

# 简单忆阻混沌系统的多样动力学分析与预定义时间同步\*

赖强<sup>†</sup> 王君 黄大勋

(华东交通大学电气与自动化工程学院, 南昌 330013)

(2025年7月18日收到; 2025年8月9日收到修改稿)

简单忆阻混沌系统的丰富动力学分析与预定义时间同步研究对充分认识系统动力学形成机制以及拓展混沌系统应用潜力有重要意义. 本文提出一种仅含单个非线性项的四维忆阻混沌系统模型, 旨在揭示系统在参数与初始条件变化下的多样动力学行为并实现高效预定义时间同步控制. 基于耗散性分析和 Lyapunov 指数量化, 结合参数分岔与多稳态研究, 揭示了该系统具有无穷多不稳定平衡点、同构与异构多稳态(点吸引子、周期吸引子与混沌吸引子)分布特征, 并发现通过调节忆阻器内部参数可精准实现信号的幅度控制, 从而为周期信号与混沌信号的有效调幅提供新的模型支撑. 针对该复杂动力学特性, 构建了包含线性与双向幂次非线性衰减项的预定义时间滑模面, 利用 Lyapunov 稳定性理论推导出误差系统在预设时间内收敛的一种新型的充分条件, 并设计了可调同步时间上界的双阶段滑模控制律. 数值仿真表明该系统能够在预定义时间内完成误差收敛, 且过程无超调或抖振, 具备高精度和强鲁棒性.

**关键词:** 忆阻混沌系统, 多稳态, 调幅控制, 滑模控制, 预定义时间同步

**PACS:** 05.45.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250954

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250954

## 1 引言

随着混沌理论在加密通信、复杂网络同步及信号处理等领域的广泛应用, 对结构简洁、行为丰富、易于硬件实现的混沌系统模型的研究受到越来越多关注<sup>[1,2]</sup>. 如何构造具有更强调控能力、结构简洁、动力学可调的混沌系统, 已成为当前非线性系统研究的重要方向<sup>[3]</sup>. 忆阻器作为一种新兴的两端非线性无源元件, 具有电流-磁通之间的非线性映射关系, 能够自然模拟突触权重变化, 近年来被广泛应用于类脑计算、智能电路以及混沌系统的构建<sup>[4-6]</sup>. 与传统电阻、电容、电感相比, 忆阻器提供了更复杂的非线性动力学机制, 可实现状态记忆、

自适应调节等功能. 部分忆阻器模型引入了衰减或遗忘机制以模拟短时记忆过程, 即忆阻导纳随时间或输入变化呈现逐步衰减的特性<sup>[7]</sup>. 基于忆阻器的混沌系统因其结构灵活、参数调节能力强、硬件实现潜力大, 逐渐成为混沌理论研究中的一个前沿方向.

已有多项工作围绕忆阻混沌系统的设计、动力学分析及其同步控制展开. 如引入非线性忆阻项实现多卷吸引子生成, 通过多忆阻器耦合提升系统自由度, 或构建具有混合调制机制的非自治混沌模型等<sup>[8-10]</sup>. 这些系统在产生丰富吸引子、实现多稳态行为和多样分岔路径方面展现出独特优势, 部分研究还将其与人工神经网络、图像加密或信号调制等应用相结合, 推动了忆阻混沌系统的跨领域发展<sup>[11,12]</sup>.

\* 国家自然科学基金(批准号: 62366014)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: laiqliang87@126.com

这些模型虽在动态丰富性方面取得进展,但普遍存在系统维度高、非线性项繁复、同步控制方法难以实现等问题<sup>[13,14]</sup>.在现有混沌同步控制领域,有限时间与固定时间同步方法已受广泛关注,传统方法如自适应控制、有限时间滑模控制等存在收敛时间不可预测、参数调节不便、控制律复杂等难题,亟需提出可控性强、时间上界明确、鲁棒性高的同步控制策略<sup>[15-17]</sup>.固定时间同步虽改善了这一点,但收敛时间不可预设,控制参数选择难度较大.为克服有限时间控制和固定时间控制方法的上述不足,近年来发展出的预定义时间控制方法引起了广泛关注.该方法通过设计特定的收敛结构,使得系统状态在事先给定的有限时间内完成误差收敛,并严格独立于初始条件,具备收敛时间可设定、响应速度快和理论分析严谨等优势.相比传统有限时间或固定时间控制,预定义时间控制提供了对收敛过程更强的主动控制能力,因此在实际工程中更具应用价值<sup>[18,19]</sup>.

当前关于预定义时间控制的研究主要集中在确定型非线性系统的稳定性分析、复杂网络系统的状态同步、鲁棒自适应控制器设计等方向,已逐渐形成包括滑模控制、反演控制、神经网络估计等多种实现方式的理论框架<sup>[20,21]</sup>.一些工作已成功将该方法应用于具有参数不确定性、外部扰动或饱和输入约束的系统同步问题中,展现出良好的动态性能与抗干扰能力<sup>[22,23]</sup>.然而,在忆阻器驱动的混沌系统中,尤其是结构简约、参数调节能力强的低维忆阻模型上,融合预定义时间控制理论开展同步研究仍属少见,相关文献报道极为有限.因此,有必要探索如何在结构极简的忆阻混沌系统中设计出具备预设收敛时间上界的高效同步控制方案,以实现复杂非线性行为的稳定调控,并为后续的工程实现和工程部署打下基础.

鉴于此,本文提出一种结构极简、仅包含单一忆阻非线性项的四维忆阻混沌系统模型.该系统在保留混沌系统核心动力学特征的同时,实现了结构简化、动态调幅及多稳态特性兼容.通过对系统的耗散性分析、Lyapunov 指数量化、参数分岔及初值敏感性模拟,揭示了该系统可产生多种类型的吸引子(如混沌吸引子、周期吸引子与点吸引子),并具有显著的同构与异构多稳态行为.特别是,忆阻器内部参数对系统振荡幅度具有明确的调控效应,为后续控制策略的增益设定与信号幅值约束提供

了可靠支撑.

在此基础上,进一步构建了一种新型的双阶段预定义时间滑模同步控制策略.与现有预定义时间同步文献相比,如 Liu 等<sup>[24]</sup>采用模糊逻辑与变时终端滑模设计,实现了不确定系统的预定义时间同步,但控制器复杂且在扰动抗性验证上存在局限. Zheng 等<sup>[25]</sup>的最新工作针对时滞超混沌系统设计了预定义时间滑模控制器,虽具有参数可设定性,却仅限于线性滑模结构,对复杂非线性耦合响应不足.相比之下,本文控制器结合线性项与多次幂非线性项构造滑模面,利用 Lyapunov 稳定性理论推导出误差系统在预定义时间内收敛的严格条件,并设计具有明确收敛上界的滑模控制律.该策略既能实现对初始误差的快速压缩,也能在预设时间内保证误差系统全局收敛,有效克服传统方法存在的同步时间不可控与超调振荡问题.

## 2 模型描述及动力学行为分析

### 2.1 系统模型

由忆阻器原理和经典的三次型磁控忆阻器模型<sup>[26]</sup>可得如下磁控忆阻器:

$$\begin{cases} \dot{i} = (\alpha - \beta w^2)u, \\ \dot{\varphi} = -u, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\alpha, \beta$  均为正实数,  $i, u, \varphi$  依次代表忆阻器的端电流、端电压和内部磁通.基于忆阻器 (1) 并结合 VB3 系统<sup>[27]</sup>,可构造如下简单忆阻混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta w^2)z + ay, \\ \dot{y} = -bx - z, \\ \dot{z} = cx - dz, \\ \dot{w} = -z, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x, y, z, w$  分别为系统的状态变量,  $a, b, c, d$  是正实数.系统 (2) 由一个非线性项和六个线性项构成,其中唯一的非线性项主要决定的是系统的复杂动力学行为.参数设置如下:  $\alpha = 4, \beta = 0.5, a = 0.5, b = 1.25, c = 1.6, d = 0.5$ ,并且当初值为  $[1, 1, 1, 1]$  时,系统 (2) 将产生如图 1 所示的混沌吸引子.经计算,该吸引子的 4 个 Lyapunov 指数依次为 0.0185, 0, -0.0395, -0.4802,进一步验证了吸引子的混沌特性.由 (2) 式可得系统的散度为

