

# 一类分段光滑不连续映像中的边界碰撞分岔和余维分岔\*

邓浩洲 王力可 朱兆瑞 王恒通 屈世显†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710119)

(2025年8月25日收到; 2025年10月19日收到修改稿)

本文研究了一类分段光滑不连续一维映像的动力学, 该映像左支是一线性函数, 右支是指数为  $z$  的幂律函数. 在  $x = 0$  处存在间断  $[\mu, \mu + \delta]$ , 其中  $\mu$  为控制参数. 当周期轨道失稳时, 系统会进入混沌状态. 而不连续性的出现导致了边界碰撞分岔的发生, 可以使稳定的周期轨道转变为混沌状态或者另外一个稳定的周期状态. 在这类转变点的附近, 常常伴随着吸引子共存现象. 此外, 随控制参数减小出现周期递增现象. 得到了求解这类不连续映像在任意参数  $z$  和  $\delta$  下边界碰撞分岔临界控制参数的一般方法, 将其归结为求解无量纲控制参数 ( $\mu/\mu_0$ , 其中  $\mu_0$  为  $\delta = 0$  时的控制参数) 的代数方程, 该方程对于简单的有理数或者较小的整数  $z$ , 可以解析求解; 对于任意实数  $z$ , 可以数值求解. 据此, 解析得到了  $L^{n-1}R$  周期轨道的稳定性和边界碰撞分岔的临界控制参数. 基于稳定性和边界碰撞分岔的解析分析, 获得了双参数  $\mu$ - $\delta$  平面中系统动力学的相平面, 讨论了系统的动力学行为, 发现了三类余维-2 分岔点, 并给出了坐标通式. 同时, 在相平面中还发现了余维分岔点的融合, 构成一类特殊的三相点, 并解析得到其存在的条件.

**关键词:** 不连续映像, 边界碰撞分岔, 稳定性分析, 余维分岔**DOI:** 10.7498/aps.75.20251167**CSTR:** 32037.14.aps.75.20251167

## 1 引言

混沌现象广泛地存在于自然界中, 已经发展成为一个非常重要的学科领域, 取得了许多重要进展. 在这类研究中, 特别是早期, 人们通常关注处处光滑的动力学系统. 可以说, 混沌动力学的许多重要结果都来自对这类系统的研究. 而非光滑动力系统则研究较少. 近年来, 非光滑动力系统研究已经引起国内外学者的重视, 成为一个比较活跃的研究领域<sup>[1-7]</sup>. 在实际系统中, 常常出现由于缓慢积累所引起的急剧变化, 表现出不光滑或者不连续性, 可以用不光滑动力学描述. 非光滑动力学研究已涉及许多系统, 例如冲击振子<sup>[8]</sup>、张弛振子<sup>[9,10]</sup>、

电子电路领域中的转换器<sup>[11-13]</sup>和张弛振荡器<sup>[14]</sup>、生物领域中的神经元放电模型<sup>[15,16]</sup>和流行病模型<sup>[17]</sup>、金融市场中的经济模型<sup>[18]</sup>等. 通常, 这类系统表现出分段光滑的性质. 系统相空间被划分为两个或者多个具有不同动力学特征的子区域, 各个子区域内的映像函数处处光滑, 在这些区域的界面处映像出现不光滑或者不连续<sup>[19-22]</sup>. 当稳定不动点、周期轨道或者混沌轨道与不光滑边界碰撞时, 系统动力学会发生突变, 将这类分岔现象一般地称为边界碰撞分岔<sup>[23-25]</sup>. 不光滑系统中的边界碰撞分岔会导致一系列具有显著新特征的现象<sup>[9,26-31]</sup>.

在非光滑系统中, 一维分段光滑映像是一个重要研究对象, 一直受到研究者的普遍关注. 它相对简单, 易于解析处理, 并且常常展现丰富的动力

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11975144) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [sxqu@snnu.edu.cn](mailto:sxqu@snnu.edu.cn)

学<sup>[6,7,19-21,28,32,33]</sup>. 其中, 有一类受到特别关注的映像, 一般可以表示为

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \mu, & x \leq 0, \\ \beta x^z + \mu + \delta, & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

该映像是一个两分段函数, 左支是线性函数, 右侧是因于为  $z$  的幂律函数. 在  $x = 0$  处出现不光滑或者不连续. 其中,  $\alpha, \beta, \delta$  和  $z$  为系统参数,  $\mu$  为控制参数. 当  $z = 1$  时为分段线性映像, 当  $z \neq 1$  右侧为非线性映像. 当  $\delta = 0$  时, 映像为不光滑连续映像; 而当  $\delta \neq 0$  时, 映像为不连续映像. Nusse 等<sup>[24]</sup> 研究了来源于激光系统的一维分段连续映像, 相当于  $\delta = 0$  时的映像 (1). 发现了由于边界碰撞分岔导致的  $L^{n-1}R$  型的周期递增现象, 解析得到了其稳定性和存在条件; Jain 和 Banerjee<sup>[34]</sup> 研究了一维分段不连续映像, 对于其中的边界碰撞分岔进行了分类, 并给出了用该映像描述一个具有延时控制反馈的升压转换器的实例; Halse 等<sup>[35]</sup> 研究一维分段光滑连续映像在  $z = 3/2$  和  $z = 2$  情况下的边界碰撞分岔以及由此产生的周期递增现象; Hogan 等<sup>[36]</sup> 研究了一类一维分段线性不连续映像, 分析了周期一、周期二及高周期的解; Dutta 和 Banerjee<sup>[37]</sup> 研究了一个在不连续边界具有平方根奇异性的分段光滑映像 (即  $z = 1/2$ ), 发现了一类周期递增破缺现象, 计算了周期递增级联的标度律, 给出了该类映像的微分方程起源; Qin 等<sup>[2]</sup> 研究了一般分段光滑连续映像 (即映像 (1) 中  $\delta = 0$  情况), 分析  $z > 1, z = 1, 0 < z < 1, z = 0$ , 及  $z < 0$  情况下, 边界碰撞分岔、光滑鞍节点分岔的产生条件及边界碰撞分岔. 但是, 在任意  $z$  值和不连续间隔  $\delta$  下, 分段不连续映像系统中边界碰撞分岔的系统研究仍然是一个有待深入的研究课题, 本文将围绕这一问题展开研究.

一般而言, (1) 式定义的分段线性映像可以看作实际系统非光滑映像在不连续点附近的线性近似, 可复现原系统的动力学现象. 然而, 过去的大量工作都是局限于系统单一控制参数下的分岔行为研究. 实际上, 这类系统通常需要多个控制参数来描述其性质, 例如: 对于不光滑动力学广泛存在的开关电路系统, 一般需要电阻、电容和电感三类原件, 最少需要三个参数. 因此, 多参数分岔行为研究就是极其重要的课题<sup>[38]</sup>. 对于一个双参数描述的系统, 其两个系统参数构成一个二维参数平

面, 或称相平面. 无论是光滑还是非光滑分岔, 其分岔临界线就是相平面上的一条曲线, 称为余维-1分岔临界线<sup>[39]</sup>, 它将参数空间分为不同动力学或稳定性的两个区域, 形成所谓相图. 不同余维-1分岔临界线的交点就构成余维-2分岔点, 可将相平面分割为4个不同动力学特征的区域. 这样, 多个余维-1分岔临界线就将相平面分割为多个区域, 就可以得到系统的相图. 显然, 通过建立相图就可以掌握多参数变化情况下所研究系统动力学的全貌, 易于选择特定动力学行为的控制参数. 近年来, 多参数非光滑系统中的余维分岔分析受到研究者的广泛重视<sup>[38-44]</sup>. 在本文研究的系统中, 同时存在光滑 (flip) 分岔和边界碰撞 (fold) 分岔, 具有复杂的动力学图景. 在双参数情况下, 其相互作用会产生更加丰富的动力学现象. 因此, 我们将余维分岔现象也纳入本文的研究对象.

