

# 真空虚拟阴极测量的绝对误差分析\*

海军<sup>1)2)</sup> 李建泉<sup>1)2)†</sup> 张智娟<sup>1)2)</sup> 王行行<sup>3)</sup>

1) (华北电力大学电子与通信工程系, 保定 071003)

2) (华北电力大学, 河北省电力物联网技术重点实验室, 保定 071003)

3) (平顶山学院电气与机械工程学院, 平顶山 467000)

(2025年9月1日收到; 2025年9月19日收到修改稿)

基于已有的一维虚拟阴极理论模型, 本研究进一步建立了虚拟阴极的绝对误差理论, 并系统分析了热阴极温度、饱和电子发射电流、电子收集电流、杜什曼常数以及电子逸出功等参数对虚拟阴极测量的误差贡献. 研究表明, 影响虚拟阴极势阱深度测量的主要因素与虚拟阴极的强弱密切相关, 当热阴极产生的虚拟阴极较强时, 阴极加热温度的不确定性约有 61% 的概率成为势阱深度测量的主要误差源, 而当虚拟阴极较弱时, 电子电流测量的不确定性约有 39% 的概率成为主要误差源. 此外, 在虚拟阴极的空间宽度测量方面, 对于常见的热阴极材料, 其测量结果的主要误差大概率 (至少 90%) 是由热阴极温度和电子逸出功的不确定性造成的, 只有当虚拟阴极非常微弱时, 电子电流的不确定性是主要误差源.

**关键词:** 虚拟阴极, 绝对误差, 热阴极温度, 热电子发射

**PACS:** 79.40.+z, 79.10.-n, 06.20.Dk

**DOI:** 10.7498/aps.74.20251188

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20251188

## 1 引言

虚拟阴极 (virtual cathode) 是强流电子束在空间电荷效应主导下形成的动态电荷层, 其核心表现为电子束因自场过强而发生自反射的非线性物理现象<sup>[1]</sup>. 虚拟阴极的形成与电子束动能、空间电荷密度及外部电磁场密切相关, 其动态行为涉及复杂的波-粒相互作用<sup>[2-4]</sup>. 虚拟阴极现象是一种广泛存在于各种电子源设备内部的典型的空间电荷效应, 并且与这些设备的性能水平息息相关. 例如, 在高功率微波源中, 虚拟阴极振荡器能够通过周期性的电荷积累与释放产生 GHz 级电磁辐射, 是设备输出微波能量的核心机制, 虚拟阴极的非线性演化可能导致束流发散和能量损失<sup>[5-9]</sup>; 在气体放电

实验中, 虚拟阴极的动态行为与电磁场耦合作用密切相关, 并直接影响等离子体的辐射特性<sup>[10,11]</sup>; 在等离子体的发射探针诊断中, 由于发射探针灯丝附近虚拟阴极的存在, 导致等离子体空间电位的测量结果往往偏离实际结果, 因此虚拟阴极也是发射探针在其空间电势测量过程中最重要的误差源之一<sup>[12-14]</sup>.

实际上, 关于热阴极电子发射所致的虚拟阴极的研究已有一百多年的历史<sup>[15]</sup>. 早在近一个世纪前, Child<sup>[16]</sup> 和 Langmuir 等<sup>[17-19]</sup> 就已经对热阴极电子发射过程中的虚拟阴极现象展开了系统的研究, 并初步建立了虚拟阴极理论模型. 在 Li 等<sup>[20-23]</sup> 近年来的研究中, 建立并完善了基于热阴极电子发射的一维真空虚拟阴极理论模型, 得到了真空环境中虚拟阴极的势阱深度和空间宽度的解析表达式,

\* 中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2024MS116)、平顶山学院博士科研启动基金 (批准号: PXY-BSQD-2024025) 和河南省科技攻关项目 (批准号: 252102230127) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liHjianquan@163.com

并由此实现了对真空虚拟阴极的实验测量. 此外, 数值模拟技术的不断进步也推动了虚拟阴极理论研究的发展. 例如, Kalinin 和 Hramov<sup>[24]</sup> 利用数值模拟技术研究了多速度电子束输入中的虚拟阴极形成过程, 发现虚拟阴极的振荡与输入电子束的速度分布密切相关.

