_1 \dots B_{N-1}}), \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1)$$

有些资源度量  $G$  不服从 CKW 不等式, 但是服从广义的单配性不等式<sup>[24-28]</sup>: 对于一定范围内的正实数  $\alpha$ , 有

$$R_{A|B_1 \dots B_{N-1}}^\alpha \geq R_{AB_1}^\alpha + R_{AB_2}^\alpha + \dots + R_{AB_{N-1}}^\alpha. \quad (2)$$

例如: Concurrence 与形成纠缠不服从单配性不等式, 但是 Concurrence 的  $\alpha$  ( $\alpha \geq 2$ ) 次幂与形成纠缠的  $\alpha$  ( $\alpha \geq \sqrt{2}$ ) 次幂在  $N$ -qubit 系统中服从单配性关系<sup>[29]</sup>.

### 3) 渐近转化率

记  $\rho$  与  $\rho'$  分别是系统  $S$  与  $S'$  中的量子态. 对于任意尽可能小的正数  $\varepsilon$  和  $\delta$ , 若存在正整数  $m, k$  和自由操作  $\Lambda: S^{\otimes n} \rightarrow S'^{\otimes \lfloor rn \rfloor}$ , 使得

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\rho^{\otimes m}) - \rho'^{\otimes k}\|_1 &< \varepsilon, \text{ 并且 } \frac{m}{k} + \delta > r, \quad (3) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda(\rho^{\otimes n}) - \rho'^{\otimes \lfloor rn \rfloor}\|_1 &= 0, \end{aligned}$$

则称  $r$  是自由操作  $\Lambda$  下  $\rho$  到  $\rho'$  的可达渐近转化率, 其中  $\|T\|_1 = \text{tr}[\sqrt{T^\dagger T}]$  是量子操作  $T$  的迹模. 进一步地, 一系列自由操作  $\{\Lambda_n\}$  下可达渐近转化率  $r$  的上确界被称为  $\rho$  到  $\rho'$  的渐近转化率  $R$ :

$$R(\rho \rightarrow \rho') = \sup_{\{\Lambda_n\}} \{r\},$$

也可以等价表示为

$$R(\rho \rightarrow \rho') = \sup_{\{\Lambda_n\}} \left\{ r \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n(\rho^{\otimes n}) - \rho'^{\otimes \lfloor rn \rfloor}\|_1 \right. \right\}. \quad (4)$$

### 4) 边际转化率

边际转化 (marginal transformation) 率  $R_m(\rho \rightarrow \rho')$  定义为<sup>[16]</sup>

$$R_m(\rho \rightarrow \rho') = \max_r, \quad (5)$$

其中对于任意的正数  $\varepsilon$  和  $\delta$ , 存在正整数  $k, m$  和自由操作  $\Lambda$ , 使得

$$\Lambda(\rho^{\otimes k}) = \rho_{12\dots m}, \|\rho_i - \rho'\|_1 < \varepsilon, \frac{m}{k} + \delta > r. \quad (6)$$

### 5) 边际催化转化率

边际的催化转化 (marginal-catalytic transformation) 率  $R_{\text{mc}}(\rho \rightarrow \rho')$  定义为<sup>[16]</sup>:  $R_{\text{mc}}(\rho \rightarrow \rho') = \max r$ , 其中对于任意的正数  $\varepsilon$  和  $\delta$ , 存在正整数  $k, m$ , 自由操作  $\Lambda$  和催化剂  $\tau_C$ , 使得

$$\Lambda(\rho^{\otimes k} \otimes \tau_C) = \rho_{12\dots mC}, \|\rho_i - \rho'\|_1 < \varepsilon, \quad (7)$$

并且  $\rho_C = \tau_C$ ,  $m/k + \delta > r$ .

## 3 渐近转化率的分布

量子纠缠<sup>[5,6]</sup>、量子热力学中的能量<sup>[20]</sup>等在资源理论中总是存在具有张量可加性与超可加性等属性的量子资源度量. 但是, 在一些相干资源理论中, 存在没有超可加性的量子资源度量<sup>[21]</sup>. 在一般的量子资源理论, 本节将分别研究两体和多体量子系统中两部划分下渐近转化率的分布特征. 进一步地, 对于任意的目标态  $\rho'$ , 将用类似的研究策略探讨边际转化率和边际的催化转化率等的分布特征.