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -(d+1). \quad (3)$$

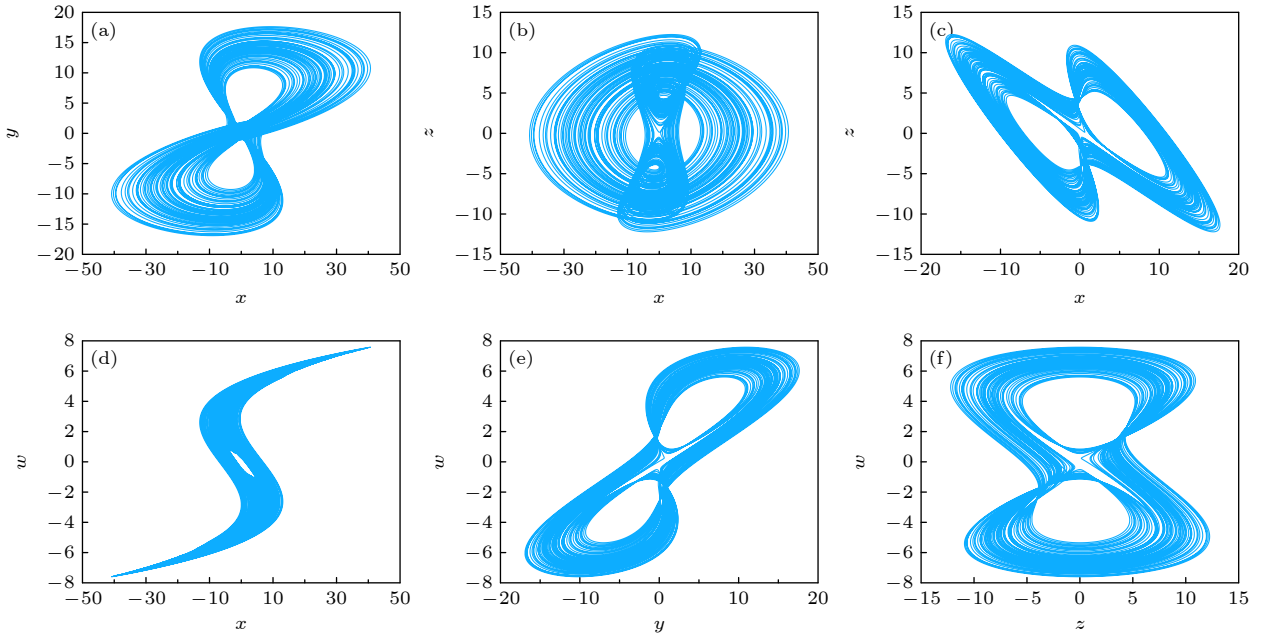


图 1 系统 (2) 的混沌吸引子 (a)  $x$ - $y$ ; (b)  $x$ - $z$ ; (c)  $y$ - $z$ ; (d)  $x$ - $w$ ; (e)  $y$ - $w$ ; (f)  $z$ - $w$   
 Fig. 1. Chaotic attractors of system (2): (a)  $x$ - $y$ ; (b)  $x$ - $z$ ; (c)  $y$ - $z$ ; (d)  $x$ - $w$ ; (e)  $y$ - $w$ ; (f)  $z$ - $w$ .

显然, 对于任何正实数  $d$ ,  $\nabla V$  恒小于 0. 这意味着系统 (2) 是能够产生有界吸引子的耗散系统. 令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 可求解系统 (2) 的线平衡点集为

$$O = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}) = (0, 0, 0, k), \quad (4)$$

其中  $k$  为实数. 在平衡点  $O$  处线性化系统能够得到 Jacobian 矩阵如下:

$$J_O = \begin{bmatrix} 0 & a & (\alpha - \beta w^2) & 0 \\ -1 & 0 & -b & 0 \\ c & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对应的特征方程为

$$\lambda[\lambda^3 + d\lambda^2 + (a - cT)\lambda + abc + ad] = 0, \quad (6)$$

其中  $T = (\alpha - \beta w^2)$ . 由 Routh-Hurwitz 判据可知, 平衡点  $O$  是不稳定的.

## 2.2 分岔分析

选取参数  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $b = 1.25$ ,  $c = 1.6$ ,  $d = 0.5$ , 系统 (2) 随参数  $a \in [0.8, 0.95]$  的分岔过程被展示于图 2(a) 中, 其中红色分岔和蓝色分岔分别来源于初值  $[1, 1, 1, 1]$  和  $[-1, -1, -1, -1]$ . 由分岔图可知, 当参数  $a$  持续增大时, 系统 (2) 逐渐从混沌态过渡至周期态, 并且夹杂着若干狭窄的周期窗口. 设置初值为  $[1, 1, 1, 1]$ , 图 2(b) 给出了与分岔图相

对应的 Lyapunov 指数谱. 这里 Lyapunov 指数具有以下关系: 当  $a \in [0.8, 0.89)$  时, 有  $LE_1 > 0$  表明系统 (2) 处于混沌态; 随着  $a$  的进一步增大, 当  $a \in [0.89, 0.95]$  时, 系统有两个接近 0 的 Lyapunov 指数 ( $LE_1, LE_2 \approx 0$ ) 和两个负指数 ( $LE_3, LE_4 < 0$ ), 表明系统处于非混沌态. 据图 2(b) 可知, Lyapunov 指数谱所反映出的动力学状态与分岔图一致. 为了更好地呈现系统随参数  $a$  的动力学演化过程, 系统在不同  $a$  值下所产生吸引子的  $x$ - $w$  相平面图被绘制在图 3 中. 当  $a = 0.8$  时, 系统 (2) 产生一对混沌吸引子, 如图 3(a) 所示; 当  $a = 0.89$  时, 系统 (2) 产生一对周期-2 吸引子, 如图 3(b) 所示; 而当  $a = 0.95$  时, 系统 (2) 产生一对周期-1 吸引子, 如图 3(c) 所示. 需要指出的是, 红色吸引子和蓝色吸引子分别对应于初值  $[1, 1, 1, 1]$  和  $[-1, -1, -1, -1]$ , 并且两者关于原点中心对称.

## 2.3 异构多稳态

进一步分析表明, 系统 (2) 不仅能够产生如图 3 所示的同构多稳态行为, 在特定的参数设置下还可以产生丰富的异构多稳态. 令初值为  $[0.1, 0.1, 0.1, w(0)]$ , 系统 (2) 关于初值  $w(0) \in [-4, 4]$  的分岔图和 Lyapunov 指数谱被绘制于图 4(a), (b) 中, 其中参数  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1.25$ ,  $c = 1.6$ ,  $d = 0.5$ . 据图可知, 随着  $w(0)$  的增大, 系统 (2)

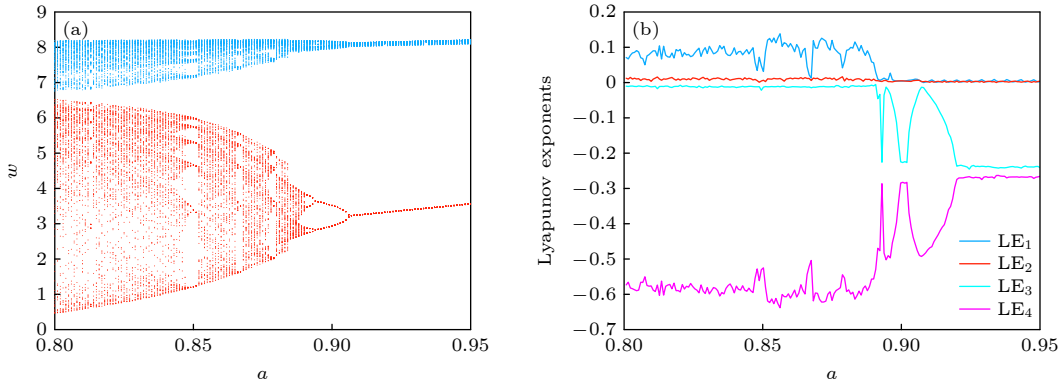


图 2 系统 (2) 关于参数  $a \in [0.8, 0.95]$  的数值结果 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 2. Numerical results of system (2) with parameter  $a \in [0.8, 0.95]$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent spectrum.