随着高功率器件向小型化、高频化发展, 研究人员对虚拟阴极参数的测量精度要求也日益提高, 误差量化成为制约虚拟阴极工程应用的核心瓶颈. 然而, 在虚拟阴极测量的误差分析方面, 现有研究仍存在很多空白. 首先, 在理论方面, 目前仍没有系统的虚拟阴极误差理论体系; 其次, 热阴极材料特性 (如逸出功、杜什曼常数等) 的实测偏差及其对虚拟阴极参数计算结果的敏感性尚未充分讨论. 受限于虚拟阴极误差理论研究的缺失, 实验上虚拟阴极的准确测量尚未实现, 其工程应用也因此发展缓慢. 基于课题组已经建立的一维虚拟阴极理论, 本研究将继续完成虚拟阴极实验测量的误差分析工作, 结合误差传递原理构建虚拟阴极误差理论, 系统讨论热阴极温度、饱和电子发射电流和电子收集电流、阴极材料特性 (逸出功、杜什曼常数) 等不同参数对虚拟阴极势阱深度与空间宽度测量的误差贡献, 揭示误差主导因素随虚拟阴极大小的动态演变规律, 为今后的真空虚拟阴极准确测量的实现奠定基础.

## 2 虚拟阴极误差理论

基于热阴极电子发射的一维虚拟阴极理论<sup>[20-23]</sup>, 虚拟阴极的势阱深度 ( $\varphi_v - \varphi_c$ ) 和空间宽度 ( $x_v$ ) 可以分别表示为

$$\varphi_v - \varphi_c = \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{I_C}{I_E} \right), \quad (1)$$

$$x_v = \frac{\arccos \left\{ \exp \left[ \frac{e}{2kT} (\varphi_v - \varphi_c) \right] \right\}}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}} \exp \left[ \frac{e(\varphi_v - \varphi_c) - \phi_{\text{work}}}{2kT} \right]}}, \quad (2)$$

其中,  $I_E$  表示热阴极发射的总电子电流, 即饱和电子发射电流;  $I_C$  表示能够克服虚拟阴极, 从而被阳极收集到的电子电流, 即电子收集电流;  $\bar{v}$  表示热阴极表面处所有逸出电子的平均速度;  $\phi_{\text{work}}$  表示阴极的电子逸出功;  $A$  表示阴极材料的杜什曼常数;  $T$  表示热阴极温度;  $\varphi_v$  表示虚拟阴极的最低电势;  $\varphi_c$  表示阴极的表面电势;  $k$  表示玻尔兹曼常数;

$\varepsilon_0$  表示真空介电常数.

将 (1) 式代入 (2) 式, 可以化简得到虚拟阴极空间宽度的另一种表达式, 即:

$$x_v = \frac{\exp \left( \frac{\phi_{\text{work}}}{2kT} \right) \arccos \sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}} \sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}}. \quad (3)$$

分析 (1) 式和 (3) 式, 可以得到在虚拟阴极实际测量过程中可能出现的误差源: 对热阴极温度进行测量会产生温度误差  $\Delta T$ ; 对饱和电子发射电流和电子收集电流的测量会产生电流误差  $\Delta I_E$  和  $\Delta I_C$ ; 对于杜什曼常数  $A$ , 其理论值为  $120 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{K}^{-2}$ , 而在实际测量中, 该参数会因材料特性及环境条件的不同而产生显著差异, 例如钨阴极的杜什曼常数在实际测量中通常约为  $45 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{K}^{-2}$ <sup>[25]</sup>, 因此该参数在虚拟阴极实际测量过程中引入的误差可以表示为  $\Delta A$ ; 对于逸出功  $\phi_{\text{work}}$ , 与杜什曼常数类似, 不同阴极材料的实测逸出功会受材料纯度、表面氧化、微观结构等因素影响, 从而导致其测量值偏离理论值, 由此引入的误差可以表示为  $\Delta \phi_{\text{work}}$ . 上述共 5 个参数在虚拟阴极实际测量过程中可能会引入误差.

### 2.1 势阱深度的绝对误差

观察势阱深度表达式 (1), 有 3 个参数  $T$ ,  $I_C$  和  $I_E$  参与误差传递, 根据误差传递原理<sup>[26,27]</sup>, 分别对 3 个参数求一阶导数, 得到:

$$\frac{\partial (\varphi_v - \varphi_c)}{\partial T} = \frac{k}{e} \ln \left( \frac{I_C}{I_E} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\varphi_v - \varphi_c)}{\partial I_C} = \frac{kT}{eI_C}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\varphi_v - \varphi_c)}{\partial I_E} = \frac{kT}{eI_E}. \quad (6)$$