本文第2节的主要内容是稳定性分析和边界碰撞分岔条件的确立, 给出了求解边界碰撞分岔条件的一般方法; 第3节分别给出  $0 < z < 1, z > 1, z < 0$  时的分岔图和双参数相图, 讨论系统的动力学行为, 分析周期窗口余维分岔的临界点; 最后第4节为结论.

## 2 周期轨道的稳定性和边界碰撞分岔机制

本文将映像 (1) 的参数限制为  $0 < \alpha < 1, \beta < 0$ , 并且参数  $z$  和  $\delta$  为任意实数. 在这种情况下, 系统将出现  $L^{n-1}R$  型的周期  $n(n > 2)$  轨道, 其径迹如下:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < 0 < x_n.$$

满足如下迭代关系:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta x_n^z + \mu + \delta, \\ x_2 &= \alpha x_1 + \mu, \\ x_3 &= \alpha^2 x_1 + \alpha \mu + \mu, \\ &\dots \\ x_{n-1} &= \alpha^{n-2} x_1 + \frac{1 - \alpha^{n-2}}{1 - \alpha} \mu, \\ x_n &= \alpha^{n-1} x_1 + \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} \mu. \end{aligned} \quad (2)$$

由上述方程可得  $x_n$  所满足的周期性条件为

$$x_n - \alpha^{n-1}\beta x_n^z = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\mu + \alpha^{n-1}\delta. \quad (3)$$

## 2.1 稳定性分析

由于  $L^{n-1}R$  模式的周期  $n$  轨道在左支迭代  $n-1$  次, 在右支迭代 1 次, 因此其稳定性条件为

$$-1 \leq \alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} \leq 1. \quad (4)$$

当  $z=1$  时, 所考虑的映像是分段线性映像, 是最简单的情况, 已经有很多相关工作, 因此本文不予讨论. 下面分别就  $0 < z < 1$ ,  $z > 1$  和  $z < 0$  三种情形展开讨论.

当  $z > 0$  时,  $\alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} \leq 1$  恒成立. 因此, 稳定条件 (4) 式变为

$$\alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} \geq -1, \quad (5)$$

在临界状态:

$$\alpha^{n-1}\beta x_n^z = -\frac{1}{z}x_n.$$

将上式代入 (3) 式得:

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)x_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\mu + \alpha^{n-1}\delta. \quad (6)$$

当  $0 < z < 1$  时, 由 (5) 式得:

$$x_n \geq (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}},$$

结合 (6) 式可得控制参数的下限为

$$\mu \geq \mu_{n,\text{flip}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n} \left[ \left(1 + \frac{1}{z}\right) (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}} - \alpha^{n-1}\delta \right]. \quad (7)$$

在本文中, 临界控制参数的第一个下标表示周期数, 第二个下标表示分岔类型. 因此,  $\mu_{n,\text{flip}}$  表示周期  $n$  轨道发生 flip 分岔时的临界控制参数, 给出了该周期轨道失稳的下临界控制参数.

当  $z > 1$  时, 由 (5) 式得:

$$x_n \leq (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}},$$

结合 (6) 式可得控制参数的上限为

$$\mu \leq \mu_{n,\text{flip}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n} \left[ \left(1 + \frac{1}{z}\right) (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}} - \alpha^{n-1}\delta \right]. \quad (8)$$

这里,  $\mu_{n,\text{flip}}$  给出了该周期轨道发生 flip 分岔而失稳的上临界控制参数.

当  $z < 0$  时, 由于  $0 < \alpha < 1, \beta < 0$ , 且  $x_n > 0$ , 因此  $\alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} \geq -1$  恒成立. 因此稳定条件 (4) 式变为

$$\alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} \leq 1, \quad (9)$$

在临界状态变为

$$\alpha^{n-1}\beta x_n^z = \frac{1}{z}x_n.$$

将上式代入 (3) 式得:

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)x_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\mu + \alpha^{n-1}\delta. \quad (10)$$

由 (9) 式得:

$$x_n \geq (\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}},$$

将该式代入 (10) 式, 可得控制参数的下限为

$$\mu \geq \mu_{n,\text{fold}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n} \left[ \left(1 - \frac{1}{z}\right) (\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}} - \alpha^{n-1}\delta \right], \quad (11)$$

式中,  $\mu_{n,\text{fold}}$  表示周期轨道失稳的下临界控制参数, 下标 fold 表示 fold 分岔. 至此, 分别得到了  $0 < z < 1$  和  $z > 1$  时,  $L^{n-1}R$  模式周期  $n$  轨道发生 flip 分岔时的临界控制参数, 以及 fold 分岔的临界控制参数, 如 (7) 式、(8) 式和 (11) 式.

## 2.2 边界碰撞分岔机制及其临界条件

所谓边界碰撞分岔, 是指当系统的周期或者混沌吸引子与系统的不光滑边界碰撞时所产生的动力学行为的突变<sup>[24]</sup>. 在这里, 映像在  $x=0$  处出现不连续, 因此存在两个极值点. 将  $x \rightarrow 0^-$  和  $x \rightarrow 0^+$  时函数左右极限点分别标为  $A$  和  $B$ , 如图 1 所示. 随着控制参数的变化, 不动点或者周期轨道点可能与  $A$  点发生碰撞, 也可能与  $B$  点发生碰撞, 两种碰撞都可以产生边界碰撞分岔.

当  $x_{n-1} \rightarrow 0^-$  时, 迭代轨迹与  $A$  点相碰, 将该边界碰撞分岔记为 BC, 图 1(a) 显示了周期三与边界的左极限  $A$  点相碰撞的情形. 该 BC 边界碰撞分岔发生的条件是  $x_{n-1} = 0^-$ , 由此可知  $x_n \leq \mu$ . 因此, 有如下碰撞条件:

$$x_1 \geq \beta\mu^z + \mu + \delta.$$

将此式代入迭代方程 (2) 中  $x_{n-1}$  的表达式, 可以得到控制参数  $\mu$  满足如下方程:

$$\mu + \frac{\beta(1-\alpha)\alpha^{n-2}}{1-\alpha^{n-1}}\mu^z + \frac{(1-\alpha)\alpha^{n-2}}{1-\alpha^{n-1}}\delta \leq 0. \quad (12)$$

当  $\delta=0$  时, 方程 (12) 给出

$$\mu \leq \mu_0 \equiv \left[ \frac{(1-\alpha)(-\beta/\alpha^2)}{1-\alpha^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1-z}} \alpha^{\frac{n}{1-z}}, \quad (13)$$

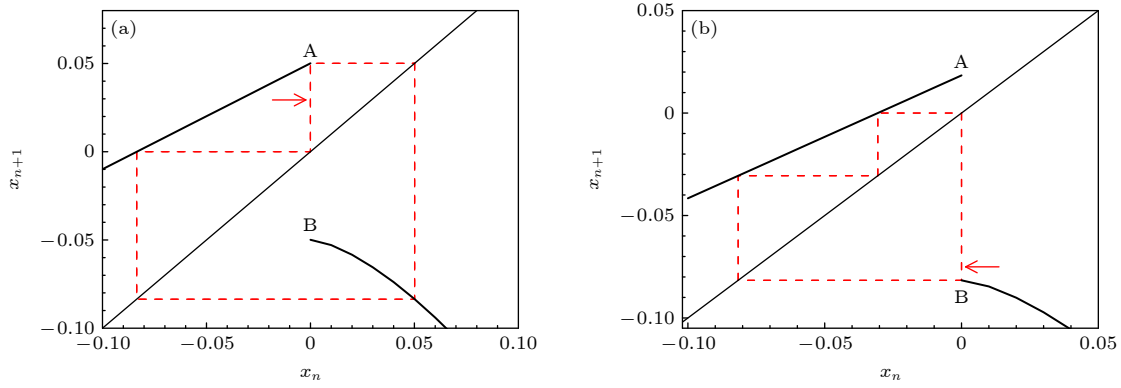


图 1 轨道碰撞到  $x = 0^-$  (a) 和  $x = 0^+$  (b) 时的边界碰撞分岔示意图

Fig. 1. Illustration of the border collision bifurcation occurs at  $x = 0^-$  (a) and  $x = 0^+$  (b), respectively.

