

## 浅海波导中非线性声传播特性研究\*

曹源<sup>1)2)3)</sup> 杨德森<sup>1)2)3)</sup> 时洁<sup>1)2)3)†</sup> 张昊阳<sup>1)2)3)</sup> 张姜怡<sup>1)2)3)</sup>

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术全国重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 海洋信息获取与安全工业和信息化部重点实验室, 哈尔滨 150001)

3) (哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2025年9月17日收到; 2025年11月27日收到修改稿)

浅海波导中的非线性声传播问题是声波在复杂海洋环境中传播的基本问题, 在水下非线性声场控制与目标探测等领域具有重要意义. 针对波导中的非线性声传播问题建立了理论分析模型与数值计算方法, 研究了非线性相互作用过程中差频波束在波导界面发生反射的物理特性. 首先, 基于非线性波动方程的准线性理论, 通过引入高精度的非近轴近似方法, 利用镜像源方法对波导中的非线性声场进行分析, 提出了可以精确计算大掠射角情况下非线性声场广角信息的理论模型. 研究了波导中多种因素对非线性声传播特性的影响. 研究结果表明: 频率的提升会增强非线性波束的定向性能, 从而进一步提升其在波导中的抗干涉能力; 当声源靠近波导界面时, 非线性波束在靠近该边界的一侧区域内出现旁瓣, 原本集中于声轴附近且均匀变化的波束能量出现明显的间断现象; 声源掠射角会直接影响波束发生界面反射的先后次序, 并对声场的能量分布产生影响; 波导界面通过影响非线性虚源的空间幅值和相位分布来决定最终的声场结构.

**关键词:** 浅海波导, 非线性声传播, 差频波束, 非线性声学**DOI:** 10.7498/aps.75.20251274**CSTR:** 32037.14.aps.75.20251274

## 1 引言

声学传感技术作为社会发展的重要科技驱动力, 已广泛应用于目标探测、通信等诸多领域<sup>[1,2]</sup>. 在低频、大功率成为水声工程发展主要趋势的今天, 非线性效应引起了越来越多的重视. 与线性声学相比, 非线性声学给海洋声学领域带来新现象和新能力. 一方面, 声波由于非线性效应会发生波形畸变并产生各阶谐波, 可以利用低频、穿透性强的低频声波在指定区域远程产生高频谐波. 而传统线性声学中高频声波衰减极快, 无法远程传播, 因此利用非线性效应有望在海洋中实现远程产生高频声波的技术. 另一方面, 利用传统线性方法产生低频窄波束需要巨大的物理换能器阵列, 而基于非线

性效应的参量阵 (parametric array, PA) 可以实现小型化, 因此可以很方便地实现声学高分辨率探测. 综合来看, 非线性声学解决的核心问题是: 利用一个小型化的系统实现低频声波的定向发射与高频声波的远程生成, 而这是一个线性声学框架下无法解决的根本性矛盾.

参量阵产生的高指向性波束可以实现低频定向声发射, 具有高空间分辨率、抗混响能力强等优点<sup>[3]</sup>, 但其也有明显的缺点, 比如极低的能量转换效率、对介质特性的敏感性较高等. 目前, 参量阵技术已在空气声学中广泛应用于多种高级音频应用<sup>[4]</sup>, 例如虚拟声源创建<sup>[5]</sup>、立体声重现<sup>[6]</sup>、声场再现等<sup>[7]</sup>, 而水声参量阵技术的应用受到了很多限制, 例如海水介质中参量阵具有较长的吸收距离<sup>[8]</sup>, 非线性声场需要在较远距离处才能完成积累; 浅海

\* 国家自然科学基金 (批准号: 52327901, 52271342, 52171333, 52250344) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shijie@hrbeu.edu.cn

环境中需要考虑波导界面对非线性声波的反射影响. 目前水下参量阵的应用主要有海底剖面测量<sup>[9]</sup>、声学材料测量<sup>[10]</sup>等, 尚未有针对波导条件下定向波束的精细化调控, 因此, 研究波导中的非线性声传播问题具有重要意义.