因此, 虚拟阴极势阱深度的绝对误差可以表示为

$$\begin{aligned} & \Delta (\varphi_v - \varphi_c) \\ &= \left| \frac{k}{e} \ln \left( \frac{I_C}{I_E} \right) \right| \Delta T + \left| \frac{kT}{eI_C} \right| \Delta I_C + \left| \frac{kT}{eI_E} \right| \Delta I_E \\ &= \frac{kT}{e} \left[ \left| \ln \left( \frac{I_C}{I_E} \right) \right| \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta I_C}{I_C} + \frac{\Delta I_E}{I_E} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.2 空间宽度的绝对误差

观察空间宽度表达式 (3), 除了  $T$ ,  $I_C$  和  $I_E$  之

外,  $A$  和  $\phi_{\text{work}}$  的不确定性也会导致虚拟阴极宽度的测量产生相应的误差, 共有 5 个参数参与误差传递. 根据误差传递原理<sup>[26,27]</sup>, 分别对 5 个参数求一阶导数, 可得到:

$$\frac{\partial x_v}{\partial T} = -\frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \left(\frac{1}{2T} + \frac{\phi_{\text{work}}}{kT^2}\right) \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial x_v}{\partial I_C} = -\frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \frac{\sqrt{I_C} + \sqrt{I_E - I_C} \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}{I_C \sqrt{I_E - I_C}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial x_v}{\partial I_E} = \frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \frac{\sqrt{I_C} + \sqrt{I_E - I_C} \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}{I_E \sqrt{I_E - I_C}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial x_v}{\partial A} = -\frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \frac{\arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}{A}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial x_v}{\partial \phi_{\text{work}}} = \frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \frac{\arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}}{kT}. \quad (12)$$

因此, 虚拟阴极空间宽度的绝对误差可以表示为

$$\begin{aligned} \Delta x_v &= \left| \frac{\partial x_v}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial x_v}{\partial I_C} \right| \Delta I_C + \left| \frac{\partial x_v}{\partial I_E} \right| \Delta I_E + \left| \frac{\partial x_v}{\partial A} \right| \Delta A + \left| \frac{\partial x_v}{\partial \phi_{\text{work}}} \right| \Delta \phi_{\text{work}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\phi_{\text{work}}}{2kT}\right)}{\sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}\sqrt{\frac{I_C}{I_E}}} \left[ \left( \frac{\phi_{\text{work}}}{kT} + \frac{1}{2} \right) \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}} \frac{\Delta T}{T} + \left( \frac{\sqrt{I_C}}{\sqrt{I_E - I_C}} + \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}} \right) \frac{\Delta I_C}{I_C} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\sqrt{I_C}}{\sqrt{I_E - I_C}} + \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}} \right) \frac{\Delta I_E}{I_E} + \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}} \frac{\Delta A}{A} + \arccos\sqrt{\frac{I_C}{I_E}} \frac{\Delta \phi_{\text{work}}}{kT} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

进一步对 (7) 式和 (13) 式进行归一化处理: 令  $M = \sqrt{\frac{eAT}{2\varepsilon_0 k\bar{v}}}$ ,  $N = \frac{\phi_{\text{work}}}{kT}$ ,  $Y = \sqrt{\frac{I_C}{I_E}}$ , 则虚拟阴极势阱深度和空间宽度的绝对误差可以分别表示为

$$\Delta(\varphi_v - \varphi_c) = \frac{kT}{e} \left( 2|\ln Y| \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta I_C}{I_C} + \frac{\Delta I_E}{I_E} \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_v &= \frac{1}{2} \frac{\exp(N/2)}{MY} \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \arccos Y \frac{\Delta T}{T} + \left( \frac{Y}{\sqrt{1 - Y^2}} + \arccos Y \right) \frac{\Delta I_C}{I_C} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{Y}{\sqrt{1 - Y^2}} + \arccos Y \right) \frac{\Delta I_E}{I_E} + \arccos Y \frac{\Delta A}{A} + N \arccos Y \frac{\Delta \phi_{\text{work}}}{\phi_{\text{work}}} \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

### 3 误差分析与讨论

观察上述归一化后的  $\Delta(\varphi_v - \varphi_c)$  和  $\Delta x_v$ , 可以发现, 若要分析每个影响因素 ( $T$ ,  $I_C$ ,  $I_E$  和  $\phi_{\text{work}}$ ) 的主次关系, 实际上就是要对比每个因素前的系数大小. 为此, 引入以下函数描述各影响因素前的系数:

$$f_1 = 2|\ln Y|, \quad (16)$$

$$f_2 = (N + 1/2) \arccos Y, \quad (17)$$

$$f_3 = Y/\sqrt{1 - Y^2} + \arccos Y, \quad (18)$$

$$f_4 = \arccos Y, \quad (19)$$

$$f_5 = N \arccos Y, \quad (20)$$

其中,  $Y = \sqrt{I_C/I_E}$ , 表示电子收集电流与饱和电子发射电流之比的平方根, 该数值恒为 0—1 之间, 并且  $Y$  值越小则表明热阴极附近形成的虚拟阴极越大, 反之则意味着虚拟阴极越小. 以上每个函数值都会随着  $Y$  值动态地变化, 进一步绘制关于电流比  $Y$  的图像, 可以通过作图法分别分析虚拟阴极势阱深度误差和空间宽度误差中各影响因素的主次关系.