首先把 Ganardi 等<sup>[16]</sup>关于纠缠蒸馏时渐近转化率的主要结果推广至一般的两体量子资源理论中.

**引理 1** 对于任意的目标量子态  $\rho'$  和两部划分后的量子态  $\rho_{12}$ , 均有 (见图 1)

$$R(\rho_{12} \rightarrow \rho') \geq R(\rho_1 \rightarrow \rho') + R(\rho_2 \rightarrow \rho'). \quad (8)$$

**证明** 设  $r_1$  和  $r_2$  分别是  $\rho_1 \rightarrow \rho'$  和  $\rho_2 \rightarrow \rho'$  的

可行转化率, 则  $r_i \leq R(\rho_i \rightarrow \rho')$ , 其中  $i \in \{1, 2\}$ . 又由  $r_i$  是可行转化率以及 (3) 式可知: 对于任意的  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , 存在  $\delta_i \in (0, 1)$ 、正整数  $k_i, m'_i$  和自由操作  $\Lambda'_i$ , 使得

$$\|\Lambda'_i(\rho_i^{\otimes k_i}) - \rho'^{\otimes m'_i}\|_1 < \varepsilon^2, \frac{m'_i}{k_i} + \delta_i > r_i. \quad (9)$$

记  $k = k_1 \cdot k_2$ , 则对于任意的  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ 、正整数  $m_i$  和自由操作  $\Lambda_i$ , 使得

$$\|\Lambda_i(\rho_i^{\otimes k_i}) - \rho'^{\otimes m_i}\|_1 < \varepsilon^2, \frac{m_i}{k} + \delta > r_i. \quad (10)$$

由 (10) 式和三边不等式可知, 对于第一个子系统中的纯态  $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ , 均有

$$\begin{aligned} & \left\| \Lambda_1 \otimes I_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} \right\|_1 \\ & \leq \left\| \Lambda_1 \otimes I_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} \right\|_1 \\ & \quad + \left\| \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} \right\|_1 \\ & \leq \left\| \Lambda_1 \otimes I_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k} \right\|_1 \\ & \quad + \left\| \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k} - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} \right\|_1 + \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $I_2$  是第二个子系统上的单位算子,  $\omega_{23}$  是  $\rho_{12}$  所在系统中任意的两体态, 并且  $\text{tr}_3 \omega_{23} \neq \rho_2$ . 又由于

$$\begin{aligned} & \left\| \Lambda_1 \otimes I_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k} \right\|_1 \\ & \leq 2\sqrt{1 - F^2\left(\Lambda_1 \otimes I_2(\rho_{12}^{\otimes k}), \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k}\right)}, \end{aligned} \quad (12)$$

并且

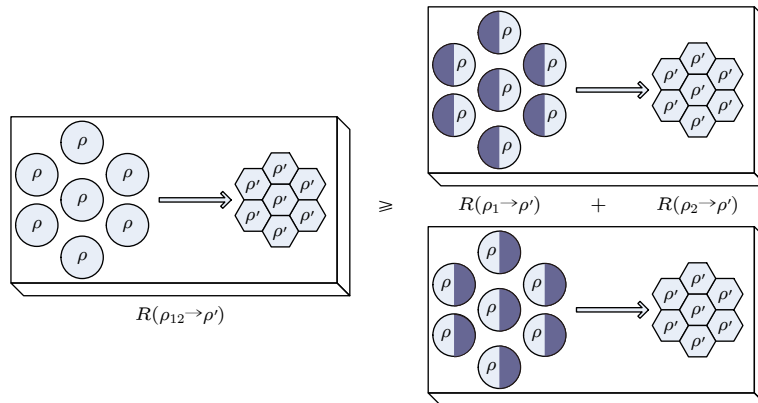


图 1 多体系统中, 两部划分下渐近转化率的单配性关系. 右上图中左灰右白的量子态表示第一子系统中的态, 右下图中左白右灰的量子态表示第二子系统中的态

Fig. 1. In any multiple quantum resource theory, the bipartite asymptotic transformation rates obey monogamy relations. These left gray and right white states in the top-right image are quantum states in the first subsystem, and these left white and right gray states in the below-right image are quantum states in the second subsystem.