自由场中针对非线性声场的建模技术已相当成熟, 除了各种有限差分<sup>[11]</sup>、有限元<sup>[12]</sup>等常规手段外, 较为精确快捷的方法是在准线性解<sup>[13]</sup>的基础上使用高斯波束展开 (Gaussian beam expansion, GBE) 技术<sup>[14]</sup>, 然而, 早期的 GBE 方法存在以下问题: 在声场远离声轴的广角位置处或者差频波频率较低时, 采用近轴近似计算非线性虚源积分会导致较大的误差, Cervenka 与 Bednarik<sup>[15]</sup>, Zhuang<sup>[16]</sup>等相继对 GBE 方法进行了改进, 对非线性声场的虚源积分采用非近轴近似以计算相控 PA 产生的非线性声场, 但在计算高频声场时仍使用了近轴近似, 这将使得高频声场的广角计算仍存在一定误差, 并在计算非线性声场时出现误差累积<sup>[17]</sup>.

20 世纪 80 年代以来, 陆续有学者采用简正波方法, 从模态域分析定向声源辐射非线性声场的垂直和水平结构<sup>[18-20]</sup>. 但相关研究将高频声波近似为准直波束, 这使得该理论有频率限制条件, 而且会忽略掉声源辐射的指向性波束特征, 从而具有较大的局限性. 后来 Muir 等<sup>[21]</sup>研究了压力释放表面对非线性相互作用过程的影响, 研究表明, 差频波束在经过反射后会发生相位反转从而导致干涉效应. 最近, Zhong 等<sup>[22]</sup>研究了空气中差频波束的反射问题, 但局限于单一界面情形.

随着水下声学应用的低频化, 准确获取广角非线性声场信息在波导中 PA 的相关应用中变得更加重要. 以往的大多数研究都是在空气介质中开展的, 鲜有考虑水介质尤其是海洋波导环境的特性. 本文针对波导中的非线性声传播问题建立了理论分析模型与数值计算方法, 研究了非线性相互作用过程中差频波束发生界面反射的物理特性, 与之前的工作<sup>[23]</sup>相比, 本文着重研究了不同声源频率、大掠射角、不同声源深度情况下的非线性声传播特性, 并深入地分析了内在影响机制. 所提出的模型具有很好的广角信息精度, 从而可以准确地获取大掠射角情况下非线性声场中差频波束的界面反射特性, 为水下波导环境中的主动噪声控制、低频主动探测等定向波束的精细化调控技术提供了理论支撑.

## 2 理论模型

本节将基于非线性声场的控制方程和准线性近似理论, 利用镜像源方法分析波导中非线性声场的构成, 进一步给出计算非线性声场的非近轴模型, 并引入一种改进的高斯波束展开系数求解方法.

### 2.1 非线性声场控制方程和准线性近似理论

从均匀介质中的 Westervelt 方程出发:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\delta_0}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中,  $p$  是声压;  $t$  是时间变量;  $c_0$  是小信号下的绝热声速; 等号右边第一项表征流体热黏度;  $\delta_0$  是耗散系数, 与频率  $\omega$  处的声衰减系数  $\alpha$  有关, 关系式为  $\alpha(\omega) = \omega^2 \delta_0 / (2c_0^3)$ . 等号右边第二项表征非线性,  $\rho_0$  是环境流体密度,  $\beta$  是非线性参数 (水中  $\beta = 3.5$ ).

如图 1 所示, 以 PA 声源辐射面的几何中心为原点建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 声轴与  $z$  轴重合. 假设声源产生频率为  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) 的高频波, 声源表面的边界条件为

$$v_z(\mathbf{r}_s, t) = \sum_{i=1,2} v_i(\mathbf{r}_s) \exp(-j\omega_i t), \quad (2)$$

其中,  $j$  为虚数单位;  $v_z$  表示垂直于声源表面的振速;  $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, 0)$  为 PA 声源表面某点坐标;  $v_i(\mathbf{r}_s)$  为点  $\mathbf{r}_s$  处的振速;  $\omega_i = 2\pi f_i$  是高频波的角频率.

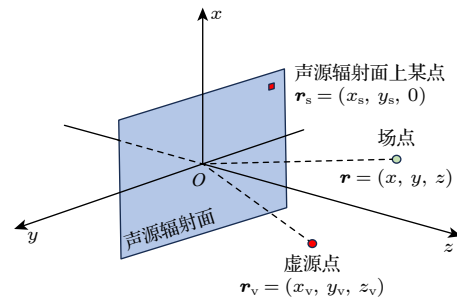


图 1 矩形 PA 声源辐射声场示意图

Fig. 1. Sketch of sound field radiated by a rectangular PA sound source.