### 3.1 虚拟阴极势阱深度

首先分析虚拟阴极电势的绝对误差, 有 3 个参数  $T$ ,  $I_C$  和  $I_E$  参与误差传递, 其中加热温度对应系数函数  $f_1$ , 饱和电子发射电流和电子收集电流的对应系数均为常数 1. 在  $Y$  取值范围内绘制  $f_1$  图像, 如图 1 所示. 根据图像, 系数函数  $f_1$  与函数值 1 之间有一个固定交点  $Q_1$ , 对应横坐标值为  $1/\sqrt{e} \approx 0.61$ , 当  $0 < Y < 1/\sqrt{e}$  时,  $f_1 > 1$ ; 当  $Y = 1/\sqrt{e}$  时,  $f_1 = 1$ ; 当  $1/\sqrt{e} < Y < 1$  时,  $f_1 < 1$ . 又因为  $Y$  值可以用来衡量虚拟阴极的大小, 即虚拟阴极会随着  $Y$  值的增大而变小. 由此可以得出关于虚拟阴极势阱深度测量的影响因素结论: 当虚拟阴极较为显著时, 热阴极温度的不确定性是影响势阱深度测量的主要因素; 当虚拟阴极较弱时, 饱和电子发射电流和电子收集电流的不确定性是影响势阱深度测量的主要因素. 两种情况的分界点对应电流比  $Y = 1/\sqrt{e}$ , 即热阴极温度的不确定性是虚拟阴极电势测量的主要影响因素的概率约为 61%, 另有约 39% 概率对应的主要影响因素为电子电流测量的不确定性.

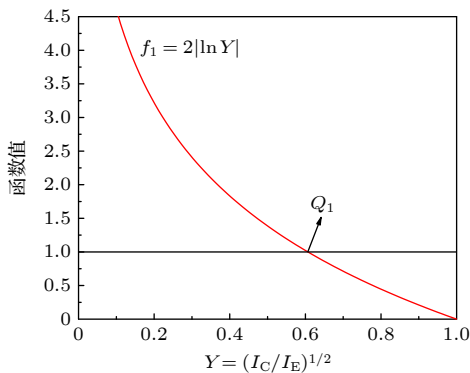


图 1 虚拟阴极电势绝对误差的系数函数值分布  
Fig. 1. Distribution of coefficient function values of the absolute error of the virtual cathode potential.

### 3.2 虚拟阴极空间宽度

其次分析虚拟阴极宽度的绝对误差, 观察表达式 (15) 可以发现: 参数  $T$  对应的系数函数为  $f_2$ ; 参数  $I_E$  和  $I_C$  对应的系数函数为  $f_3$ ; 参数  $A$  对应的系数函数为  $f_4$ ; 参数  $\phi_{\text{work}}$  对应的系数函数为  $f_5$ . 若以最常见的钨阴极为研究对象, 其  $\phi_{\text{work}}$  值约为 4.56 eV, 取常用的工作温度 2200 K, 此时  $N$  值计算结果约为 24, 故满足  $f_2 \approx f_5 > f_4$  且  $f_3 > f_4$ . 因