这里,  $\mu_0$  为  $\delta = 0$  时 BC 边界碰撞分岔发生时的临界控制参数.

令  $\mu = y\mu_0$ ,  $C = \beta^{-1}\mu_0^{-z}\delta$ , 方程 (12) 简化为

$$y - y^z - C \leq 0. \quad (14)$$

这样, 就得到求解  $\mu_{n,BC^-}$  的一般方法, 即将求解  $\mu_{n,BC^-}$  的问题转化为求解无量纲控制参数  $y$  满足的方程 (14). 对于简单的有理数或者较小的整数  $z$ , 可以解析求解. 而对于任意实数  $z$ , 可以数值求解. 显然, 既不光滑又不连续映像系统中 ( $\delta \neq 0$  时), 边界碰撞分岔的临界控制参数随周期  $n$  变化的渐进行为, 除数值因子  $\tilde{y}(\delta)$  外, 与不光滑但连续映像 ( $\delta = 0$  时) 的一致, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \mu &\leq \mu_{n,BC^-} = \tilde{y}(\delta)\mu_0 \\ &\equiv \tilde{y}(\delta) \left[ \frac{(1-\alpha)(-\beta/\alpha^2)}{1-\alpha^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1-z}} \alpha^{\frac{n}{1-z}}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\tilde{y}(\delta)$  为  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $z$  给定时, 无量纲方程 (14) 的解.

当  $x_n \rightarrow 0^+$  时, 迭代轨迹与  $B$  点相碰, 将此边界碰撞分岔记为  $BC^+$ , 如图 1(b) 所示. 必须指出: 当  $z < 0$  时, 映像函数右支在  $x_n = 0^+$  处趋于无穷大, 不会发生  $BC^+$  边界碰撞分岔. 因此, 这里仅讨论  $z > 0$  的情况. 这时,  $BC^+$  边界碰撞分岔需满足条件  $x_n = 0^+$ . 因此有

$$x_1 \leq \mu + \delta, \quad (16)$$

将上式代入 (2) 式中的  $x_n$  得到

$$x_n = \alpha^{n-1}(\mu + \delta) + \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} \mu \geq 0. \quad (17)$$

由此得到  $x \rightarrow 0^+$  时边界碰撞分岔的下临界控制参数:

$$\mu \geq \mu_{n,BC^+} = \frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha^n} \delta, \quad (18)$$

这里,  $BC^+$  边界碰撞分岔的临界参数条件只与  $\alpha$  和  $\delta$  有关, 与  $\beta$  和  $z$  无关.

### 3 二维相平面中动力学行为的相图和余维分岔

前两节分析了在不同  $z$  取值情况下  $L^{n-1}R$  型周期轨道稳定性条件, 以及边界碰撞分岔发生的临界控制参数. 基于此, 可以得到不同  $\alpha, \beta$  和  $z$  取值下, 二维相平面  $\mu-\delta$  中系统动力学行为的相图, 以及相应的余维分岔. 下面分别就  $0 < z < 1$ ,  $z > 1$  和  $z < 0$  的情形展开讨论.

#### 3.1 $0 < z < 1$ 情形

首先, 讨论当  $x_{n-1} \rightarrow 0^-$  时  $BC^-$  边界碰撞分岔. 事实上, 方程 (15) 给出了  $\mu-\delta$  二维相平面上  $BC^-$  边界碰撞分岔的临界线, 也称为余维-1 分岔曲线. 它将相平面分割为上下两部分, 如图 2(a) 所示, 其上方禁止  $L^{n-1}R$  型周期轨道存在, 下方允许该轨道存在. 此外, 在方程 (12)(或方程 (14)) 两端对  $\delta$  求导, 并令  $d\delta/d\mu = 0$ , 可以发现该临界线在  $\mu-\delta$  相平面上存在极值点, 记为

$$\mu_{BC^- - BC^-} = \mu_0 z^{\frac{1}{1-z}}, \quad (19a)$$

$$\delta_{BC^- - BC^-} = \beta \mu_0^z (z - 1) z^{\frac{z}{1-z}}. \quad (19b)$$

显然,  $\mu_{BC^- - BC^-}$  将  $BC^-$  边界碰撞分岔的临界线 (图 2(a) 中的红色曲线) 分割为两部分, 红色方框标出在该处的极值点. 因此, 当  $\delta$  给定时, 在以  $\mu$  为控制参数的分岔图中, 存在两个可能的  $BC^-$  边界

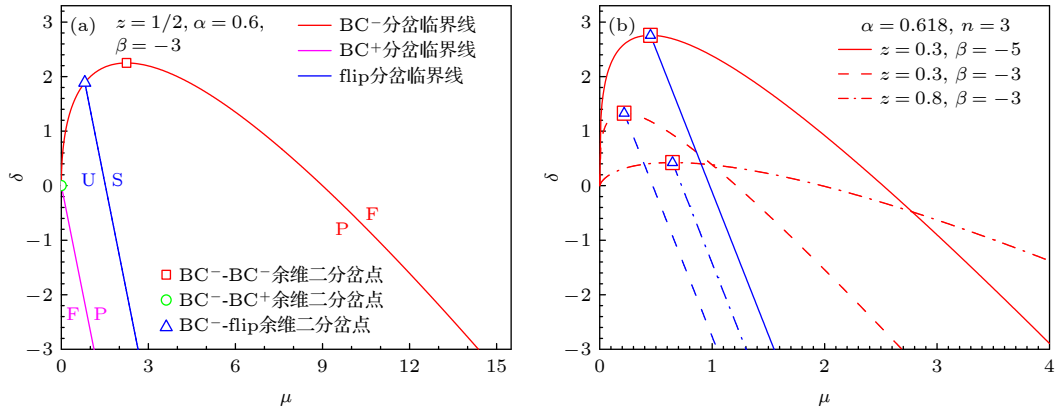


图 2  $\mu$ - $\delta$  相平面中  $L^{n-1}R$  周期轨道的分岔临界线 (a) 临界线  $n = 2, \alpha = 0.6$ ; (b) 临界线  $n = 3, \alpha = 0.618$

Fig. 2. Critical curves for bifurcations of  $L^{n-1}R$  periodic orbits in  $\mu$ - $\delta$ : (a) Critical curves  $n = 2, \alpha = 0.6$ ; (b) critical curves  $n = 3, \alpha = 0.618$ .

碰撞临界控制参数, 即  $\mu \geq \mu'_{n,BC^-}$  和  $\mu \leq \mu_{n,BC^-}$ . 当  $\mu$  和  $\delta$  都改变时, 它们在相平面上画出两条  $BC^-BC^-$  边界碰撞分岔的临界线. 该两临界线在  $(\mu_{BC^-BC^-}, \delta_{BC^-BC^-})$  处交汇, 形成  $BC^-BC^-$  余维-2 分岔. 在该余维-2 分岔点上, 两个  $BC^-$  临界值相等. 在其左右,  $\delta_{BC^-BC^-}$  随  $\mu$  呈相反的变化趋势, 将分别给出固定  $\delta$  情形下分岔图中  $\mu$  的下临界和上临界点.

其次, 讨论  $BC^+$  边界碰撞分岔. 当  $\mu$  和  $\delta$  都改变时, 方程 (18) 给出了该边界碰撞分岔的临界曲线, 如图 2(a) 中  $BC^-$  边界碰撞分岔临界线下方左侧的紫色直线所示. 该临界线右侧为  $L^{n-1}R$  周期轨道允许区 (图中用 P 标识), 左侧为禁止区 (图中用 F 标识). 它与  $BC^-$  分岔的临界线相交于  $(\mu_{BC^-BC^+} = 0, \delta_{BC^-BC^+} = 0)$  点 (用绿色圆圈标记), 形成  $BC^-BC^+$  余维-2 分岔. 在该余维-2 分岔点,  $BC^-$  和  $BC^+$  两种边界碰撞分岔同时发生, 即出现双分岔 [45], 要求  $\mu = 0, \delta = 0$ . 系统参数沿  $BC^-$  分岔临界线的切线方向出现  $BC^+$  分岔, 而沿  $BC^+$  分岔临界线的切线方向出现  $BC^-$  分岔.