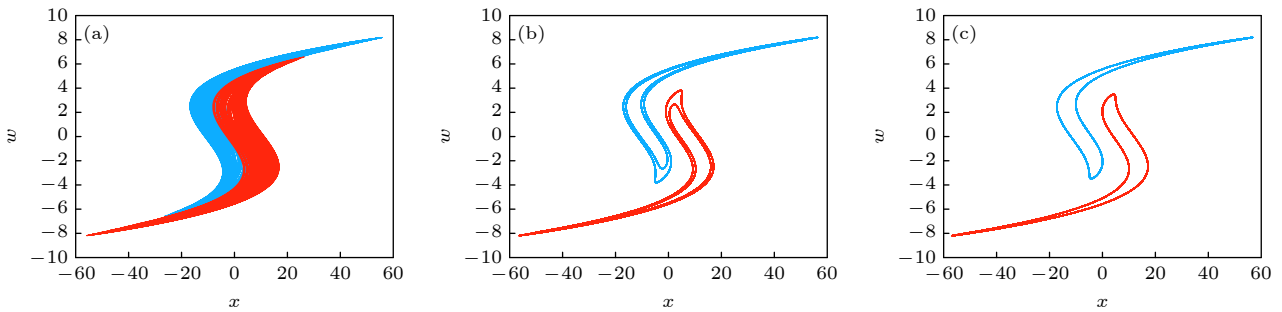


图 3 系统 (2) 在不同参数  $a$  时的吸引子 (a)  $a = 0.8$ ; (b)  $a = 0.89$ ; (c)  $a = 0.95$

Fig. 3. Attractors of system (2) under different values of parameter  $a$ : (a)  $a = 0.8$ ; (b)  $a = 0.89$ ; (c)  $a = 0.95$ .

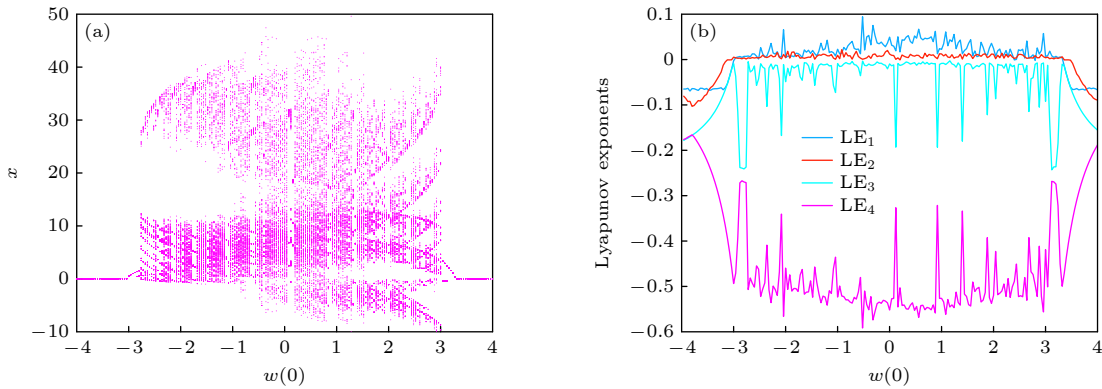


图 4 系统 (2) 关于初值  $[0.1, 0.1, 0.1, w(0)]$ ,  $w(0) \in [-4, 4]$  的数值结果 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 4. Numerical results of system (2) with initial values  $[0.1, 0.1, 0.1, w(0)]$ , where  $w(0) \in [-4, 4]$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent spectrum.

存在复杂的动力学演化过程, 进而产生大量异构多稳态, 如点吸引子、周期吸引子、混沌吸引子. 例如, 选取  $w(0) = 0, 0.97, 3, -2.9, -3, -4$ , 系统 (2) 将产生一个点吸引子、两个混沌吸引子和三个周期吸引子, 如图 5(a) 所示. 重新设置参数  $\alpha = 2, \beta = 0.5, a = 0.4, b = 0.8, c = 1.25, d = 0.4$ , 系统 (2) 将在初值为  $\pm[1, 1, 1, 1], \pm[1, 1, -1, 1], \pm[1, 1, 1, 3]$  时产生两对混沌吸引子和一对周期吸引子, 如图 5(b) 所示.

## 2.4 调幅控制

研究发现, 系统 (2) 具有依赖于忆阻器内部参数  $\beta$  的全局调幅控制行为, 即所有状态变量的振荡幅度均受参数  $\beta$  控制 [28]. 受这一特性的影响, 系统 (2) 能够在不借助额外调幅控制手段仅通过调整  $\beta$  的取值放大 (或缩小) 生成的混沌信号 (或周期信号) 的幅值大小. 对于混沌信号调幅, 图 6(a) 刻画了状态变量  $x, y, z, w$  的最大值关于  $\beta \in [0.1, 1]$  的

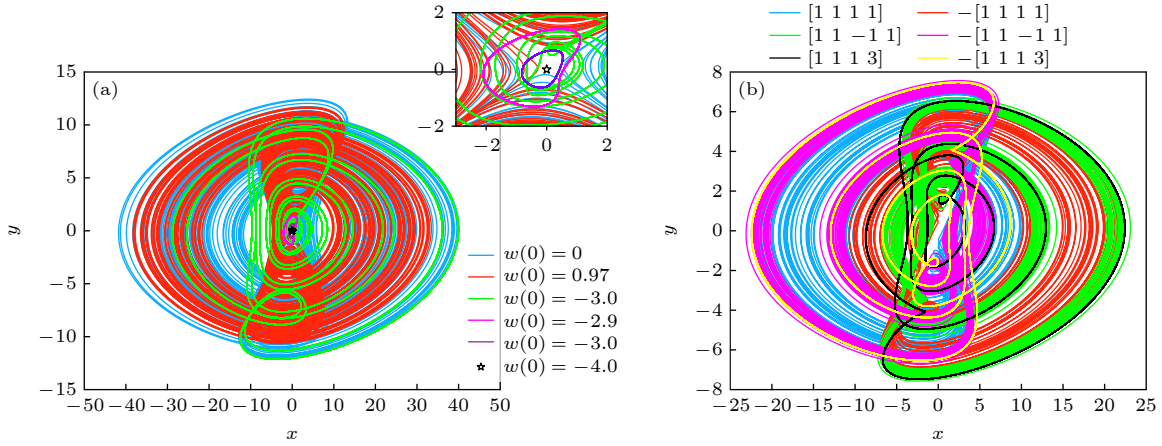


图 5 系统 (2) 的异构多稳态 (a) 一个点吸引子、两个混沌吸引子和三个周期吸引子; (b) 两个周期吸引子和四个混沌吸引子  
Fig. 5. Heterogeneous multistability of system (2): (a) One point attractor, two chaotic attractors, and three periodic attractors; (b) two periodic attractors and four chaotic attractors.

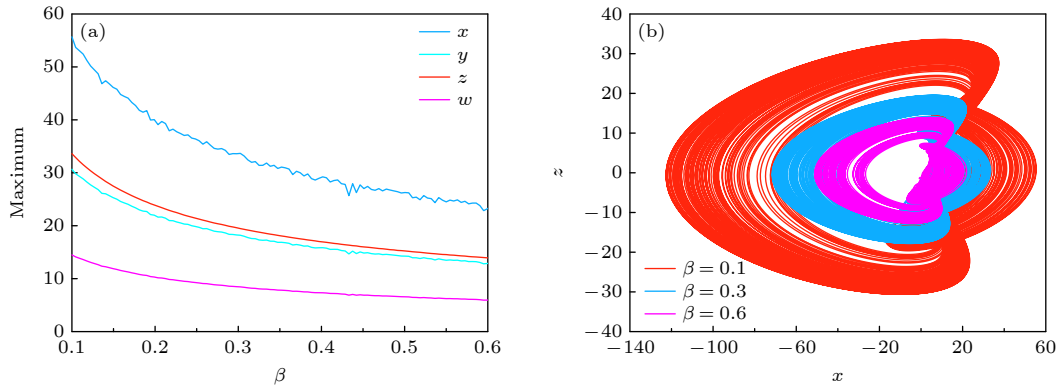


图 6 系统 (2) 的混沌信号调幅控制 (a)  $\beta \in [0.1, 0.95]$  时各状态变量的最大幅值; (b) 不同  $\beta$  对应的混沌吸引子  
Fig. 6. Amplitude modulation control of chaotic signals in system (2): (a) Maximum amplitudes of state variables for  $\beta \in [0.1, 0.95]$ ; (b) chaotic attractors corresponding to different values of  $\beta$ .