此,  $f_4$  总是上述系数函数中数值最小的一个, 即杜什曼常数  $A$  是对虚拟阴极宽度测量影响最小的因素. 继续分析  $f_2$ ,  $f_3$  和  $f_5$  之间的函数值大小关系, 并将其与电流比  $Y$  进行作图, 如图 2 所示. 根据图 2 可知, 函数  $f_3$  递增, 而  $f_2$ ,  $f_5$  递减, 假设  $f_2$  与  $f_3$  相交于  $Q_2$ 、 $f_5$  与  $f_3$  相交于  $Q_3$ . 当钨丝加热温度为 2200 K 时, 两交点位置近似重合, 且位置趋于极值 1. 这表明此时影响钨产生的虚拟阴极宽度测量的主要影响因素是热阴极温度和电子逸出功. 鉴于交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置直接决定虚拟阴极宽度的主次影响因素, 扩大钨阴极的工作温度范围从产生可观测的电子发射时的加热温度至其熔点, 即满足 1800—3650 K, 由此计算得到  $N$  值范围约为 14.5—29.4. 此时交点  $Q_2$  和  $Q_3$  附近的  $f_2$ ,  $f_3$  和  $f_5$  之间的函数值分布如图 3 所示. 可以发现, 在钨阴极的整个工作温度范围内, 交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的变化范围高度重合, 且位置均趋于极值 1. 这表明对于钨阴极而言, 绝大多数情况下, 虚拟阴极宽度测量的主要影响因素是热阴极温度和电子逸出功, 只有当虚拟阴极非常微弱时, 电子电流的准确测量成为虚拟阴极宽度的主要影响因素. 总之, 在虚拟阴极实际测量中, 相比于势阱深度, 空间宽度绝对误差的表达式较为复杂, 影响因素更多, 其主次关系的变化情况也更为丰富. 结合图 2 和图 3, 这里通过表 1 来给出相关结论, 即  $Y < Q_3$  时, 虚拟阴极宽度测量的主要影响因素是热阴极温度和电子逸出功; 当  $Q_3 < Y < Q_2$  时, 虚拟阴极宽度测量的主要影响因素是热阴极温度; 只有当  $Q_2 < Y$  时, 虚拟阴极宽度测量的主要影响因素变为电子电流的准确测量.

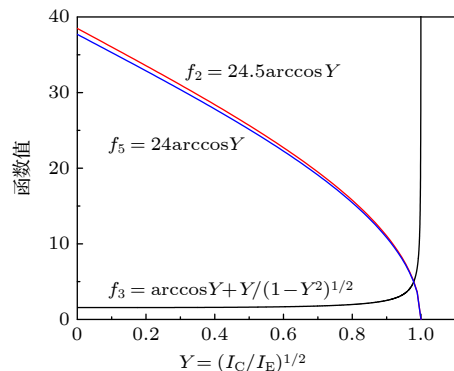


图 2 钨阴极产生的虚拟阴极宽度的绝对误差系数函数值分布  
Fig. 2. Distribution of coefficient function values of the absolute error of the virtual cathode width generated by the tungsten cathode.

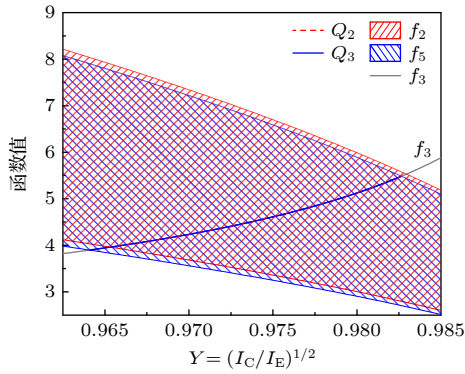


图3 在钨阴极的工作温度范围内, 交点  $Q_2$  和  $Q_3$  附近的系数函数值分布

Fig. 3. Within the operating temperature range of the tungsten cathode, the distribution of coefficient function values near points  $Q_2$  and  $Q_3$ .

表1 钨阴极产生的虚拟阴极宽度的主要影响因素与  $Y$  值之间的关系

Table 1. Relation between the main influencing factors of the virtual cathode width generated by the tungsten cathode and  $Y$  values.

$Y$ 值大小	函数值大小	主要因素
$0 < Y < Q_3$	$f_2 \approx f_5 > f_3 > f_4$	$T$ 和 $\phi_{\text{work}}$
$Q_3 < Y < Q_2$	$f_2 > f_3 > f_5 > f_4$	$T$
$Q_2 < Y < 1$	$f_3 > f_2 \approx f_5 > f_4$	$I_E$ 和 $I_C$

进一步研究交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置变化是否与阴极材料相关, 令  $f_2 = f_3$  或  $f_5 = f_3$ , 分别得到:

$$N - \frac{1}{2} = \frac{Y_{Q_2}}{\sqrt{1 - Y_{Q_2}^2} \arccos Y_{Q_2}}, \quad (21)$$

$$N - 1 = \frac{Y_{Q_3}}{\sqrt{1 - Y_{Q_3}^2} \arccos Y_{Q_3}}. \quad (22)$$

可以发现交点位置只与  $N$  值大小有关, 其中  $Y_{Q_2}$  和  $Y_{Q_3}$  分别表示交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的横坐标位置. 除了钨阴极之外, 再引入几种常见的热阴极材料, 例如氧化物阴极 (BaO) 和钼阴极, 分别计算它们的  $N$  值以及交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置. 查阅相关文献 [25,28]

表2 几种常见热阴极材料的  $N$  值以及交点  $Q_2$  和  $Q_3$  位置的计算结果

Table 2. Calculation results of the  $N$  values of several common thermionic cathode materials, as well as the positions of  $Q_2$  and  $Q_3$ .