最后, 讨论  $L^{n-1}R$  周期轨道的稳定性 (或光滑分岔). 由于  $0 < z < 1$ , 所以仅存在 flip 分岔, 其临界线由方程 (7) 确定. 当  $\mu$  和  $\delta$  都改变时, 该方程给出了该光滑分岔的临界线, 如图 2(a) 中  $BC^-$  边界碰撞分岔临界线下方右侧的蓝色直线所示. 在相平面上, 该曲线构成了余维-1 分岔曲线, 其右侧为  $L^{n-1}R$  周期轨道稳定的区间 (图中用 S 标识), 左侧为其不稳定区间 (图中用 U 标识). 它与  $BC^-$  边界碰撞分岔的临界线相交, 形成  $BC^-flip$  余维-2 分岔, 交点坐标记为  $(\mu_{BC^-flip}, \delta_{BC^-flip})$  (用蓝色

三角形标记), 可通过碰撞的临界条件  $x_n = \mu$  和临界稳定性条件 (5) 得到, 即

$$\mu_{BC^-flip} = (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}}, \quad (20a)$$

$$\delta_{BC^-flip} = \beta (-\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}} \left[ \mu_0^{z-1} + (\alpha^{n-1}\beta z)^{-1} \right]. \quad (20b)$$

在该余维-2 分岔点,  $BC^-$  和 flip 两种分岔临界线相交, 出现双分岔. 系统参数沿  $BC^-$  分岔临界线的切线方向出现 flip 分岔, 而沿 flip 分岔临界线的切线方向出现  $BC^-$  分岔.

需要指出的是, 在特殊的映像参数下, 会出现  $BC^-flip$  余维-2 分岔点与  $BC^-BC^-$  余维-2 分岔点重合的情况. 其重合点实际上是三条临界线的交点, 称其为三相点. 将交点坐标 (19) 式代入 flip 分岔的临界控制参数 (7) 式中, 可以得到:

$$\alpha^n - 2\alpha + 1 = 0. \quad (21)$$

该关系仅由周期数  $n$  和  $\alpha$  确定, 与其他参数无关. 例如: 当  $n = 3$  时,  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ , 如图 2(b) 所示, 红色方框和蓝色三角重合.

基于上述分析可知, 在  $0 < z < 1$  情形下, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道允许的参数区域是由 flip 分岔临界线和  $BC^-$  边界碰撞分岔临界线在  $\mu$ - $\delta$  参数空间围成的区域. 图 3(a) 中不同颜色表示  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  周期轨道的稳定区域. 这里,  $R$  周期轨道是一个特殊存在, 由于它是映像在右侧的一个不动点, 因此不可能出现  $BC^-$  边界碰撞分岔. 在任何不连续间隔  $\delta$  下, 只要将控制参数  $\mu$  选择在 flip 分岔临界线 (图中的灰色区域下边沿的蓝色虚线) 右侧, 该不动点总会存在, 如图 3(c), (d) 所示. 此外, 在相

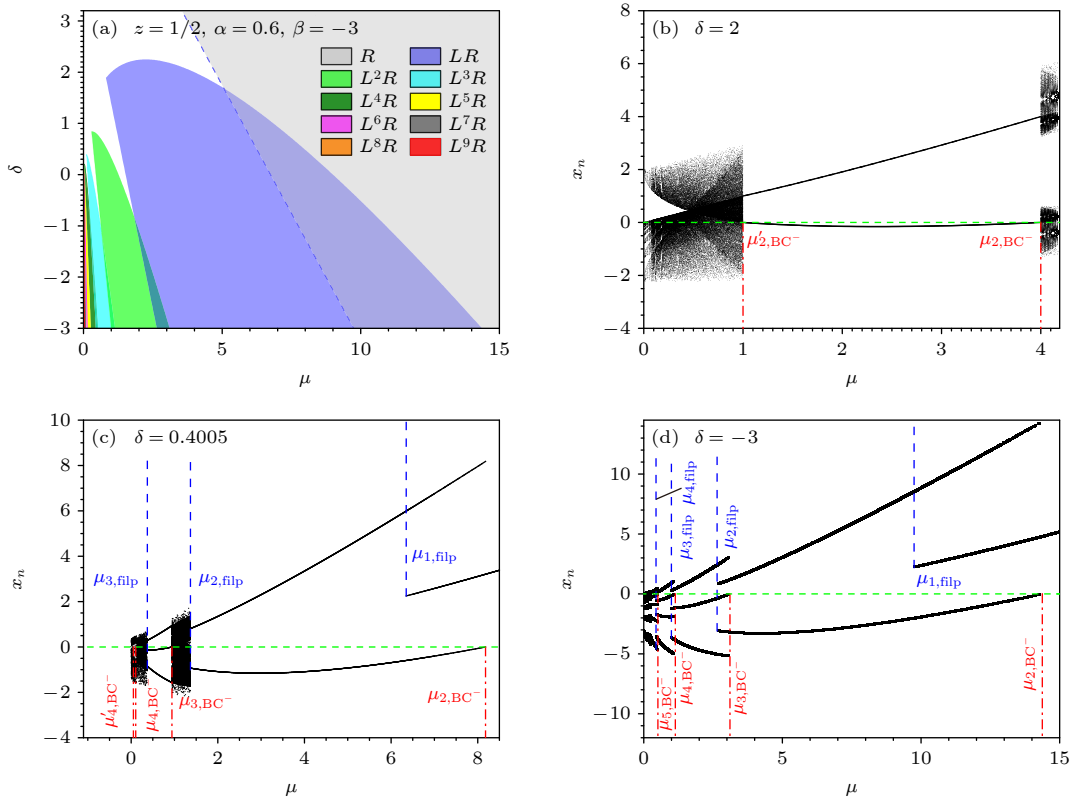


图 3  $z = 1/2, \alpha = 0.6, \beta = -3$  时,  $\mu$ - $\delta$  相平面上  $L^{n-1}R$  周期轨道分岔临界线和分岔图 (a)  $\mu$ - $\delta$  相平面上分岔临界线,  $L^{n-1}R$  稳定周期轨道存在区域. (b)–(d) 不同  $\delta$  取值时的分岔图. 绿色水平虚线标识不连续边界, 蓝色和红色和粉红色竖直线分别标识 flip 分岔和 BC<sup>-</sup> 边界碰撞分岔临界控制参数的解析值  $\mu_{n,flip}$  和  $\mu_{n,BC^-}$

Fig. 3. Critical bifurcation curve of period  $L^{n-1}R$  and bifurcation diagrams when  $z = 1/2, \alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ : (a) Critical bifurcation curve in the  $\mu$ - $\delta$  plane. The regions where the stable  $L^{n-1}R$  orbits exist. (b)–(d) Bifurcation diagrams for different  $\delta$ . The green dashed horizontal lines mark the discontinuous border of the map. The vertical dashed-lines of blue and red colors indicate the analytical values  $\mu_{n,flip}$  and  $\mu_{n,BC^-}$  of the critical control parameters for the flip and BC<sup>-</sup> border collision bifurcations, respectively.

图中还可以观察到不同周期的稳定区间存在交叠情况, 表明在分岔图中应该能观察到吸引子共存现象. 下面将讨论几个典型间隔  $\delta$  时系统的分岔行为.

当  $\delta_{BC^- - flip} \leq \delta < \delta_{BC^- - BC^-}$ , 且  $\mu_{BC^- - flip} < \mu_{BC^- - BC^-}$  时, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于区间  $[\mu'_{n,BC^-}, \mu_{n,BC^-}]$ , 在边界发生 BC<sup>-</sup> 边界碰撞分岔转变到混沌或者其他周期轨道. 如图 3(b) 所示,  $LR$  周期轨道在区间  $[\mu'_{2,BC^-}, \mu_{2,BC^-}]$  内稳定, 在区间两端经边界碰撞分岔转变为混沌.