$$\begin{aligned}
 & F\left(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_2(\rho_{12}^{\otimes k}), \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k}\right) \\
 & \geq F\left(\psi_{123}^{\otimes k}, \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \omega_{23}^{\otimes k}\right) \\
 & \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left\| \psi_{123}^{\otimes k} - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \omega_{23}^{\otimes k} \right\|_1} \\
 & > \sqrt{1 - \varepsilon^2/2}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中保真度  $F(\rho_1, \rho_2) = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}$ , 第一个不等式成立是因为偏迹下保真度不减, 第二个不等式成立是因为  $F(\rho_1, \rho_2) \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2} \|\rho_1 - \rho_2\|_1}$ , 第三个不等式成立是因为 (10) 式, 进而可得

$$\left\| \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes (\text{tr}_3 \omega_{23})^{\otimes k} \right\|_1 \leq \varepsilon. \quad (14)$$

结合 (10) 式得到:

$$\left\| \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \rho_2^{\otimes k} \right\|_1 \leq \varepsilon + \varepsilon^2 < \frac{3}{2}\varepsilon. \quad (15)$$

利用数据处理不等式, 得到:

$$\left\| \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \mathbf{A}_2(\rho_2^{\otimes k}) \right\|_1 < \frac{3}{2}\varepsilon. \quad (16)$$

进一步地, 结合三边不等式得到:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes(m_1+m_2)} \right\|_1 \\
 & \leq \left\| \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \mathbf{A}_2(\rho_2^{\otimes k}) \right\|_1 \\
 & \quad + \left\| \rho_0^{\otimes m_1} \otimes \mathbf{A}_2(\rho_2^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes(m_1+m_2)} \right\|_1 < 3\varepsilon. \quad (17)
 \end{aligned}$$

又由 (10) 式可知  $\frac{m_1+m_2}{k} + \delta > r_1 + r_2$ .

从而任意的  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , 存在  $\delta_i \in (0, 1)$ 、正整数  $m = m_1 + m_2$ ,  $k$  和自由操作  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2$ , 使得

$$\left\| \mathbf{A}(\rho_{12}^{\otimes k}) - \rho_0^{\otimes m} \right\|_1 < 3\varepsilon, \quad \frac{m}{k} + \delta > r_1 + r_2. \quad (18)$$

所以  $R(\rho_1 \rightarrow \rho') + R(\rho_2 \rightarrow \rho')$  是  $\rho_{12} \rightarrow \rho'$  的可行转化率, 命题得证.

借助于逐层的两部划分, 这个结果可以容易地推广至一般的多体量子资源理论中, 从而得到渐近转化率  $R$  以及含参的渐近转化率  $R^\alpha$  均服从单配性的结果, 即如下定理 1.

**定理 1** 对于任意的量子态  $\rho'$  和  $n$  体量子态  $\rho_{12\dots n}$ , 均有

$$R(\rho_{12\dots n} \rightarrow \rho') \geq \sum_{i=1}^n R(\rho_i \rightarrow \rho'). \quad (19)$$

即渐近转化率服从单配性不等式.

利用定理 1 和二项式定理, 可以得到如下推论 1.

**推论 1** 对于任意的量子态  $\rho'$  和  $n$  体量子态  $\rho_{12\dots n}$ , 当  $\alpha \geq 1$  时,

$$R^\alpha(\rho_{12\dots n} \rightarrow \rho') \geq \sum_{i=1}^n R^\alpha(\rho_i \rightarrow \rho'). \quad (20)$$

事实上, 对于任意的可转化态  $\rho$  与  $\rho'$  转化率  $R(\rho \rightarrow \rho')$  是连续的, 即对于尽可能小的正数  $\varepsilon$ , 存在尽可能小的正数  $\delta$ , 使得当  $\|\rho_1 - \rho_2\|_1 < \delta$  时,  $R(\rho_1 \rightarrow \rho') \geq R(\rho_2 \rightarrow \rho') - \varepsilon$ . 利用渐近转化率的连续性和 Ganardi 等<sup>[16]</sup> 关于纠缠蒸馏时边际转化率的证明策略, 可以得到渐近转化率与边际转化率在一般的量子资源理论中恒等.