阴极材料	$\phi_{\text{work}}/\text{eV}$	$T/\text{K}$	$N = \frac{\phi_{\text{work}}}{kT}$	$Y_{Q_3}$	$Y_{Q_2}$
BaO	1.65	1200—2200	8.7—16.0	0.9384—0.9676	0.9420—0.9686
W	4.56	1800—3650	14.5—29.4	0.9641—0.9827	0.9653—0.9830
Mo	4.24	1700—2890	17.0—28.9	0.9696—0.9823	0.9705—0.9827

可以发现, 氧化物 (BaO) 阴极的电子逸出功为 1.65 eV, 工作温度范围 (从产生可观测的电子发射时的温度至阴极熔点) 最大约为 1200—2200 K; 钨阴极的电子逸出功为 4.24 eV, 工作温度范围最大为 1700—2890 K. 几种常见热阴极材料的  $N$  值以及交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置计算结果如表 2 所列, 可以发现这几种常见热阴极材料的  $N$  值几乎都在 10 以上, 对应两交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置都接近于 1. 其中, 对于氧化物 (BaO) 阴极, 其虚拟阴极宽度测量的主要影响因素约 94% 概率为热阴极温度和电子逸出功, 而对于钨阴极和钼阴极, 这一概率分别对应约为 96% 和 97%. 这意味着对于这 3 种常见的阴极材料, 其虚拟阴极宽度测量的主要影响因素均为热阴极温度和电子逸出功.

进一步增加对热阴极材料的讨论范围, 对所有可能存在的  $N$  值情况进行分析. 根据 (21) 式和 (22) 式, 分别对交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的横坐标位置关于  $N$  值变化进行作图分析, 如图 4 所示. 可以发现, 两交点始终保持  $Y_{Q_3} < Y_{Q_2}$ , 并且随着  $N$  值的增大, 两交点位置都快速接近于极值 1. 此外, 当阴极材料的  $N$  值较小 (小于 5) 时, 交点  $Q_2$  和  $Q_3$  之间会存在较为明显的距离, 且交点的位置对  $N$  值的变化较为敏感; 而当阴极材料的  $N$  值较大时, 交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的间距迅速变小, 且交点的位置几乎不受  $N$  值变化的影响. 故对于理论上可能存在的  $N$  值较小的特殊阴极材料, 其虚拟阴极空间宽度的主要影响因素的分布范围可能会与钨阴极等常见材料有较大的差异, 但虚拟阴极宽度影响因素的先后主次关系是不变的, 即遵循表 1 中给出的先后顺序与主次排序. 总之, 通过对虚拟阴极空间宽度的误差分析可以发现, 在绝大多数情况下, 虚拟阴极空间宽度的主要影响因素是热阴极温度和电子逸出功, 只有当虚拟阴极非常微弱时, 其主要影响因素变为电子电流的准确测量.

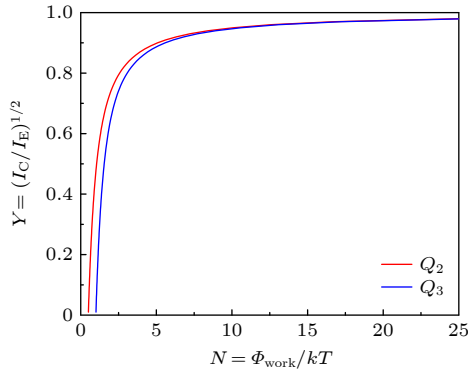
图4 交点  $Q_2$  和  $Q_3$  的位置随  $N$  值的变化

Fig. 4. Positional relationship of  $Q_2$  and  $Q_3$  with respect to the  $N$  values.