根据准线性近似理论有

$$\nabla^2 p_i(\mathbf{r}_v) + k_i^2 p_i(\mathbf{r}_v) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$\nabla^2 p_d(\mathbf{r}) + k_d^2 p_d(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}_v), \quad (4)$$

其中,  $k_i = \omega_i / c_0 + j\alpha_i$  是高频复波数;  $k_d$  是差频复

波数;  $p_i(\mathbf{r}_v)$  是高频声场解;  $p_d(\mathbf{r})$  是非线性声场解;  $q(\mathbf{r}_v)$  为非线性虚源的密度函数;  $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$  为非线性虚源位置;  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  为空间场点位置.

(3) 式的解可以表示为瑞利积分 (Rayleigh integral, RI)<sup>[15]</sup>:

$$p_i(\mathbf{r}_v) = -\frac{j\rho_0\omega_i}{2\pi} \iint_S v_i(\mathbf{r}_s) \frac{\exp(jk_i d_s)}{d_s} dx_s dy_s, \quad (5)$$

其中,  $d_s$  是声源表面  $S$  上点  $\mathbf{r}_s$  到点  $\mathbf{r}_v$  的距离.

由 PA 辐射的差频声压可认为是由介质中的无限非线性虚源产生声压的叠加<sup>[16]</sup>:

$$p_d(\mathbf{r}) = -\frac{j\rho_0\omega_d}{4\pi} \iiint_V q(\mathbf{r}_v) \frac{\exp(jk_d d_v)}{d_v} d\mathbf{r}_v, \quad (6)$$

其中,  $d_v$  是非线性虚源点  $\mathbf{r}_v$  到空间场点  $\mathbf{r}$  的距离;  $\omega_d = 2\pi f_d$  是差频波的角频率. 非线性虚源密度函数为

$$q(\mathbf{r}_v) = \frac{\beta\omega_d^2 p_1(\mathbf{r}_v) p_2^*(\mathbf{r}_v)}{\rho_0 c_0^4}. \quad (7)$$

对于典型海洋环境而言, 判断非线性效应是否显著, 主要看非线性效应能否在声波衰减之前有效积累. 产生显著差频波有两个决定性条件: 1) 高声源级, 两个高频波的声压必须足够大, 只有当初始声压振幅足够大, 非线性效应才会在传播初期就较为明显; 2) 合适的频率选择, 高频波频率应足够高, 以保证声波的非线性相互作用效应较强, 但又不能太高, 否则高频波自身会因海水吸收而迅速衰减. 一般而言, 水声中通常选择几十到几百 kHz 作为高频波频率. 差频波频率通常较低 (几百 Hz 到几 kHz), 频率参数可以根据实际需要进行合理选择.

## 2.2 波导场中的镜像源方法

如图 2 所示的波导空间,  $y$  方向为波导深度方向,  $y = 0$  平面为波导的上界面,  $y = D$  平面是下界面,  $D$  是波导总深度. PA 声源 (图 2 中蓝色矩形) 在深度  $y = H$  处. 假设声源向海底辐射声波 (掠射角  $\theta > 0$ ), 为简化分析, 根据入射角度和几何关系,

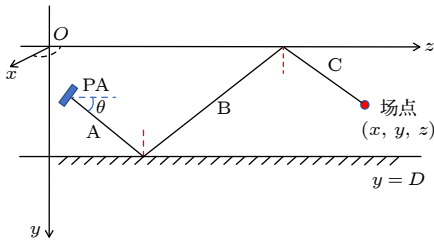


图 2 波导中声源倾斜入射声场示意图

Fig. 2. Sketch of the sound field of the inclined radiation of the sound source in the waveguide.

假设此时从声源到接收点之间经过界面反射共有三条主声线 A, B 和 C (声源沿主波束轴方向辐射的声线), 在仅考虑一次镜像过程时, 每条主声线都分别关于上下两个界面存在两个像源, 因此共对应 9 个分量.