当  $\delta_{BC^- - flip} \leq \delta < \delta_{BC^- - BC^-}$ , 且  $\mu_{BC^- - flip} \geq \mu_{BC^- - BC^-}$  时, 在区间  $[\mu'_{n,BC^-}, \mu_{n,BC^-}]$  仅存在不稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道. 如图 3(c) 中  $[\mu'_{4,BC^-}, \mu_{4,BC^-}]$  区间内的不稳定  $L^3R$  周期轨道周期 (灰色虚线).

当  $0 \leq \delta < \delta_{BC^- - flip}$  时, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于区间  $[\mu_{n,flip}, \mu_{n,BC^-}]$ , 在边界发生 flip 和 BC<sup>-</sup> 边界碰撞分岔转变到混沌或者其他周期轨道. 如图 3(c) 所示,  $LR$  周期轨道稳定地存在于  $[\mu_{2,flip},$

$\mu_{2,BC^-}]$  区间, 在其左侧经边界 flip 分岔进入混沌, 在其右侧经边界碰撞分岔转变为周期 1 轨道;  $L^2R$  周期轨道稳定地存在于  $[\mu_{3,flip}, \mu_{3,BC^-}]$  区间, 在其左右两侧经边界碰撞分岔进入混沌. 不稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于  $[\mu'_{n,BC^-}, \mu_{n,flip}]$  内.

当  $\delta < 0$  时, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于区间  $[\mu_{n,flip}, \mu_{n,BC^-}]$  内, 如图 3(d) 所示,  $LR, L^2R, L^3R$  周期轨道分别稳定地存在于  $[\mu_{2,flip}, \mu_{2,BC^-}], [\mu_{3,flip}, \mu_{3,BC^-}]$  和  $[\mu_{4,flip}, \mu_{4,BC^-}]$  区间, 在区间边界转变为其他周期. 这里, 随  $\mu$  减少形成了周期递增序列, 直到  $\mu \rightarrow 0$  时出现无穷周期轨道. 相邻分岔临界值围成的区间, 例如  $[\mu_{n-1,flip}, \mu_{n,BC^-}]$  内, 出现周期轨道  $L^{n-2}R$  和  $L^{n-1}R$  共存. 不稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于  $[\mu_{n,BC^+}, \mu_{n,flip}]$  内. 图 3(a), (c) 和 (d) 相应的分岔临界值见表 1, 这些解析结果与数值结果很好地符合.

表 1  $z = 1/2$ ,  $\alpha = 0.6$  和  $\beta = -3$  时, 三种分岔的临界控制参数

Table 1. Critical control parameters for three kinds of bifurcations when  $z = 1/2$ ,  $\alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ .

$\delta$	$n$	$\mu_{n,BC^+}$	$\mu'_{n,BC^-}$	$\mu_{n,BC^-}$	$\mu_{n,flip}$
2	1	—	—	—	4.75000
2	2	—	1.00000	4.00000	—
0.4005	1	—	—	—	6.3495
0.4005	2	—	0.01961	8.17939	1.36856
0.4005	3	—	0.02396	0.94129	0.37277
0.4005	4	—	0.05157	0.10493	—
-3	1	3.00000	—	—	9.75000
-3	2	1.12500	—	14.3739	2.64375
-3	3	0.551020	—	3.10847	0.997347
-3	4	0.297794	—	1.13912	0.442522
-3	5	0.168633	—	0.510583	0.217806
-3	6	0.0978786	—	0.253545	0.115003

### 3.2 $z > 1$ 情形

当  $z > 1$  时,  $L^{n-1}R$  周期轨道边界碰撞分岔的临界线与 3.1 节的情况类似, 只是 BC 边界碰撞分岔临界线变为上凹. 而 flip 分岔临界线的左侧为不稳定区, 右侧为稳定区, 如图 4(a) 所示. 两条 BC 边界碰撞分岔临界线  $\mu'_{n,BC^-}$  和  $\mu_{n,BC^-}$  相汇于极值处 (用红色方框标记), 形成 BC<sup>-</sup>-BC<sup>-</sup> 余维-2 分岔, 分岔点记为  $(\mu_{BC^- - BC^-}, \delta_{BC^- - BC^-})$ , 由 (19) 式确定. BC<sup>+</sup> 分岔与 BC<sup>-</sup> 分岔的临界线相交于  $(\mu = 0, \delta = 0)$  点, 形成 BC<sup>-</sup>-BC<sup>+</sup> 余维-2 分岔; flip 分岔与 BC<sup>-</sup> 分岔的临界线相交, 形成 BC<sup>-</sup>-flip 余维-2 分岔, 其交点坐标  $(\mu_{BC^- - flip}, \delta_{BC^- - flip})$  由 (20) 式确定.

此外, 这里也会出现 BC<sup>-</sup>-BC<sup>-</sup> 和 BC<sup>-</sup>-flip 余维-2 分岔点重合的情况, 即所谓的三相点. 其满足的条件与  $0 < z < 1$  相同, 由 (21) 式确定.

鉴于上述性质, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在区间是由 BC<sup>-</sup>, BC<sup>+</sup> 边界碰撞分岔和 flip 分岔围成的区域. 图 4(b) 中不同颜色表示周期  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  时的稳定区域. 需要指出, 由于  $R$  周期轨道是映像在右侧的一个不动点, 因此不可能出现 BC<sup>-</sup> 边界碰撞分岔, 但是可以出现 BC<sup>+</sup> 边界碰撞分岔. 在任何不连续间隔  $\delta$  下, 只要将控制参数  $\mu$  介于 BC<sup>+</sup> 边界碰撞分岔和 flip 分岔临界线之间, 即区间  $[\mu_{1,BC^+}, \mu_{1,flip}]$ , 该不动点总会存在, 见图 5(a), (b). 此外, 还可以看到不同周期轨道稳定区域交叠的情形, 表明存在吸引子共存的现象. 下面将讨论几种典型间隔  $\delta$  下, 系统的分岔行为.

首先, 考虑  $\delta_{BC^- - flip} > 0$  情形 (仅存在于  $LR$  周期轨道). 当  $0 \leq \delta < \delta_{BC^- - flip}$  时, 稳定的  $LR$  周期轨道存在于区间  $[\mu_{2,BC^-}, \mu_{2,flip}]$ , 如图 5(a) 中蓝实线所示. 当  $\delta_{BC^- - BC^-} \leq \delta < 0$  时, 如图 5(b) 所示, 稳定的  $LR$  周期轨道 (图中的蓝色实线) 分别出现在  $[\mu_{2,BC^+}, \mu'_{2,BC^-}]$  和  $[\mu_{2,BC^-}, \mu_{2,flip}]$  区间. 当  $\delta < \delta_{BC^- - BC^-}$  时,  $LR$  周期轨道存在于  $[\mu_{2,BC^+}, \mu_{2,flip}]$  区间, 如图 5(c) 所示.

其次, 考虑  $\delta_{BC^- - flip} < 0$ , 且  $\mu_{BC^- - flip} > \mu_{BC^- - BC^-}$  情形. 当  $\delta_{BC^- - flip} \leq \delta < 0$  时, 稳定的周期  $L^{n-1}R$  轨道存在于  $[\mu_{n,BC^+}, \mu'_{n,BC^-}]$ . 例如: 在图 5(b) 中, 稳定的周期  $L^2R$  轨道存在于  $[\mu_{3,BC^+}, \mu'_{3,BC^-}]$ . 当  $\delta_{BC^- - BC^-} \leq \delta < \delta_{BC^- - flip}$  时, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道分别出现  $[\mu_{n,BC^+}, \mu'_{n,BC^-}]$  和  $[\mu_{n,BC^-}, \mu_{n,flip}]$  区间.