## 4 结 论

本研究基于一维虚拟阴极理论模型, 通过多参数耦合误差传递分析, 讨论了各因素对虚拟阴极实际测量的影响程度. 其中, 对虚拟阴极势阱深度的绝对误差分析表明, 势阱深度的测量主要受热阴极温度、饱和电子发射电流和电子收集电流的影响, 当虚拟阴极较弱时, 虚拟阴极电势测量的绝对误差约有 39% 的概率是由电子电流的测量误差造成的; 随着虚拟阴极的显著增强, 加热温度的不确定性约有 61% 概率成为主要误差源. 对虚拟阴极空间宽度的绝对误差分析表明, 空间宽度的测量主要受加热温度、饱和电子发射电流、电子收集电流、杜什曼常数和逸出功的影响, 对于常见的热阴极材料, 如氧化物 (BaO) 阴极、钨阴极和钼阴极, 影响虚拟阴极宽度的测量结果的主要因素分别有约 94%, 96% 和 97% 的概率是热阴极温度和电子逸出功; 只有当虚拟阴极非常微弱时, 电子电流的不确定性才会成为空间宽度测量的主要误差源. 此外, 关于虚拟阴极误差理论的研究也表明, 无论如何, 阴极材料的杜什曼常数的不确定性都不会成为虚拟阴极实验测量的主要影响因素. 总之, 虚拟阴极误差理论的建立及其影响因素的系统分析既补足了真

空虚拟阴极理论的重要缺环, 又能够为今后的虚拟阴极实验测量的设计和执行提供重要的指导意义.

## 参考文献

- [1] Kurkin S A, Koronovski A A, Hramov A E 2009 *Plasma Phys. Rep.* **35** 628
- [2] Kurkin S A, Hramov A E 2009 *Tech. Phys. Lett.* **35** 23
- [3] Kurilenkov Y K, Tarakanov V P, Gus'kov S Y, Oginov A V, Karpukhin V T 2018 *Contrib. Plasma Phys.* **58** 952
- [4] Nebel R A, Stange S, Park J, Taccetti J M, Murali S K, Garcia C E 2005 *Phys. Plasmas* **12** 012701
- [5] Mahto M, Jain P K 2018 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **46** 518
- [6] Kostov K G, Nikolov N A, Spassovsky I P, Spassov V A 1992 *Appl. Phys. Lett.* **60** 2598
- [7] Kostov K G, Nikolov N A 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1034
- [8] Valletti L, Fantauzzi S, Paolo F D 2023 *IEEE Trans. Electron Devices* **70** 3864
- [9] Li L M, Cheng G X, Zhang L, Ji X, Chang L, Xu Q F, Liu L, Wen J C, Li C L, Wan H 2011 *J. Appl. Phys.* **109** 074504
- [10] Su D, Deng L K, Wang B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 235204 (in Chinese) [苏东, 邓立科, 王斌 2014 *物理学报* **63** 235204]
- [11] Wang D Y, Ma J X, Li Y R, Zhang W G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8432 (in Chinese) [王道泳, 马锦绣, 李毅人, 张文贵 2009 *物理学报* **58** 8432]
- [12] Smith J R, Hershkovitz N, Coakley P 1979 *Rev. Sci. Instrum.* **50** 210
- [13] Marek A, Jílek M, Picková I, Kudrna P, Tichý M, Schrittwieser R, Ionita C 2008 *Contrib. Plasma Phys.* **48** 491
- [14] Ye M Y, Takamura S 2000 *Phys. Plasmas* **7** 3457
- [15] Seif M N, Zhou Q F, Liu X T, Balk T J, Beck M J 2022 *IEEE Trans. Electron Devices* **69** 3523
- [16] Child C D 1911 *Phys. Rev.* **32** 492
- [17] Langmuir I 1913 *Phys. Rev.* **2** 450
- [18] Langmuir I 1923 *Phys. Rev.* **21** 419
- [19] Langmuir I, Compton K T 1931 *Rev. Mod. Phys.* **3** 191
- [20] Li J Q, Li S H, Ma H J 2024 *Phys. Scr.* **99** 055974
- [21] Li J Q, Li S H 2024 *J. Appl. Phys.* **136** 105105
- [22] Li J Q, Xie X Y, Li S H, Zhang Q H 2022 *Vacuum* **200** 111013
- [23] Li S H, Li J Q 2021 *Vacuum* **192** 110496
- [24] Kalinin Y A, Hramov A E 2006 *Tech. Phys.* **51** 558
- [25] Li J Q 2024 *Emissive Probes: Principles, Devices and Applications* (Tianjin: Tianjin University Press) pp157–176 (in Chinese) [李建泉 2024 *发射探针: 原理、装置及应用* (天津: 天津大学出版社) 第 157—176 页]
- [26] Zhang J F 2006 *IEEE Trans. Reliab.* **55** 169
- [27] Purwar H, Goutierre E, Guler H, et al. 2023 *J. Phys. Commun.* **7** 025002
- [28] Bekker T B, Rashchenko S V, Seryotkin Y V, Kokh A E, Davydov A V, Fedorov P P 2017 *J. Am. Ceram. Soc.* **101** 450