**引理 2** 对于任意的两个量子态  $\rho$  与  $\rho'$ , 均有  $R_m(\rho \rightarrow \rho') = R(\rho \rightarrow \rho')$ .

**证明** 由  $R_m(\rho \rightarrow \rho')$  的定义可知, 任意的正数  $\varepsilon$  和  $\delta$ , 存在正整数  $k, m$  和自由操作  $\mathbf{A}$ , 使得

$$\mathbf{A}(\rho^{\otimes k}) = \rho_{12\dots m}, \quad \|\rho_i - \rho'\|_1 < \varepsilon, \quad (21)$$

并且  $m/k + \delta > r$ . 从而,  $R(\rho^{\otimes k} \rightarrow \rho') = kR(\rho \rightarrow \rho') \geq R(\rho_{12\dots m} \rightarrow \rho')$ .

由定理 1 可知

$$R(\rho_{12\dots m} \rightarrow \rho') \geq \sum_{i=1}^m R(\rho_i \rightarrow \rho'). \quad (22)$$

又由转化率  $R(\rho \rightarrow \rho')$  的连续性可知  $R(\rho_i \rightarrow \rho') \geq 1 - \varepsilon$ , 所以  $\sum_{i=1}^m R(\rho_i \rightarrow \rho') \geq m(1 - \varepsilon)$ , 从而  $kR(\rho \rightarrow \rho') \geq m(1 - \varepsilon)$ , 即  $\frac{m}{k} \leq \frac{R(\rho \rightarrow \rho')}{1 - \varepsilon}$ . 在此公式两边都加上  $\delta$ , 结合  $R_m(\rho \rightarrow \rho')$  的定义, 得到  $r < \frac{R(\rho \rightarrow \rho')}{1 - \varepsilon} + \delta$ . 又由于  $\varepsilon$  和  $\delta$  都是尽可能小的正数, 得到  $r \leq R(\rho \rightarrow \rho')$ , 从而  $R_m(\rho \rightarrow \rho') \leq R(\rho \rightarrow \rho')$ .

从定义可以看出  $R_m(\rho \rightarrow \rho') \geq R(\rho \rightarrow \rho')$ , 所以  $R_m(\rho \rightarrow \rho') = R(\rho \rightarrow \rho')$ .

结合推论 1 和引理 2 容易得到含参边际转化率的单配性不等式, 即如下定理 2.

**定理 2** 对于任意的量子态  $\rho'$  和  $n$  体量子态  $\rho_{12\dots n}$ , 当  $\alpha \geq 1$  时,

$$R_m^\alpha(\rho_{12\dots n} \rightarrow \rho') \geq \sum_{i=1}^n R_m^\alpha(\rho_i \rightarrow \rho'). \quad (23)$$

催化态往往能够提高量子态间的转化可能性, 或者增大转化效率. 但是, 利用操作下迹模不增的

性质和 Ganardi 等<sup>[16]</sup>关于纠缠蒸馏时渐近转化率的证明策略,可以得到边际的催化转化率与边际转化率在一般的量子资源理论中恒等,即如下引理 3 成立.

**引理 3** 对于任意的两个量子态  $\rho$  与  $\rho'$ , 均有

$$R_{mc}(\rho \rightarrow \rho') = R_m(\rho \rightarrow \rho'). \quad (24)$$

**证明** 由  $\rho$  可以被渐近的转化为目标态, 可知有限份的  $\rho$  经由自由操作可以近似地转化为一个需要的催化态  $\tau_C$ , 即对于任意尽可能小的正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $l$  和自由操作  $\hat{A}$ , 使得

$$\|\hat{A}(\rho^{\otimes l}) - \tau_C\|_1 < \varepsilon. \quad (25)$$

为了研究方便, 记

$$\tau_\varepsilon = \hat{A}(\rho^{\otimes l}). \quad (26)$$

利用边际的催化转化率  $R_{mc}(\rho \rightarrow \rho')$  定义, 记

$$\Lambda(\rho^{\otimes k} \otimes \tau_\varepsilon) = \hat{\rho}_{12\dots nC}. \quad (27)$$

结合操作下迹模不减的性质可得:

$$\|\hat{\rho}_{12\dots nC} - \rho_{12\dots nC}\|_1 \leq \|\rho^{\otimes k} \otimes \tau_\varepsilon - \rho^{\otimes k} \otimes \tau_C\|_1 < \varepsilon. \quad (28)$$

从而  $\|\hat{\rho}_i - \rho_i\|_1 < \varepsilon$ ,  $\|\hat{\rho}_C - \tau_C\|_1 < \varepsilon$ .