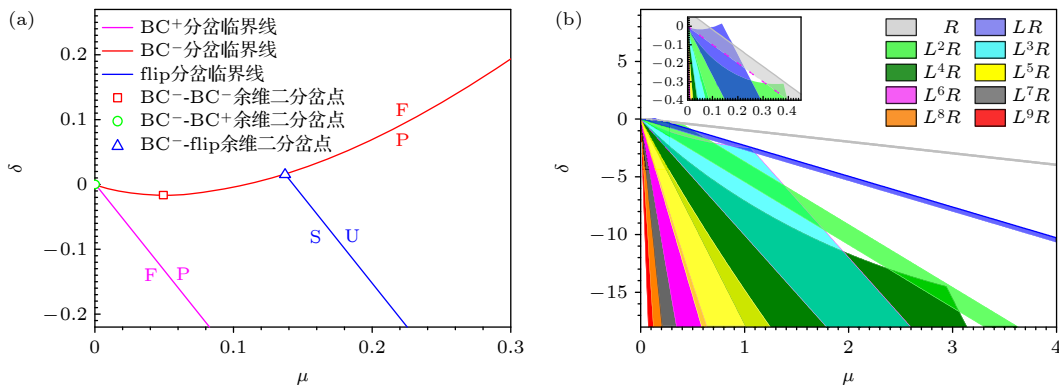


图 4  $\mu$ - $\delta$  相平面中  $L^{n-1}R$  周期轨道的分岔临界线 ( $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = -3$ ) (a) 临界线  $n = 2$ ; (b)  $L^{n-1}R$  周期轨道稳定存在区域

Fig. 4. Critical curves for bifurcations of  $L^{n-1}R$  periodic orbits in  $\mu$ - $\delta$  phase plain when  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ : (a) Critical curves  $n = 2$ ; (b) the regions where the stable  $L^{n-1}R$  orbits exist.

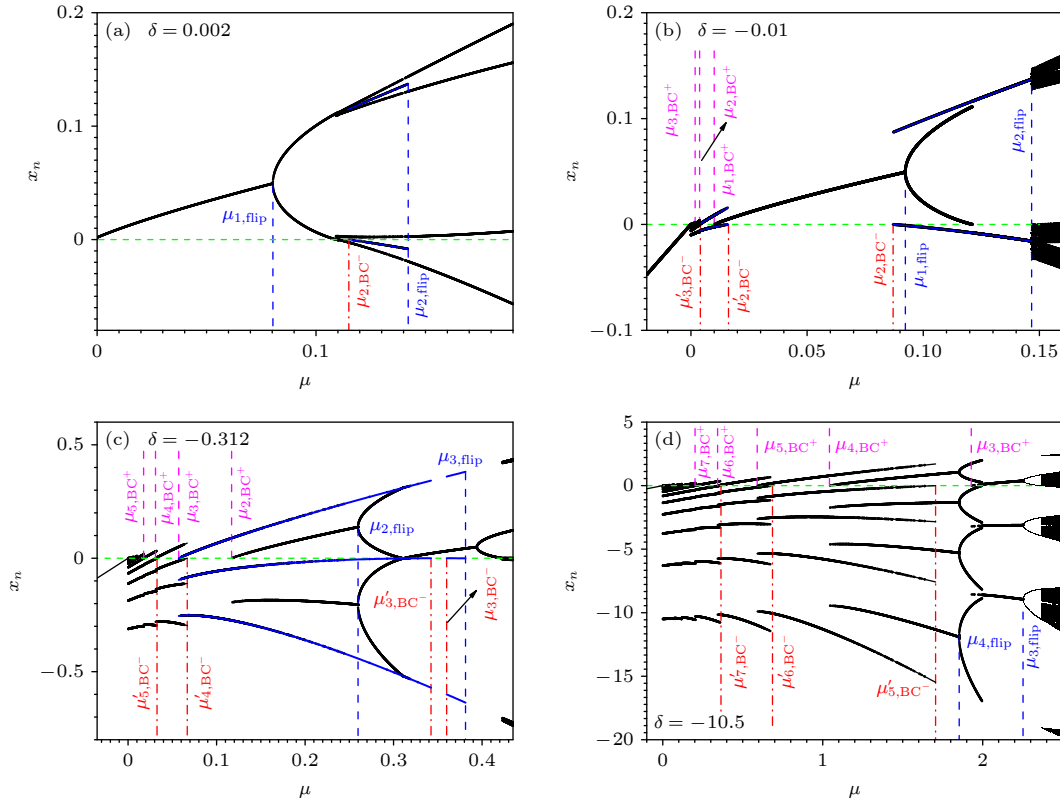


图 5  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = -3$ ,  $\delta$  取值不同时的分岔图. 绿色水平虚线标识不连续边界, 蓝色、红色和粉红色竖直虚线分别标识 flip 分岔、BC 和 BC<sup>+</sup> 边界碰撞分岔临界控制参数的解析值  $\mu_{n,\text{flip}}$ ,  $\mu_{n,\text{BC}^-}$  和  $\mu_{n,\text{BC}^+}$

Fig. 5. Bifurcation diagrams for different  $\delta$  when  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ . The green dashed horizontal lines mark the discontinuous border of the map. The vertical dashed-lines of blue, red and magenta colors indicate the analytical values  $\mu_{n,\text{flip}}$ ,  $\mu_{n,\text{BC}^-}$  and  $\mu_{n,\text{BC}^+}$  of the critical control parameters for the flip, BC<sup>-</sup> and BC<sup>+</sup> border collision bifurcations, respectively.

例如: 图 5(c) 中的两个  $L^2R$  周期轨道, 分别存在于  $[\mu_{3,\text{BC}^+}, \mu'_{3,\text{BC}^-}]$  和  $[\mu_{3,\text{BC}^-}, \mu_{3,\text{flip}}]$  区间. 当  $\delta < \delta_{\text{BC}^- - \text{BC}^-}$  时, 稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道出现在  $[\mu_{n,\text{BC}^+}, \mu_{n,\text{flip}}]$  区间, 如图 5(d) 中的  $L^2R$  和  $L^3R$  周期轨道, 它们分别存在于  $[\mu_{3,\text{BC}^+}, \mu_{3,\text{flip}}]$  和  $[\mu_{4,\text{BC}^+}, \mu_{4,\text{flip}}]$  区间.

最后, 考虑  $\delta_{\text{BC}^- - \text{flip}} < 0$ ,  $\mu_{\text{BC}^- - \text{flip}} \leq \mu_{\text{BC}^- - \text{BC}^-}$  情形. 当  $\delta_{\text{BC}^- - \text{flip}} \leq \delta < 0$  时, 稳定的周期  $L^{n-1}R$  轨道存在于  $[\mu_{n,\text{BC}^+}, \mu'_{n,\text{BC}^-}]$ . 例如: 在图 5(c) 中, 稳定的周期  $L^3R$  和  $L^4R$  轨道存在于  $[\mu_{4,\text{BC}^+}, \mu'_{4,\text{BC}^-}]$  和  $[\mu_{5,\text{BC}^+}, \mu'_{5,\text{BC}^-}]$ ; 在图 5(d) 中, 稳定的周期  $L^4R$ ,  $L^5R$  和  $L^6R$  轨道存在于  $[\mu_{5,\text{BC}^+}, \mu'_{5,\text{BC}^-}]$ ,  $[\mu_{6,\text{BC}^+}, \mu'_{6,\text{BC}^-}]$  和  $[\mu_{7,\text{BC}^+}, \mu'_{7,\text{BC}^-}]$  区间. 当  $\delta < \delta_{\text{BC}^- - \text{flip}}$  时, 稳定的周期  $L^{n-1}R$  轨道存在于  $[\mu_{n,\text{BC}^+}, \mu'_{n,\text{flip}}]$ . 例如: 在图 5(d) 中, 稳定的周期  $L^2R$  和  $L^3R$  分别存在于区间  $[\mu_{3,\text{BC}^+}, \mu'_{3,\text{flip}}]$  和  $[\mu_{4,\text{BC}^+}, \mu'_{4,\text{flip}}]$ . 由图 5 可以观察到周期递增和吸引子共存的现象. 相应分岔临界值见表 2, 理论结果和数值结果很好地符合.