变化情况, 参数  $\alpha = 4, a = 0.8, b = 1.25, c = 1.6, d = 0.5$  且初值为  $[1, 1, 1, 1]$ . 随着  $\beta$  的增大, 各个状态变量的振荡幅度呈现非线性减小的趋势, 并且变量  $x$  的变化幅度最为剧烈. 图 6(b) 依次给出了系统 (2) 在  $\beta = 0.1, 0.3, 0.6$  时所生成混沌吸引子的  $x$ - $z$  相平面, 进一步验证了参数  $\beta$  的混沌信号调幅行为. 类似地, 系统 (2) 产生的周期信号的振荡幅度也可以借助  $\beta$  进行调控. 令参数为  $\alpha = 0.5, a = 0.8, b = 1.25, c = 1.6, d = 0.5$ , 且初值为  $[1, 1, 1, 1]$ , 图 7(a), (b) 给出了各状态变量的最大振幅和周期吸引子的  $x$ - $z$  相平面, 验证了周期信号调幅控制行为. 需要指出的是, 该系统的调幅能力主要来源于忆阻非线性项中参数  $\beta$  的直接调控作用. 由于模型结构较为简洁, 非线性项仅由忆阻器单独提供, 参数  $\beta$  的变化不会受到其他耦合项干扰, 因此能够稳定而明确地影响系统的振幅. 这种单参数可

控的调幅特性在多数结构复杂的忆阻系统中并不常见, 具有一定的结构优势和实际应用价值.

### 3 新型预定义时间滑模同步策略

#### 3.1 系统描述及预备知识

考虑如下忆阻混沌系统, 设驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - \beta w_1^2)z_1 + ay_1, \\ \dot{y}_1 = -bx_1 - z_1, \\ \dot{z}_1 = cx_1 - dz_1, \\ \dot{w}_1 = -z_1, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\alpha, \beta, a, b, c, d$  为系统参数, 该系统中的非线性项  $(\alpha - \beta w_1^2)z_1$  引入了参数调制非线性, 使得系统呈现出丰富的动力学行为. 在适当参数条件下, 该系统可产生多样的混沌吸引子, 具有吸引域大、敏感性强、对初值高度依赖等混沌特性, 适合

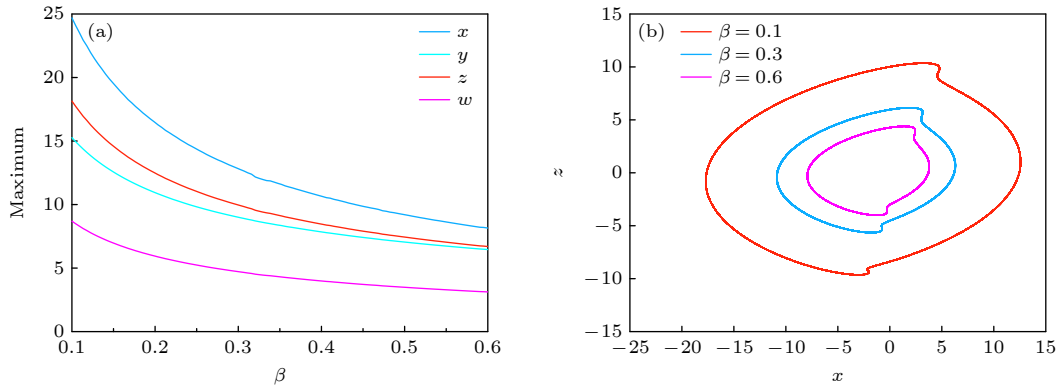


图 7 系统 (2) 的周期信号调幅控制 (a)  $\beta \in [0.1, 0.95]$  时各状态变量的最大幅值; (b) 不同  $\beta$  对应的周期吸引子

Fig. 7. Amplitude modulation control of periodic signals in system (2): (a) Maximum amplitudes of state variables for  $\beta \in [0.1, 0.95]$ ; (b) periodic attractors corresponding to different values of  $\beta$ .

作为混沌同步研究中的驱动系统. 与之对应的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (\alpha - \beta w_2^2)z_2 + ay_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -bx_2 - z_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 = cx_2 - dz_2 + u_3, \\ \dot{w}_2 = -z_2 + u_4, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为需设计的控制输入. 控制器的目标是确保响应系统的状态在预定义时间内与驱动系统实现同步.

利用 (7) 式和 (8) 式可以得到同步误差方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (\alpha - \beta w_2^2)z_2 - (\alpha - \beta w_1^2)z_1 + ae_2 + u_1, \\ \dot{e}_2 = -be_1 - e_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 = ce_1 - de_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = -e_3 + u_4, \end{cases} \quad (9)$$

其中  $e_1 = x_2 - x_1$ ,  $e_2 = y_2 - y_1$ ,  $e_3 = z_2 - z_1$ ,  $e_4 = w_2 - w_1$  表示响应与驱动系统的同步误差. 在确保避免抖振现象的基础上, 为提升滑模控制的整体性能, 同时实现预定义时间收敛, 本文提出了一种新型预定义时间收敛的控制策略. 在设计控制律之前, 先给出如下定义、引理.

**定义 1**<sup>[18]</sup> 假设误差系统 (9) 是全局渐近稳定的, 且误差系统 (9) 的任意解在有限时间内到达平衡点, 则称误差系统 (9) 是全局有限时间稳定系统, 即

$$\forall t \geq T(e_0), e(t, e_0) = 0, \quad (10)$$

其中,  $T(e_0)$  为误差系统 (9) 的实际收敛时间.

**定义 2**<sup>[28]</sup> 假设误差系统 (9) 满足如下两个条

件, 则称误差系统 (9) 为全局固定时间稳定性系统: 1) 能在有限时间内达到稳定状态; 2) 稳定时间  $T(e_0)$  是全局有界的, 并与误差系统的初始状态无关, 即

$$\exists T_{\max} > 0, \forall e_0 \in R^n, T(e_0) \leq T_{\max}, \quad (11)$$

其中,  $T_{\max}$  为误差系统 (9) 的收敛时间估计. 系统 (7) 和 (8) 将实现固定时间同步.

**定义 3**<sup>[21]</sup> 对于预定义参数  $T_c$  ( $T_c$  是可调参数), 若误差系统 (9) 是固定时间稳定的, 且稳定时间函数  $T: R^n \rightarrow R$  使得

$$\forall e_0 \in R^n, T(e_0) \leq T_c. \quad (12)$$

则称误差系统 (9) 为全局预定义时间稳定性系统. 其不仅保证系统在有限时间内趋于稳定, 还允许设计者提前设定收敛时间  $T_c$ , 即驱动响应系统 (7) 和 (8) 将实现预定义时间同步.

**注释 1** 预定义时间同步是一种特殊形式的固定时间同步. 与固定时间同步相比, 具有预定义时间收敛特性的系统可在设计过程中根据需求调整收敛时间的上限; 而固定时间控制无法将系统参数与收敛时间直接关联, 容易导致收敛时间估计不准确、调整困难且不可预测.

**引理 1**<sup>[23]</sup> 设常数  $T > 0$  为预设收敛时间, 考虑非 Lipschitz 连续的非线性系统:

$$\dot{x} = \varphi(x, t), \quad x \in R^n, \quad \varphi(0, t) = 0. \quad (13)$$

若存在一个连续可导、正定且径向无界的 Lyapunov 函数:

$$V: R^n \rightarrow R^+, \quad V(0) = 0, \quad (14)$$

以及常数  $\alpha_p \in (0, 1)$ , 使得沿系统轨迹的导数满足

不等式:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\frac{\pi}{\alpha_p T} \left( V^{1-\frac{\alpha_p}{2}}(x) + V^{1+\frac{\alpha_p}{2}}(x) \right), \quad \forall x \neq 0, t \geq 0. \quad (15)$$

则对于任意初始状态  $x(0)$ , 系统解在时刻  $t = T$  前到达平衡点  $x = 0$ , 且该收敛时间与初始条件无关, 即系统具有预定义时间稳定性.

### 3.2 Lyapunov 函数充分条件

**定理 1** 针对误差系统 (9), 若存在连续可导、正定并且径向无界的 Lyapunov 函数:

$$V: R^n \rightarrow R^+, \quad V(0) = 0, \quad (16)$$

以及常数  $\alpha_p \in (0, 1)$ , 使沿系统轨迹的导数满足:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\frac{2}{T_c(\alpha_p + 1)} \left( 2V(x) + V^{\frac{1-\alpha_p}{2}}(x) + V^{\frac{\alpha_p+3}{2}}(x) \right), \quad \forall x \neq 0, t \geq 0. \quad (17)$$

则称系统在预设时间  $T_c$  内是预定义时间稳定的. 此时, 对任意初始状态  $x(0) = x_0$ , 系统误差可保证在不超过  $T_c$  的时间内收敛至零, 即误差系统 (9) 的实际收敛时间  $T(x_0)$  依赖于预定义时间  $T_c$  ( $T(x_0) \leq T_c$ ).