利用三边不等式和边际催化转化率  $R_{mc}(\rho \rightarrow \rho')$  的定义, 得到

$$\|\hat{\rho}_i - \rho'\|_1 < 2\varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (29)$$

将上述过程执行两轮, 由 (26) 式和 (27) 式可知  $\rho^{\otimes(2k+l)}$  可进行如下转化:

$$\Lambda[\rho^{\otimes k} \otimes \hat{A}(\rho^{\otimes l})] \otimes \rho^{\otimes k} = \hat{\rho}_{12\dots nC} \otimes \rho^{\otimes k}. \quad (30)$$

以  $\hat{\rho}_C$  为催化态, 利用边际的催化转化率  $R_{mc}(\rho \rightarrow \rho')$  定义, 并且记

$$\Lambda(\rho^{\otimes k} \otimes \hat{\rho}_C) = \tilde{\rho}_{(n+1)(n+3)\dots(2n)C}, \quad (31)$$

从而可以得到  $\|\tilde{\rho}_C - \tau_C\|_1 < \varepsilon$ ,  $\|\tilde{\rho}_i - \rho'\|_1 < 2\varepsilon$ , 其中  $n+1 \leq i \leq 2n$ .

将上述过程执行足够多的  $L$  轮, 得知  $\rho^{\otimes(Lk+l)}$  近似为量子态  $\tilde{\rho}_{Ln}$ , 满足

$$\|\tilde{\rho}_i - \rho'\|_1 < 2\varepsilon, \quad 1 \leq i \leq Ln. \quad (32)$$

当  $L$  足够大时, 转化率  $\frac{Ln}{Lk+l}$  近似为  $\frac{n}{k}$ , 从而也就近似为  $R_{mc}$ . 从而量子态  $\rho$  可以  $R_{mc}$  边际近似转化为量子态  $\rho'$ . 得证.

结合定理 2、引理 3 以及二项式定理容易得到含参边际的催化转化率的单配性不等式, 即如下

定理 3.

**定理 3** 对于任意的量子态  $\rho'$  和  $n$  体量子态  $\rho_{12\dots n}$ , 当  $\alpha \geq 1$  时,

$$R_{mc}^\alpha(\rho_{12\dots n} \rightarrow \rho') \geq \sum_{i=1}^n R_{mc}^\alpha(\rho_i \rightarrow \rho'). \quad (33)$$

## 4 结 论

在量子资源理论中, 资源度量可以服从单配性关系式, 以便刻画多体系统中一个子系统与另一个子系统的量子关联如何影响它与其他子系统间的关联. 虽然渐近转化率不是量子资源度量, 但是初始态和目标态中包含的资源与渐近转化率密切相关, 即  $R(\rho \rightarrow \rho') \leq G(\rho)/G(\rho')$ . 在一般的多体量子资源理论, 我们研究了两部划分下渐近转化率的分布特征, 即当  $\alpha \geq 1$  时  $R^\alpha(\rho \rightarrow \rho')$  服从单配性关系式. 这些关系式表明多体系统中量子资源的分布以及子系统间量子资源的配置是存在束缚的. 进一步的研究结果表明, 在一般的量子资源理论中, 边际转化率和边际的催化转化率等其他类型转化率也服从单配性.

催化转化<sup>[16,30-33]</sup>也可以解决量子态间不能直接转化的问题, 其中催化转化借助于催化态就可以进行量子态变换, 并且催化态在变换前后维持不变. 最近, 量子态间可逆的转化<sup>[34,35]</sup>成为研究热点, 借助于量子资源电池可以实现量子资源的可逆转化. 这两类转化率是否也存在资源度量的上界, 并且在多体系统中它们是否服从单配性关系, 都是未来值得研究的问题.