### 3.3 $z < 0$ 情形

由于当  $x \rightarrow 0^+$  时, 映像的右支发散, 且  $\alpha^{n-1}z \times \beta x_n^{z-1} \geq -1$  恒成立, 所以不存在 BC<sup>+</sup> 边界碰撞分岔和 flip 分岔. 只有 fold 分岔和 BC 边界碰撞分岔. 由 (11) 式和 (15) 式可分别在  $\mu$ - $\delta$  相平面中画出  $n = 2, 3, 4, \dots, 10$  时,  $L^{n-1}R$  周期轨道的 fold 分岔和 BC 边界碰撞分岔的临界线. 在图 6 中, 分别用蓝色和红色曲线表示. 由图可知, fold 分岔和 BC 边界碰撞分岔的临界线相切, 形成 BC<sup>-</sup>-fold 余维-2 分岔. 分岔点记为 BC<sup>-</sup>-fold. 结合边界碰撞条件  $x_n \leq \mu$  和 fold 分岔的临界条件  $\alpha^{n-1}z\beta x_n^{z-1} = 1$ , 可得到该切点坐标, 即

$$\begin{cases} \mu_{\text{BC}^- - \text{fold}} = (\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}}, \\ \delta_{\text{BC}^- - \text{fold}} = \\ \beta (\alpha^{n-1}\beta z)^{\frac{1}{1-z}} \left[ \mu_0^{z-1} - (\alpha^{n-1}\beta z)^{-1} \right]. \end{cases} \quad (22)$$

由上述两临界线围成的区域为这类周期轨道稳定存在的区域, 图中用彩色标出. 当  $\delta \leq \delta_{\text{BC}^- - \text{fold}}$  时,

稳定的  $L^{n-1}R$  周期轨道存在于区间  $[\mu_{n,\text{fold}}, \mu_{n,\text{BC}^-}]$  内. 在此区间以外, 这类周期轨道被禁止, 系统转变为混沌或者其他类型的周期运动.

表 2  $z = 3/2$ ,  $\alpha = 0.6$  和  $\beta = -3$  时, 三种分岔的临界控制参数

Table 2. Critical control parameters for three kinds of bifurcations when  $z = 3/2$ ,  $\alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ .

$\delta$	$n$	$\mu_{n,\text{BC}^+}$	$\mu'_{n,\text{BC}^-}$	$\mu_{n,\text{BC}^-}$	$\mu_{n,\text{flip}}$
0.002	1	—	—	—	0.08031
0.002	2	—	—	0.11501	0.14214
-0.01	1	0.01	—	—	0.0923
-0.01	2	0.00375	0.01617	0.08705	0.14664
-0.01	3	0.00184	0.00404	—	—
-0.01	4	0.000993	0.001882	—	—
-0.01	...	...	...	...	...
-0.312	1	0.312	—	—	0.39431
-0.312	2	0.117	—	—	0.25989
-0.312	3	0.05731	0.34237	0.36	0.38132
-0.312	4	0.03097	0.06682	—	—
-0.312	5	0.01754	0.03273	—	—
-0.312	...	...	...	...	...
-10.5	3	1.92857	—	—	2.25258
-10.5	4	1.04228	—	—	1.85297
-10.5	5	0.59022	1.70563	—	—
-10.5	6	0.34258	0.68604	—	—
-10.5	7	0.2016	0.36408	—	—
-10.5	...	...	...	...	...

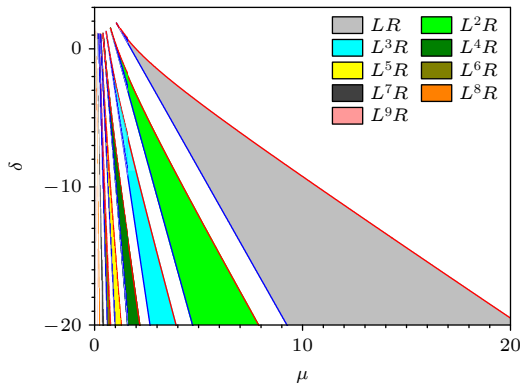


图 6  $\mu$ - $\delta$  相平面中  $L^{n-1}R$  周期的分岔曲线, 其中,  $z = -0.6$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = -3$ . 彩色区域为周期轨道稳定区域, 其蓝色左边界为 fold 分岔的临界线  $\mu_{n,\text{fold}}$ , 其红色右边界为碰撞分岔临界线  $\mu_{n,\text{BC}^-}$ , 区间外为禁止区域

Fig. 6. Critical bifurcation curves in phase space  $\mu$ - $\delta$ , where  $z = -0.6$ ,  $\alpha = 0.6$  and  $\beta = -3$ . The stable  $L^{n-1}R$  periodic orbits are permitted in the colored areas, in which the blue-lines and the red-lines mark the critical curves  $\mu_{n,\text{fold}}$  and  $\mu_{n,\text{BC}^-}$  of the fold and border collision bifurcations, respectively. Those orbits are prohibited out of the colored regions.

## 4 结 论

对于一类两分段不连续映像, 在任意映像参数  $z$  和不连续间断  $\delta$  下解析求解了  $L^{n-1}R$  周期模式的稳定性条件和边界碰撞分岔条件, 确定了该类周期窗口存在的控制参数范围. 当周期轨道失稳时, 系统会进入混沌状态. 不连续性的出现导致了边界碰撞分岔的发生, 常常使得稳定的周期轨道转变为混沌状态或者另外一个稳定的周期状态. 在这类转变点的附近, 常常伴随着吸引子共存现象. 此外, 还发现控制参数从大变小时周期递增现象. 基于稳定性和边界碰撞分岔条件, 得到  $\mu$ - $\delta$  参数空间相平面中  $L^{n-1}R$  周期的相图. 发现当  $0 < z < 1$  时, 在相平面上可以观察到 BC-flip 余维-2 分岔点和 BC-BC 余维-2 分岔点; 当  $z > 1$  时, 可观察到 BC-flip 余维-2 分岔点和 BC-BC 余维-2 分岔点; 当  $z < 0$  时, 可观察到 BC-fold 余维-2 分岔点. 给出了这三类余维-2 分岔点的坐标通式. 此外, BC-flip 余维-2 分岔点和 BC-BC 余维-2 分岔点在某些参数条件下会重合, 出现三相点. 三相点的存在条件可以解析得到, 由映像函数左支斜率  $\alpha$  唯一确定.

## 参考文献

- [1] Makarenkov O, Lamb J S W 2012 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **241** 1826
- [2] Qin Z Y, Yang J C, Banerjee S, Jiang G R 2011 *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* **16** 547
- [3] Biswas D, Seth S, Bor M 2020 *Int. J. Bifurcation Chaos* **30** 2050018
- [4] Metri R A, Mounica M, Rajpathak B A 2020 *IEEE First International Conference on Smart Technologies for Power, Energy and Control (STPEC)* Nagpur, India, 2020 pp1-6
- [5] Metri R, Rajpathak B, Pillai H 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 9395
- [6] Shen Y Z, Zhang Y X 2019 *Nonlinear Dyn.* **96** 1405
- [7] Zhao Y F, Zhang Y X 2023 *Chaos, Solitons & Fractals* **171** 113491
- [8] Nordmark A B 1991 *J. Sound Vib.* **145** 279
- [9] He D R, Habip S, Bauer M, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B, Wang B H 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 711 (in Chinese) [何大韧, Habip S, Bauer M, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B, 汪秉宏 1993 *物理学报* **42** 711]
- [10] He D R, Wang B H, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B 1994 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **79** 335
- [11] Tse C K 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory and Applications* **41** 16
- [12] Zou Y L, Luo X S, Chen G R 2006 *Chin. Phys.* **15** 1719
- [13] Avrutin V, Zhusubaliyev Z T 2020 *Int. J. Bifurcation Chaos*