**证明** 根据不等式 (17), 可得收敛时间:

$$T(x_0) = \int_0^{T(x_0)} dt = \int_{V_0}^{V_{\text{tr}}} \frac{dV}{\dot{V}} \leq -\frac{T_c(\alpha_p + 1)}{2} \int_{V_0}^{V_{\text{tr}}} \frac{dV}{2V + V^{\frac{1-\alpha_p}{2}} + V^{\frac{\alpha_p+3}{2}}}. \quad (18)$$

对被积式进行如下变形:

$$2V + V^{\frac{1-\alpha_p}{2}} + V^{\frac{\alpha_p+3}{2}} = V^{\frac{1-\alpha_p}{2}} \left( 2V^{\frac{\alpha_p+1}{2}} + V^{\alpha_p+1} + 1 \right) = V^{\frac{1-\alpha_p}{2}} \left( V^{\frac{\alpha_p+1}{2}} + 1 \right)^2. \quad (19)$$

令  $u = V^{\frac{\alpha_p+1}{2}}$ , 则:

$$du = \frac{\alpha_p + 1}{2} V^{\frac{\alpha_p-1}{2}} dV, \quad (20)$$

积分下界对应  $V = V_0$  时的  $u_0 = V_0^{\frac{\alpha_p+1}{2}}$ , 上界  $V_{\text{tr}} \rightarrow 0$  时的  $u_{\text{tr}} = 0$ . 代入 (12) 式得到:

$$T(x_0) \leq -T_c \int_{u_0}^0 \frac{du}{(u+1)^2} = T_c \int_0^{u_0} \frac{du}{(u+1)^2} = T_c \left( 1 - \frac{1}{u_0+1} \right) \leq T_c. \quad (21)$$

因此, 系统状态可在不超过预设时间  $T_c$  内收敛至

平衡点, 证明完毕.

**注释 2** 文中所述的引理 1 与定理 1 虽然在形式上有所差异, 但都严格满足预定义时间同步这一概念的核心要求 (定义 3), 引理 1 沿用了传统 Lyapunov 理论中常见的双项非线性衰减项, 其优点在于条件简洁、易于验证; 而定理 1 则在此基础上引入了线性与更高幂次非线性组合衰减, 使得在误差较大与趋近零的两个阶段都能保持较为均衡且高效的收敛速率.

### 3.3 预定义时间滑模面

**定理 2** 针对误差系统 (9), 定义第  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 个误差分量对应的预定义时间滑模面为

$$s_i(t) = \gamma_i e_i(t) + \int_0^t [k_1 e_i(\tau) + k_2 \text{sign}(e_i(\tau)) |e_i(\tau)|^{-\alpha_p} + k_3 \text{sign}(e_i(\tau)) |e_i(\tau)|^{\alpha_p+2} + k_4 \text{sign}(e_i(\tau))] d\tau, \quad (22)$$

其中参数取值为

$$k_1 = \frac{2}{T_{c_1}(\alpha + 1)}, \quad k_2 = \frac{2}{T_{c_1}(\alpha + 1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad k_3 = \frac{2}{T_{c_1}(\alpha + 1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha+3}{2}}, \quad k_4 > 0, \quad \alpha_p \in (0, 1), \quad \gamma_i > 0. \quad (23)$$

该滑模面结合了线性项与两端非线性项的复合结构: 线性项  $k_1 e_i$  保证全局收敛趋势, 负幂项  $k_2 |e_i|^{-\alpha_p}$  在误差靠近零时有效增强抑制作用, 而高幂项  $k_3 |e_i|^{\alpha_p+2}$  在初始误差较大时提供足够的驱动力, 常数项  $k_4$  则用于克服模型不确定性和外部干扰. 当控制器使系统状态在有限时间内到达滑模面, 并保持其不变, 系统进入滑动阶段. 由于滑模面是误差变量的函数, 根据输出误差与滑模面之间的等价关系, 系统误差  $e_i(t)$  必然在预定时间  $T_{c_1}$  内收敛至零.

**证明** 当误差系统 (9) 的运动进入滑模阶段时, 其运动轨迹被限制在滑模面:

$$S(t) = \{e \mid s_i(t) = 0\}, \quad (24)$$

并满足到达条件

$$\dot{s}_i(e) = 0. \quad (25)$$

由此可得在滑模面上, 误差动态遵循:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & -\frac{1}{\gamma_i} [k_1 e_i + k_2 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{-\alpha_p} \\ & + k_3 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{\alpha_p+2} + k_4 \operatorname{sgn}(e_i)]. \end{aligned} \quad (26)$$

取 Lyapunov 函数为

$$V(e_i) = \frac{1}{2} e_i^2, \quad (27)$$

则沿轨迹的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_i \dot{e}_i \\ = & -\frac{1}{\gamma_i} e_i [k_1 e_i + k_2 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{-\alpha_p} \\ & + k_3 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{\alpha_p+2} + k_4 \operatorname{sgn}(e_i)] \\ = & -\frac{1}{\gamma_i} (k_1 e_i^2 + k_2 |e_i|^{1-\alpha_p} + k_3 |e_i|^{\alpha_p+3} + k_4 |e_i|) \\ \leq & -\frac{1}{\gamma_i} (k_1 e_i^2 + k_2 |e_i|^{1-\alpha_p} + k_3 |e_i|^{\alpha_p+3}). \end{aligned} \quad (28)$$

将  $V = e_i^2/2$  代入, 并利用参数选取:

$$\begin{aligned} k_1 = & \frac{2}{T_{c_1}(\alpha_p + 1)}, \quad k_2 = \frac{2}{T_{c_1}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{2}}, \\ k_3 = & \frac{2}{T_{c_1}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha_p+3}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

可得

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{T_{c_1}(\alpha_p + 1)} \left(2V + V^{\frac{1-\alpha_p}{2}} + V^{\frac{\alpha_p+3}{2}}\right). \quad (30)$$

恰满足定理 1 中的 Lyapunov 充分条件. 因此, 误差系统在滑模面上能保证状态  $e_i$  在不超过预设时间  $T_{c_1}$  内收敛至零, 实现预定义时间同步.

### 3.4 滑模控制律设计

**定理 3** 为了保证系统误差变量能够快速到达并保持在滑模面之上, 结合由 (9) 式描述的误差系统和由 (22) 式给出的滑模面, 所设计的滑模控制律如下:

$$\begin{aligned} u_i = & -f_i(e) - \frac{1}{\gamma_i} (k_1 e_i + k_2 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{-\alpha_p} \\ & + k_3 \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^{\alpha_p+2} + k_4 \operatorname{sgn}(e_i)) \\ & - \frac{1}{\gamma_i} (k_5 s_i + k_6 \operatorname{sgn}(s_i) |s_i|^{-\alpha_p} \\ & + k_7 \operatorname{sgn}(s_i) |s_i|^{\alpha_p+2} + k_8 \operatorname{sgn}(s_i)), \\ i = & 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 (32) 式表示控制器中各项增益的计算表达式,

明确了其与预设同步时间及控制精度之间的函数关系; (33) 式则代表了控制器中所涉及的函数项:

$$\begin{aligned} k_5 = & \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)}, \quad k_6 = \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{2}}, \\ k_7 = & \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha_p+3}{2}}, \quad k_8 > 0, \\ \alpha_p \in & (0, 1), \quad \gamma_i > 0, \\ f_1(e) = & (\alpha - \beta w_2^2) z_2 - (\alpha - \beta w_1^2) z_1 + a e_2, \\ f_2(e) = & -b e_1 - e_3, \\ f_3(e) = & c e_1 - d e_3, \\ f_4(e) = & -e_3. \end{aligned} \quad (32)$$

在滑模控制器 (31) 作用下, 误差系统 (9) 能够在预定义的有限时间内实现状态变量向滑模面快速逼近, 即确保系统轨迹在预设时间  $T_{c_2}$  内精确地进入滑模面区域, 从而完成系统从任意初始状态向滑模动态阶段的切换过程.