## 参考文献

- [1] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [2] Chitambar E, Gour G 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 025001
- [3] Liu F 2025 *Sci. Sin. -Phys. Mech. Astron.* **55** 240317 (in Chinese) [刘锋 2025 *中国科学: 物理学 力学 天文学* **55** 240317]
- [4] Wang G J, Song X K, Liu Y, Wang D 2025 *Acta. Phys. Sin.* **74** 070301 (in Chinese) [王光杰, 宋学科, 叶柳, 王栋 2025 *物理学报* **74** 070301]
- [5] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [6] Liu F, Gao F, Qin S J, Xie S C, Wen Q Y 2016 *Sci. Rep.* **6** 20302
- [7] Zhang Z, Feng L, Luo S 2024 *Phys. Rev. A* **110** 012462
- [8] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041003
- [9] Hu M L, Hu X, Wang J, Peng Y, Zhang Y R, Fan H 2018

- Phys. Rep.* **762** 1
- [10] Li P Y, Liu F, Xu Y Q 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 18
- [11] Garcia R J, Bu K, Jaffe A 2023 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **120** e2217031120
- [12] Shiraiishi N, Takagi R 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 180202
- [13] Bennett C H, Popescu S, Rohrlich D, Smolin J A, Thapliyal A V 2000 *Phys. Rev. A* **63** 012307
- [14] Nielsen M A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 436
- [15] Ferrari G, Lami L, Theurer T, Plenio M B 2023 *Commun. Math. Phys.* **398** 291
- [16] Ganardi R, Kondra T V, Streltsov A 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 250201
- [17] Zuo H, Liu F 2022 *Int. J. Theor. Phys.* **61** 204
- [18] Marvian I 2020 *Nat. Commun.* **11** 25
- [19] Horodecki M 2001 *Quant. Inf. Comput.* **1** 3
- [20] Wilming H, Gallego R, Eisert J 2017 *Entropy* **19** 241
- [21] Marvian I, Spekkens R W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 020404
- [22] Pawłowski M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 032313
- [23] Coffman V, Kundu J, Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306
- [24] Wang G J, Li Y W, Li L J, Song X K, Wang D 2023 *Eur. Phys. J. C* **83** 801
- [25] Zhu X N, Bao G, Jin Z X, Fei S M 2023 *Phys. Rev. A* **107** 052404
- [26] Liu F 2016 *Commun. Theor. Phys.* **66** 407
- [27] Liu F, Gao F, Wen Q Y 2015 *Sci. Rep.* **5** 16745
- [28] Bai Y K, Xu Y F, Wang Z D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 100503
- [29] Zhu X N, Fei S M 2014 *Phys. Rev. A* **90** 024304
- [30] Sharma H, Mokeev A, Helsen J, Borregaard J 2025 arXiv: 2505.05964 [quant-ph]
- [31] Li M, Jia Y, Guo F, Dong H, Qin S, Gao F 2025 *Phys. Rev. A* **111** 052446
- [32] Song Y, Wu Y, Wu S, Li D, Wen Q, Qin S, Gao F 2024 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **67** 250311
- [33] Li L, Li J, Song Y, Qin S, Wen Q, Gao F 2025 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **68** 210313
- [34] Ganardi R, Kondra T V, Ng N H Y, Streltsov A 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 010202
- [35] Yang Y G, Liu B X, Xu G B, Zhou Y H, Shi W M 2023 *IEEE Trans. Inf. Forensics Secur.* **18** 4034

## Distributions of asymptotic transformation rates among quantum states\*

GAO Dongmei<sup>1)2)3)†</sup>

1) (School of Mathematics and Information Science, Shandong Technology and Business University, Yantai 264005, China)

2) (Yantai Key Laboratory of Big Data Modeling and Intelligent Computing, Yantai 264005, China)

3) (Immersion Technology and Evaluation Shandong Engineering Research Center, Yantai 264005, China)

( Received 4 July 2025; revised manuscript received 12 September 2025 )