# Absolute error analysis of vacuum virtual cathode measurement\*

HAI Jun<sup>1)2)</sup> LI Jianquan<sup>1)2)†</sup> ZHANG Zhijuan<sup>1)2)</sup> WANG Hanghang<sup>3)</sup>

1) (*Department of Electronic and Communication Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China*)

2) (*Hebei Key Laboratory of Power Internet of Things Technology, North China Electric Power University, Baoding 071003, China*)

3) (*School of Electrical and Mechanical Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China*)

( Received 1 September 2025; revised manuscript received 19 September 2025 )

## Abstract

The virtual cathode is an important phenomenon in thermionic emission, and it is widely present in various electronic devices and systems such as vacuum tubes, electron guns, high-power microscopes, X-ray tubes, concentrated solar thermionic converters, and emissive probes. Since the virtual cathode can directly affect the performance of these devices, it is of great significance to study the characteristics of the virtual cathode and conduct experimental measurements on it. In our recent research, a one-dimensional model of thermionic emission was established, and the analytical expressions for the potential barrier and the spatial width of the virtual cathode were derived. With the development of virtual cathode theories, measuring the virtual cathode experimentally has become a reality. In this study, based on our one-dimensional theoretical model, the absolute error theory of the virtual cathode is established, and the contributions of different parameters, such as the hot-cathode temperature, the saturated electron emission current, the electron collection current, Dushman constant, and the work function of hot cathodes, to the absolute errors in the virtual cathode measurement are systematically analyzed. The research results show that the main factors affecting the measurement of the virtual cathode potential are closely related to the size of the virtual cathode. When the virtual cathode potential generated by hot-cathodes is strong, the uncertainty of the hot-cathode temperature becomes the main error source, with a probability of about 61% for the potential barrier measurement, but when the virtual cathode is weak, the main factor becomes the uncertainty of the electron current measurement with a probability of about 39%. Besides, when measuring the virtual cathode width, for common hot-cathodes such as oxide (BaO) cathode, tungsten cathode, and molybdenum cathode, the main factors affecting the measurement results are the uncertainties in the hot-cathode temperature and the work function. These uncertainties account for approximately 94%, 96% and 97% of the measurement variability, corresponding to the above three cathodes, respectively. Only when the virtual cathode is very weak, does the uncertainty of the electron current become the main error source for the measurement of the virtual cathode width.

**Keywords:** virtual cathode, absolute error, hot-cathode temperature, thermionic emission

**PACS:** 79.40.+z, 79.10.-n, 06.20.Dk

**DOI:** 10.7498/aps.74.20251188

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20251188

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 2024MS116), the Doctoral Scientific Research Staring Foundation of Pingdingshan University, China (Grant No. PXY-BSQD-2024025), and the Key Science and Technology Program of Henan Province, China (Grant No. 252102230127).

† Corresponding author. E-mail: [liHjianquan@163.com](mailto:liHjianquan@163.com)

## 真空虚拟阴极测量的绝对误差分析

海军 李建泉 张智娟 王行行

### Absolute error analysis of vacuum virtual cathode measurement

HAI Jun LI Jianquan ZHANG Zhijuan WANG Hanghang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 247901 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20251188

CSTR: 32037.14.aps.74.20251188

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20251188>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

热电子发射对钨偏滤器靶板附近磁化鞘层影响的模拟研究

Simulation of effect of thermionic emission on magnetized sheath near target plate of tungsten divertor

物理学报. 2023, 72(15): 159401 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230276>

多功能多元稀土六硼化物 $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{B}_6$ 光吸收及热电子发射机理

Optical absorption and thermionic emission mechanism of multi-functional  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{B}_6$  hexaborides

物理学报. 2021, 70(21): 214204 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211069>

钡钨阴极优化与热电子发射性能

Improvement of barium tungsten cathode and investigation of thermionic emission performance

物理学报. 2022, 71(4): 047901 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211684>

$\text{Sc}_2\text{O}_3$ 掺杂对稀土难熔钇盐阴极热发射性能的影响

Effect of  $\text{Sc}_2\text{O}_3$  doping on thermal emission properties of rare-earth refractory yttrium salt cathode

物理学报. 2025, 74(15): 157901 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250520>

典型二元单晶 $\text{REB}_6$ 的电子结构和发射性能

Electronic structures and emission properties of typical binary single crystal  $\text{REB}_6$

物理学报. 2022, 71(9): 098101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211870>

氧气空心阴极放电模拟

Simulation of hollow cathode discharge in oxygen

物理学报. 2022, 71(2): 025201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211150>