**证明** 定义趋近阶段 Lyapunov 函数:

$$V_i(s_i) = \frac{1}{2} s_i^2, \quad (34)$$

则

$$\begin{aligned} s_i^2 = & 2V_i, \quad |s_i| = (2V_i)^{1/2}, \\ |s_i|^{1-\alpha_p} = & (2V_i)^{\frac{1-\alpha_p}{2}}, \quad |s_i|^{\alpha_p+3} = (2V_i)^{\frac{\alpha_p+3}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

将 (22) 式代入, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & s_i \dot{s}_i \\ = & s_i (\gamma_i \dot{e}_i(t) + k_1 e_i(t) + k_2 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{-\alpha_p} \\ & + k_3 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{\alpha_p+2} \\ & + k_4 \operatorname{sign}(e_i(t))). \end{aligned} \quad (36)$$

将误差系统 (9) 和控制律 (31) 代入并构造衰减不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & s_i \dot{s}_i = -(k_5 s_i^2 + k_6 |s_i|^{1-\alpha_p} + k_7 |s_i|^{\alpha_p+3} + k_8 |s_i|) \\ \leq & -(k_5 s_i^2 + k_6 |s_i|^{1-\alpha_p} + k_7 |s_i|^{\alpha_p+3}). \end{aligned} \quad (37)$$

将  $s_i^2 = 2V_i$  代入, 并利用

$$\begin{aligned} k_5 = & \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)}, \quad k_6 = \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{2}}, \\ k_7 = & \frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha_p+3}{2}}, \end{aligned} \quad (38)$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p+1)} \left[ 2V_i + (2V_i)^{\frac{1-\alpha_p}{2}} + (2V_i)^{\frac{\alpha_p+3}{2}} \right] \\ &= -\frac{2}{T_{c_2}(\alpha_p+1)} \left( 2V_i + V_i^{\frac{1-\alpha_p}{2}} + V_i^{\frac{\alpha_p+3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

上述不等式恰满足预定义时间同步的 Lyapunov 条件 (定理 1 所述), 因此滑模动态  $s_i(t)$  必能在预定义时间  $T_{c_2}$  内收敛至零.

**注释 3** 由上述分析可知, 系统同步过程分为两阶段: 第 1 阶段为趋近阶段, 利用参数  $T_{c_2}$  设计控制律使系统在不超  $T_{c_2}$  时间内到达滑模面; 第 2 阶段为滑模面内预定义时间收敛阶段, 依据参数  $T_{c_1}$  保证误差在滑模面上于不超过  $T_{c_1}$  时间内收敛至零. 因此, 系统的预定义同步时间上限为  $T_c = T_{c_1} + T_{c_2}$ , 该时间界限与系统初始状态无关, 仅由设计者提前指定的  $T_{c_1}$  与  $T_{c_2}$  确定, 从而在理论上严格满足预定义时间同步的要求.

### 3.5 数值仿真

针对上述设计的双阶段预定义时间滑模同步控制律, 结合文中提出的四维混沌系统仿真实例, 验证同步策略的有效性. 在本次数值仿真中, 采用如下参数配置以确保实验的可重复性与结果的科学性: 驱动系统与响应系统的混沌动力学参数选取为  $\alpha = 4.0$ ,  $\beta = 0.5$ , 以及线性耦合项  $a = 0.5$ ,

$b = 1.25$ ,  $c = 1.6$ , 阻尼系数  $d = 0.5$ , 在此条件下系统在无控制输入时即可展现典型的混沌行为. 双阶段滑模控制器的趋近阶段设计以预设到达时间  $T_{c_2} = 0.5$  s 为依据, 对应衰减参数  $k_5-k_7$  按定理计算并适当调整为  $k_8 = 1$ . 滑动阶段则以  $T_{c_1} = 0.5$  s 为设计上界, 采用幂次增益  $\alpha_p = 0.7$  和滑模面参数  $\gamma_i = 5.0$ , 其中滑模面增益  $k_1-k_3$  同样按定理公式计算 ( $k_1 = 2/T_{c_1}(\alpha_p + 1)$ , 其余随比例缩放), 调整  $k_4 = 1$ . 驱动系统初始状态取  $x_1(0) = [1, -0.3, 0.4, -0.2]$ , 响应系统初始状态取  $x_2(0) = [-0.4, 0.6, -0.5, 0.3]$ , 以考察控制器对初始误差的快速收敛能力. 仿真时间设为  $[0, 5]$  s, 误差容限分别为  $10^{-6}$  和  $10^{-8}$ , 并在后处理阶段统一以  $0.001$  s 步长重采样绘制误差时间曲线与相轨.

在图 8 中, 将驱动系统与响应系统在 4 个状态分量  $x, y, z, w$  上的轨迹并置于同一画幅的  $2 \times 2$  子图中加以比较. 可以看到, 尽管初始条件相差较大 (驱动系统  $x_1(0) = [1, -0.3, 0.4, -0.2]$  而响应系统为  $x_2(0) = [-0.4, 0.6, -0.5, 0.3]$ , 且各分量偏差方向不一), 但在所设计的双阶段预定义时间滑模控制器作用下, 所有状态分量的轨迹均在  $T_c = T_{c_1} + T_{c_2} = 1$  s 内快速无超调地汇聚到相同曲线上, 实现了精确同步.

图 9 表示误差变量收敛轨迹, 在图 9 可以明显看到, 所有误差曲线呈现出“预定义-趋近”的收敛

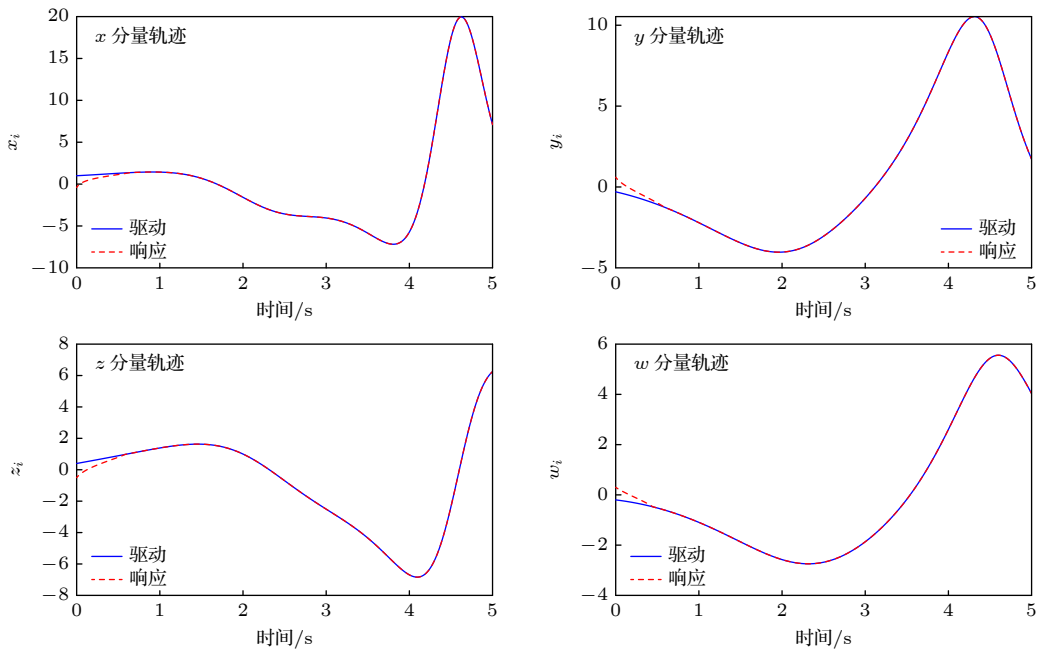


图 8 不同状态变量收敛轨迹

Fig. 8. Convergence trajectories of different state variables.

过程, 在  $t \approx T_{c_2} = 0.5$  s 时, 误差已被抑制至约  $10^{-1}$  量级; 紧接着在  $t \approx T_{c_1} + T_{c_2} = 1$  s 内, 所有分量均迅速下降至数值精度附近并保持不再振荡. 当响应系统的初始状态被重新设定为  $x_2(0) = [-4, 6, -5, 3]$  时, 为进一步验证本文提出的预定义时间滑模同步控制器在不同初始条件下的同步性能, 图 10 和图 11 分别展示了误差系统的收敛轨迹与驱动-响应系统各状态变量的演化对比.