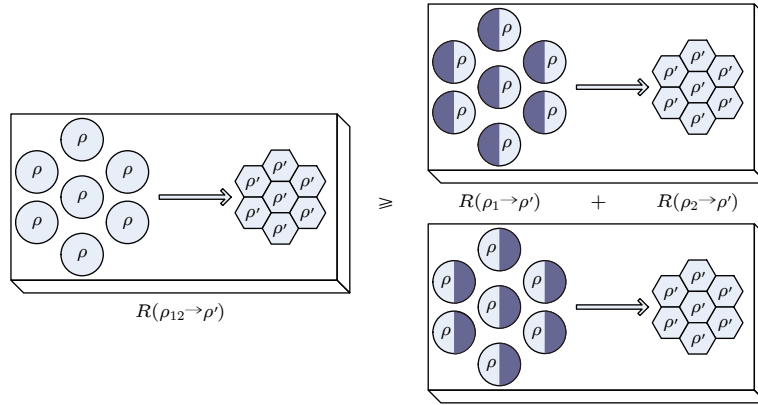
### Abstract

In quantum resource theories, manipulating and transforming resource states are often challenging due to the presence of noise. The resource manipulation process from a high resource state  $\rho$  to a low resource state  $\rho'$  involves asymptotic multiple state replicas, which can be considered as overcoming this problem. Here, the asymptomatic transformation rate  $R(\rho \rightarrow \rho')$  can characterize the corresponding quantum manipulation power, and can be calculated as the ratio of the copy number of initial states to the copy number of target states. Generally, the precise computations of asymptotic transformation rates are challenging, so it is important to establish rigorous and computable boundaries for them. Recently, Ganardi et al. have shown that the transformation rate to any pure state is superadditive for the distillable entanglement. However, it remains a question whether the transformation rate to any noise state is also superadditive in the general resource theory. Firstly, we study the general superadditive inequality satisfied by the transformation rate  $R(\rho \rightarrow \rho')$  of any noise state  $\rho'$ . In any multiple quantum resource theory, we also show that the bipartite asymptomatic transformation rate obeys a distributed relationship: when  $\alpha \geq 1$ ,  $R^\alpha(\rho \rightarrow \rho')$  satisfies monogamy relationship. Using similar methods, we demonstrate that both the marginal asymptotic transformation rate and marginal

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61771294) and the Doctoral Staring Foundation of Shandong Technology and Business University, China (Grant No. 014-306518).

† E-mail: gaomei8006@126.com

catalytic transformation rate satisfies these relationships. As a byproduct, we show an equivalence among the asymptomatic transformation rate, marginal asymptotic transformations, and marginal catalytic transformations under some restrictions. Here marginal asymptotic transformations and marginal catalytic transformations are special asymptotic transformations, where the initial state can be reduced into target state at a nonzero rate. These inequality relationships impose a new constraint on the quantum resource distribution and trade off among subsystems. Recently, reversible quantum resource manipulations have been studied, and it is conjectured that transformations can be reversibly executed in an asymptotic regime. In the future, we will explore a conclusive proof of this conjecture and then study the distributions of these reversible manipulations.



**Keywords:** quantum resource theory, asymptomatic transformation rate, monogamy relation

**PACS:** 03.67.-a, 03.65.Ta, 03.65.Yz

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250877](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250877)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250877](https://www.cstr.org.cn/32037.14.aps.74.20250877)

## 量子态间渐近转化率的分布

高冬梅

### Distributions of asymptotic transformation rates among quantum states

GAO Dongmei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 210301 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250877

CSTR: 32037.14.aps.74.20250877

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250877>

当期内容 View table of contents: <https://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

通用量子计算模型: 一个资源理论的视角

Universal quantum computing models: a perspective of resource theory

物理学报. 2024, 73(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240893>

三味中微子振荡的量子资源特性研究

Review of quantum resource characteristics in three-flavor neutrino oscillations

物理学报. 2025, 74(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250029>

表面单分子量子态的探测和调控研究进展

Advances in detection and regulation of surface-supported molecular quantum states

物理学报. 2022, 71(6): 060701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212324>

实用化量子密钥分发光网络中的资源优化配置

Optimal resource allocation in practical quantum key distribution optical networks

物理学报. 2023, 72(2): 020301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221661>

基于辅助单比特测量的量子态读取算法

A quantum state readout method based on a single ancilla qubit

物理学报. 2021, 70(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211066>

基于多尺度纠缠重整化假设的量子网络通信资源优化方案

Quantum network communication resource optimization scheme based on multi-scale entanglement renormalization ansatz

物理学报. 2024, 73(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241382>