30 2030015

- [14] Cardin P T 2022 *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **32** 013104
- [15] Wang D, Mo J, Zhao X Y, Gu H G, Qu S X, Ren W 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 070503
- [16] Gu H G 2013 *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **23** 023126
- [17] Carvalho T, Cristiano R, Rodrigues D S, Tonon D J 2021 *Nonlinear Dyn.* **105** 3763
- [18] Panchuk A, Sushko I, Westerhoff F 2018 *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** 055908
- [19] Banerjee S, Grebogi C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4052
- [20] di Bernardo M, Hogan S J 2010 *Philos. Trans. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **368** 4915
- [21] Qu S X, Lu Y Z, Zhang L, He D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4418
- [22] Simpson D J W 2016 *Siam Review* **58** 177
- [23] Nusse H E, Yorke J A 1992 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **57** 39
- [24] Nusse H E, Ott E, Yorke J A 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1073
- [25] Nusse H E, Yorke J A 1995 *Int. J. Bifurcation Chaos* **5** 189
- [26] He D R, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B, Wang B H 1992 *Phys. Lett. A* **171** 61
- [27] Qu S X, Christiansen B, He D R 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 841 (in Chinese) [屈世显, Christiansen B, 何大韧 1995 物理学报 **44** 841]
- [28] Qu S X, Wu S G, He D R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 402
- [29] Wang W X, Ma M Q, Wu Y P, Zhu Y Z, He D R 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1226 (in Chinese) [王文秀, 马明全, 吴永萍, 竹有章, 何大韧 2001 物理学报 **50** 1226]
- [30] Dai J, Chu X S, He D R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3979 (in Chinese) [戴俊, 褚翔升, 何大韧 2006 物理学报 **55** 3979]
- [31] Elaskar S, del Rio E, Schulz W 2022 *Symmetry* **14** 2519
- [32] Qu S X, Christiansen B, He D R 1995 *Phys. Lett. A* **201** 413
- [33] Avrutin V, Panchuk A, Sushko I 2021 *Proc. A* **477** 20210432
- [34] Jain P, Banerjee S 2003 *Int. J. Bifurcation Chaos* **13** 3341
- [35] Halse C, Homer M, di Bernardo M 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **18** 953
- [36] Hogan S J, Higham L, Griffin T C L 2007 *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **463** 49
- [37] Dutta P S, Banerjee S 2010 *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* **14** 961
- [38] Kowalczyk P, Di Bernardo M, Champneys A R, Hogan S J, Homer M, Piironen P T, Kuznetsov Y A, Nordmark A 2006 *Int. J. Bifurcation Chaos* **16** 601
- [39] Avrutin V, Schanz M, Banerjee S 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066205
- [40] Qin Z Y, Zhao Y J, Yang J C 2012 *Int. J. Bifurcation Chaos* **22** 1250112
- [41] Gardini L, Avrutin V, Sushko I 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1450024
- [42] Wang Z, Zhang C, Bi Q 2024 *Chaos, Solitons & Fractals* **184** 115040
- [43] Stiefenhofer P 2025 *Phys. Lett. A* **560** 130935
- [44] Yamaguchi Y Y, Barré J 2023 *Phys. Rev. E* **107** 054203
- [45] Liu X, Liu P, Liu Y 2022 *AIMS Mathematics* **7** 3360

## Bonder collision bifurcations and co-dimensional bifurcations in a class of Piecewise-Smooth discontinuous mappings\*

DENG Haozhou    WANG Like    ZHU Zhaorui

WANG Hengtong    QU Shixian †

(School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

( Received 25 August 2025; revised manuscript received 19 October 2025 )

### Abstract

The study of chaos is an important field in science and has achieved many significant results. In the earlier days of the field, the study mainly focused on the systems that exhibit smooth behaviors throughout. Nonsmooth systems, by contrast, have received less attention. Nonsmooth dynamical systems are widely encountered in practical applications, such as impact oscillators, relaxation oscillators, switch circuits, neuron firing, epidemic models, and even economic models. They have become an active field of study in recent years. The typical characteristics of those systems are the abrupt variation of dynamics following a slow evolution over a longer period of time. Piecewise smooth maps are important models frequently used to describe the dynamics of those systems. Among them, much attention is paid to a class of generally one dimensional piecewise linear discontinuous mappings, as they are easy to handle and can display a rich variety of dynamical phenomena with

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11975144).

† Corresponding author. E-mail: [sxqu@snnu.edu.cn](mailto:sxqu@snnu.edu.cn)

new characteristics.

Included in this work is a discontinuous two-piece mapping function. The left branch is a linear function with slope  $\alpha$ , and the right branch is a power law function with exponent  $z$ . There exists a gap limited by  $[\mu, \mu + \delta]$  at  $x = 0$ , where  $\mu$  is the control parameter and  $\delta$  is the width of the gap. Even though the dynamics of nonsmooth and continuous mapping have been extensively studied at some special  $z$  values, their discontinuous counterparts have not been investigated at any  $z$  and discontinuous gap  $\delta$ . The presence of a discontinuity may induce border collision bifurcations. The interplay between these bifurcations associated with stability analysis and the border collision bifurcations may produce complex dynamics with new characteristics. Therefore, this work investigates the dynamics of those mappings in which periodic increments, periodic adding and coexistence of attractors are observed. The border collision bifurcation often disrupts a stable periodic orbit, causing it transition into either a chaotic state or a different periodic orbit. Near the critical parameters of this bifurcation, a periodic orbit often coexists with a chaotic or another periodic attractor. A general approach is proposed to analytically and numerically calculate the critical control parameters at which the border collision bifurcations happen, which transform the problem into the solution of an algebraic equation of dimensionless control parameter  $\mu/\mu_0$ , where  $\mu_0$  is the critical control parameter when  $\delta = 0$ . The solution can be obtained analytically when  $z$  is a simple rational number or small integer, and numerically for an arbitrary real number. In this way, the stability condition and critical control parameters for the periodic orbit of type  $L^{n-1}R$  are analytically or numerically obtained under the arbitrary exponent  $z$  and discontinuous gap  $\delta$ . The results are in accordance with the numerical simulations very well. Based on the stability and border collision bifurcation analysis, the phase diagrams in the plane of two dimensional parameters  $\mu$ - $\delta$  are built for different ranges of  $z$ . Their dynamical behaviors are discussed, and three types of co-dimension-2 bifurcations are observed, and the general expressions for the coordinates at which those phenomena occur are obtained in the phase plane. Meanwhile, a specular tripe-point induced by merging of co-dimension-2 bifurcation points BC-flip and BC-BC is observed in the phase plane, and the condition for its existence is analytical obtained.

**Keywords:** discontinuous map, border collision bifurcation, stability analysis, co-dimensional bifurcation

**DOI:** [10.7498/aps.75.20251167](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251167)

**CSTR:** [32037.14.aps.75.20251167](https://cstr.org/urn:csdn:CSTR:32037.14.aps.75.20251167)



一类分段光滑不连续映像中的边界碰撞分岔和余维分岔

邓浩洲 王力可 朱兆瑞 王恒通 屈世显

**Bonder collision bifurcations and co-dimensional bifurcations in a class of Piecewise-Smooth discontinuous mappings**

DENG Haozhou WANG Like ZHU Zhaorui WANG Hengtong QU Shixian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 010002 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251167

CSTR: 32037.14.aps.75.20251167

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251167>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

高速钝锥对不同类型来流扰动的三维感受性

Three-dimensional receptivity of high-speed blunt cone to different types of freestream disturbances

物理学报. 2024, 73(23): 234701 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241383>

非线性光纤中Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou现象的稳定性分析

Stability analysis of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou phenomenon in nonlinear optical fibers

物理学报. 2024, 73(23): 235201 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241380>

声空化场中球状泡团的结构稳定性分析

Structural stability analysis of spherical bubble clusters in acoustic cavitation fields

物理学报. 2024, 73(8): 084303 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20232008>

快自突触反馈诱发混合簇放电的反常变化及分岔机制

Fast autaptic feedback induced-paradoxical changes of mixed-mode bursting and bifurcation mechanism

物理学报. 2021, 70(17): 170501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210208>

驻波场中环状空化泡聚集结构的稳定性分析

Stability analysis of ring-like cavitation bubble cluster structure in standing wave field

物理学报. 2024, 73(8): 084301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231956>

一种基于摄动理论的不连续系统Lyapunov指数算法

Lyapunov exponent algorithm based on perturbation theory for discontinuous systems

物理学报. 2021, 70(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210492>