从图 10 可以观察到, 尽管系统初始误差幅度显著增大, 4 个误差分量  $e_i$  仍在理论给定时间界内迅速收敛至零, 且整个收敛过程未出现抖动、分岔或长时间过渡现象, 表明控制器具备良好的鲁棒性

与收敛一致性. 图 11 进一步显示了在强初始扰动下, 响应系统状态依然能够在 1 s 内与驱动系统实现完全同步, 各状态变量轨迹在预定义时间内实现重叠, 未出现显著延迟. 为验证所提预定义时间同步方法对不同初始条件的普适性及避免偶然性, 选取 6 组初始状态分别为  $B: [-4, 6, -5, 3]$ ,  $C: [-8, 12, -10, 6]$ ,  $D: [-16, -24, -20, 12]$ ,  $E: [-32, -48, -40, 24]$ ,  $F: [-24, -26, -30, 14]$ ,  $G: [-12, -12, -16, 29]$ . 对每组初始条件进行 50 次蒙特卡罗仿真, 统计其收敛时间, 并绘制平均收敛时间的直方图如图 12 所示. 结果显示, 每组的误差均能在预定义的时间内收敛为 0, 证明了所提同步方法

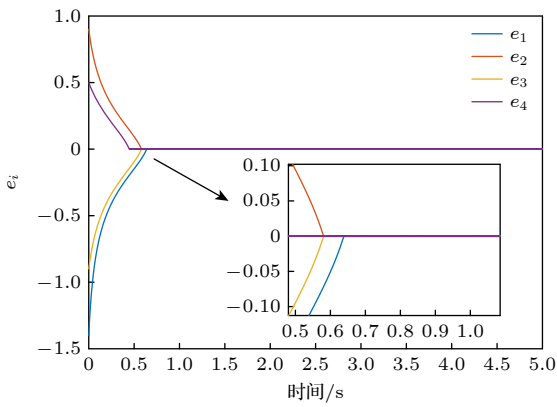


图 9 误差变量演变轨迹

Fig. 9. Evolution trajectories of the error variables.

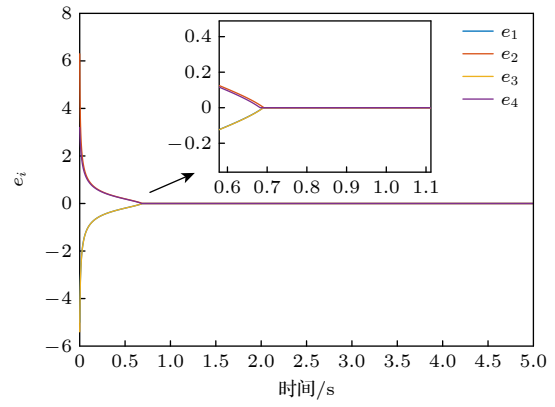


图 10 初始条件改变的状态变量收敛轨迹

Fig. 10. Convergence trajectories of state variables under changed initial conditions.

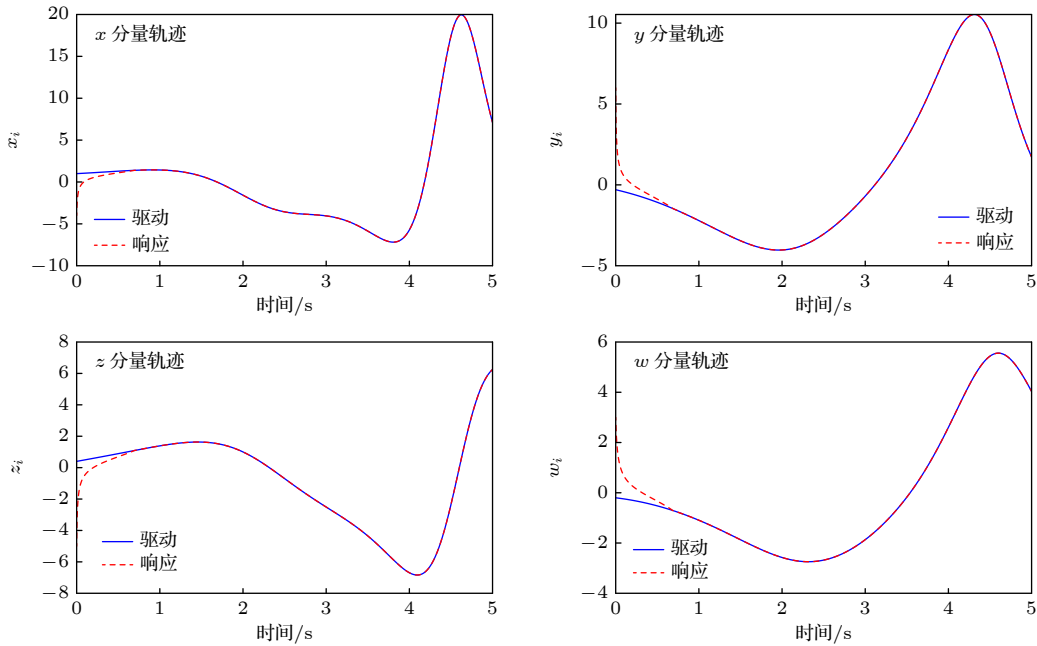


图 11 初始条件改变的误差演变轨迹

Fig. 11. Evolution trajectories of error variables under changed initial conditions.

在大范围初始状态变化下均能稳定、迅速地完成任务。

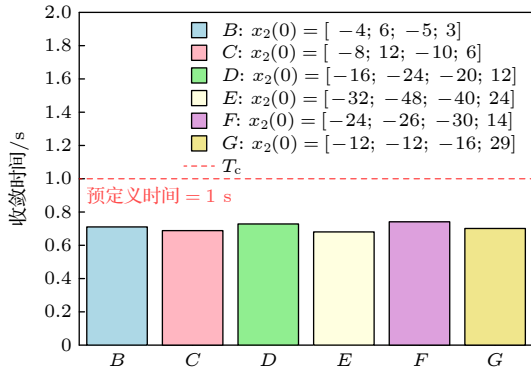


图 12 多组不同初始条件下收敛时间分析

Fig. 12. Convergence time analysis under multiple initial conditions.

为进一步验证所设计控制器在复杂环境下的鲁棒性, 本文引入幅值为 0.1, 频率为 5 rad/s 的正弦型外部扰动作用于响应系统, 其函数表达式为  $d(t) = 0.1 \sin(5t)$ , 该扰动被直接叠加于控制输入, 即实际控制律表示为  $u(t) = u_{\text{nominal}}(t) + d(t)$ , 用于评估同步控制器在存在外部动态扰动情况下的鲁棒性能. 同时其响应系统初值设定为  $x_2(0) = [-4, 6, -5, 3]$ , 如图 13 所示. 结果表明尽管存在外部扰动, 所有误差变量依然在预设时间范围内实现收敛, 收敛速度和收敛精度仅受到微弱影响.

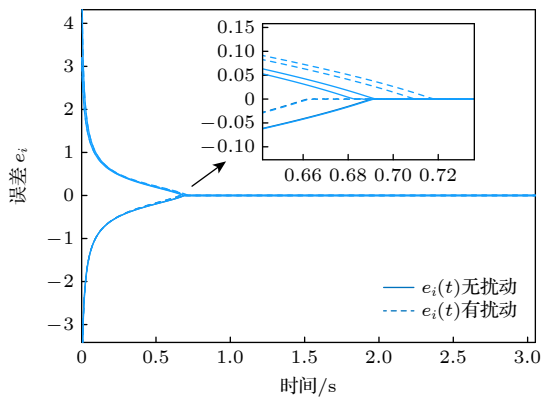


图 13 鲁棒性分析

Fig. 13. Robustness analysis.

上述结果充分验证了本文控制器的核心设计目标, 即实现与初始状态无关的、固定上界的预定义时间同步. 理论上, 预定义时间控制律通过引入非线性幂次项与时间参数耦合, 实现了同步时间仅由预定义参数  $T_{c1}$  与  $T_{c2}$  控制, 而与初始误差无关的特性. 该仿真结果从数值角度有力支撑了该特

性, 增强了控制器在实际应用中面对不确定初始状态或干扰时的适应能力.

## 4 结 论

本文针对仅含单个非线性项的简单忆阻混沌系统开展系统性动力学分析与预定义时间同步控制研究. 该系统具有无穷多不稳定平衡点、丰富的同构与异构多稳态行为, 包括点吸引子、周期吸引子与混沌吸引子, 且数值实验揭示其随参数和初值的复杂演化过程. 更为重要的是, 通过调整忆阻器的内部参数, 可实现对系统状态变量振荡幅度的精确调节, 从而对周期和混沌信号进行有效的调幅控制, 在此复杂动力学基础上, 本文构造了包含线性与双向幂次非线性衰减项的预定义时间滑模面, 并基于 Lyapunov 稳定性理论严格推导了误差系统收敛于预设时间的充分条件. 由此设计的双阶段滑模控制律具备可调同步时间上界, 并能在任意初始扰动下实现快速、无超调的误差抑制. 数值仿真进一步验证了所提方法的高精度与强鲁棒性: 第一阶段迅速将系统误差驱动至滑模面, 第二阶段在预定义时间内完成误差收敛, 且同步过程未出现抖振或长时间过渡. 未来的工作将进一步拓展该类忆阻混沌模型的高维结构, 挖掘其更丰富的非线性动力学特性, 并在此基础上设计适应更广泛应用场景的高性能同步策略.

## 参考文献

- [1] Wang M J, Ding J, Li J H, He S B, Zhang X N, Iu H H C, Li Z J 2024 *Eur. Phys. J. Plus* **139** 64
- [2] Lai Q, Liu Y J, Fortuna L 2024 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Reg. Pap.* **71** 4665
- [3] Luo Y R, Fan C L, Xu C B, Li X Y 2024 *Chaos Soliton. Fract.* **183** 114951
- [4] Lai Q, Liu Y 2025 *Sci. China Technol. Sci.* **68** 1320401
- [5] Lai Q, Qin M H 2025 *J. Guizhou Normal Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **43** 1 (in Chinese) [赖强, 秦铭宏 2025 贵州师范大学学报(自然科学版) **43** 1]
- [6] Yuan Y, Yu F, Tan B H, Huang Y Y, Yao W, Cai S, Lin H R 2025 *Chaos* **35** 013121
- [7] Liu Y, Chen L, Li C D, Liu X, Zhou W H, Li K 2023 *Soft Comput.* **27** 18403
- [8] Ding L N, Xuan M T 2025 *Entropy* **27** 481
- [9] Zhang G Z, Quan X, Liu S 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 240502 (in Chinese) [张贵重, 全旭, 刘嵩 2022 物理学报 **71** 240502]
- [10] He Y, Zhang Y Q, He X, Wang X Y 2021 *Sci. Rep.* **11** 6398
- [11] Zhang B, Liu L 2023 *Mathematics* **11** 2585
- [12] Madani Y A, Aldwoah K, Younis B, Alsharafi M, Osman O, Muflih B 2025 *Sci. Rep.* **15** 14104

- [13] Han J P, Zhou L Q 2024 *Neurocomputing* **610** 128612
- [14] Zhao Z P, Zhou S, Wang X Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230502 (in Chinese) [赵智鹏, 周双, 王兴元 2021 物理学报 **70** 230502]
- [15] Ramamoorthy R, Rajagopal K, Leutcho G D, Krejcar O, Namazi H, Hussain I 2022 *Chaos Soliton. Fract.* **156** 111834
- [16] Beyhan S 2024 *Chaos Soliton. Fract.* **180** 114578
- [17] Geng X T, Feng J W, Zhao Y, Li N, Wang J Y 2023 *Electron. Res. Arch.* **31** 3291
- [18] Lai Q, Wang J 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 180503 (in Chinese) [赖强, 王君 2024 物理学报 **73** 180503]
- [19] Tino N, Niamsup P 2021 *Front. Appl. Math. Stat.* **7** 589406
- [20] Al-Saggaf U M, Bettayeb M, Djennoune S 2022 *Eur. J. Control* **63** 164
- [21] Zhang M J, Zang H Y, Bai L Y 2022 *Chaos Soliton. Fract.* **164** 112745
- [22] Yan S H, Wu X Y, Jiang J W 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **196** 116337
- [23] Jia M M, Cao J W, Bai M M 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 170502 (in Chinese) [贾美美, 曹家伟, 白明明 2024 物理学报 **73** 170502]
- [24] Liu Y, Zhu F 2022 *Comput. Intel. Neurosc.* **2022** 3264936
- [25] Zheng W, Qu S C, Tang Q, Du X N 2025 *J. Vib. Control* **31** 528-538
- [26] Bao B C, Hu W, Xu J P, Liu Z, Zou L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120502 (in Chinese) [包伯成, 胡文, 许建平, 刘中, 邹凌 2011 物理学报 **60** 120502]
- [27] Li C B, Sprott J C 2016 *Optik* **127** 10389
- [28] Lai Q, Qin M H 2025 *J. Electron. Inf. Technol.* **47** 1 (in Chinese) [赖强, 秦铭宏 2025 电子与信息学报 **47** 1]

## Diverse dynamical behaviors and predefined-time synchronization of a simple memristive chaotic system<sup>\*</sup>

LAI Qiang<sup>†</sup> WANG Jun HUANG Daxun

(School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

( Received 18 July 2025; revised manuscript received 9 August 2025 )

### Abstract

The rich dynamical analysis and predefined-time synchronization of simple memristive chaotic systems are of great significance in fully understanding the mechanism of dynamics formation and expanding the potential applications of chaotic systems. A four-dimensional memristive chaotic system with only a single nonlinear term is proposed to reveal various dynamic behaviors under the change of parameters and initial conditions, and to realize effective synchronization control. Based on dissipativity analysis and Lyapunov exponent computation, and combined with bifurcation analysis and multi steady state exploration, it is shown that the system possesses an infinite number of unstable equilibrium points and exhibits homogeneous and heterogeneous multistability, including point attractors, periodic attractors, and chaotic attractors. Moreover, it is found that amplitude modulation of the output signals of the system can be precisely achieved by adjusting internal parameters of the memristor, thus providing a theoretical basis for achieving effective amplitude modulation of periodic and chaotic signals. A predefined-time sliding mode surface with linear and bidirectional power-law nonlinear decay terms is constructed to address synchronization. Sufficient conditions for predefined-time convergence of synchronization errors are derived using Lyapunov stability theory, and a double-stage sliding mode controller with an adjustable upper bound on synchronization time is designed. The resulting control law ensures an adjustable synchronization time bound and rapid error suppression under arbitrary disturbances. Numerical simulations further confirm the effectiveness and robustness of the proposed control scheme, indicating that even under external disturbances or significant variations in initial conditions, the error variables can still converge precisely within the predefined time.

**Keywords:** memristive chaotic system, multistability, amplitude modulation, sliding mode control, predefined-time synchronization

**PACS:** 05.45.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250954

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250954

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62366014).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: laiqiang87@126.com



## 简单忆阻混沌系统的多样动力学分析与预定义时间同步

赖强 王君 黄大勋

### Diverse dynamical behaviors and predefined-time synchronization of a simple memristive chaotic system

LAI Qiang WANG Jun HUANG Daxun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 200501 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250954

CSTR: 32037.14.aps.74.20250954

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250954>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 新型忆阻耦合异质神经元的放电模式和预定义时间混沌同步

Firing modes and predefined-time chaos synchronization of novel memristor-coupled heterogeneous neuron

物理学报. 2024, 73(17): 170502 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240872>

#### 基于滑模趋近律的忆阻混沌系统有限和固定时间同步

Finite and fixed-time synchronization of memristive chaotic systems based on sliding mode reaching law

物理学报. 2024, 73(18): 180503 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241013>

#### 具有无穷共存吸引子的简单忆阻混沌系统的分析与实现

Analysis and implementation of simple four-dimensional memristive chaotic system with infinite coexisting attractors

物理学报. 2022, 71(16): 160502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220593>

#### 一个具有超级多稳定性的忆阻混沌系统的分析与FPGA实现

Analysis and FPGA implementation of memristor chaotic system with extreme multistability

物理学报. 2022, 71(24): 240502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221423>

#### 离散忆阻混沌系统的Simulink建模及其动力学特性分析

Simulink modeling and dynamic characteristics of discrete memristor chaotic system

物理学报. 2022, 71(3): 030501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211549>

#### 分数阶忆阻耦合异质神经元的多稳态及硬件实现

Multistability of fractional-order memristor-coupled heterogeneous neurons and its hardware realization

物理学报. 2022, 71(23): 230501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221525>