高频声场  $p_{i,\text{sum}}(\mathbf{r}_v)$  和非线性声场  $p_{d,\text{sum}}(\mathbf{r})$  分别可以表示成:

$$p_{i,\text{sum}}(\mathbf{r}_v) = p_i^A(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{up}}^A(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{down}}^A(\mathbf{r}_v) + p_i^B(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{up}}^B(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{down}}^B(\mathbf{r}_v) + p_i^C(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{up}}^C(\mathbf{r}_v) + p_{i,\text{down}}^C(\mathbf{r}_v), \quad (8)$$

$$p_{d,\text{sum}}(\mathbf{r}) = p_d^A(\mathbf{r}) + p_{d,\text{up}}^A(\mathbf{r}) + p_{d,\text{down}}^A(\mathbf{r}) + p_d^B(\mathbf{r}) + p_{d,\text{up}}^B(\mathbf{r}) + p_{d,\text{down}}^B(\mathbf{r}) + p_d^C(\mathbf{r}) + p_{d,\text{up}}^C(\mathbf{r}) + p_{d,\text{down}}^C(\mathbf{r}), \quad (9)$$

其中,  $p_i^A(\mathbf{r}_v)$  和  $p_d^A(\mathbf{r})$  是主声线 A 对应的高频和差频分量;  $p_{i,\text{up}}^A(\mathbf{r}_v)$  和  $p_{d,\text{up}}^A(\mathbf{r})$  是主声线 A 关于上界面的镜像源 (非线性虚源) 对应的高频和差频分量;  $p_{i,\text{down}}^A(\mathbf{r}_v)$  和  $p_{d,\text{down}}^A(\mathbf{r})$  是主声线 A 关于下界面的镜像源 (非线性虚源) 对应的高频和差频分量, 主声线 B, C 同理. 另外, 非共线的波束由于存在相位失配导致对应的非线性虚源密度较小, 因此将忽略非共线高频波束之间的非线性相互作用<sup>[22]</sup>.

当波束在波导中倾斜入射并发生多次反射时, 每次反射都将会引入诸多分量, 根据几何关系可知, 位于  $y = 0$  平面之上的第  $\xi$  个镜像源的坐标为  $(0, Y_{\text{up}}^\xi, 0)$ :

$$Y_{\text{up}}^\xi = \begin{cases} -[(\xi - 1)D + H], & \xi = 1, 3, 5 \dots, \\ -(\xi D - H), & \xi = 2, 4, 6 \dots. \end{cases} \quad (10)$$

同理, 位于  $y = D$  平面之下的第  $\xi$  个镜像源的坐标为  $(0, Y_{\text{down}}^\xi, 0)$ :

$$Y_{\text{down}}^\xi = \begin{cases} (\xi + 1)D - H, & \xi = 1, 3, 5 \dots, \\ \xi D + H, & \xi = 2, 4, 6 \dots. \end{cases} \quad (11)$$

假设此时从声源到接收点之间经过界面反射共有  $n$  条主声线, 对于  $\delta$  次镜像过程, 观测区域内的高频 (差频) 分量数  $M$  为

$$M = (2\delta + 1)n. \quad (12)$$

每多考虑一次镜像过程, 相当于在总声场中多计算了一次海面或海底的反射声线. 最终叠加合成的声场便按一定规律交替满足波导的上下边界条件. 因此, 声源位置、波导深度、声源掠射角和观测

区域范围都会决定波导中经过界面反射的主声线数量, 并间接决定所需要计算的高频(差频)分量个数, 从而影响最终波导中非线性声场的分布.

值得注意的是, 镜像源方法能够严格适用的核心条件是: 1) 波导边界是理想几何形状, 界面必须是无限大、绝对平行且平坦的平面. 只有满足该条件, 反射波才与镜像源产生的波完全等效. 若界面是弯曲、不平整或有限长度, 则会破坏镜像源的精确性, 引入衍射效应. 2) 波导边界是理想的声学边界, 最常见的情况是上软下硬边界, 如海洋中的压力释放海面 and 刚性海底. 此时, 镜像源的相位会交替变化, 但该方法依然严格适用. 3) 波导内介质均匀, 波导内的声速和密度需要恒定不变. 如果介质不均匀, 标准的镜像源法不再严格适用, 需要对其进行修正.

### 2.3 非近轴模型

如图 3 所示, 在  $yo z$  平面中,  $x_v = x_s = 0$ ,

$$d_s = \sqrt{(x_v - x_s)^2 + (y_v - y_s)^2 + z_v^2}.$$

在传统 GBE 模型<sup>[16]</sup>中, 通常对 (5) 式采用近轴近似:

$$d_s \approx |z_v| + \frac{(x_v - x_s)^2 + (y_v - y_s)^2}{2|z_v|}. \quad (13)$$

即使用 (13) 式代替 (5) 式中分子上指数函数中的  $d_s$ , 而使用  $|z_v|$  近似分母中的  $d_s$ . 这种近似将在偏离  $z$  轴的位置处引入误差, 且误差随偏离程度增加而增大, 因此导致声场的广角信息精度严重下降.

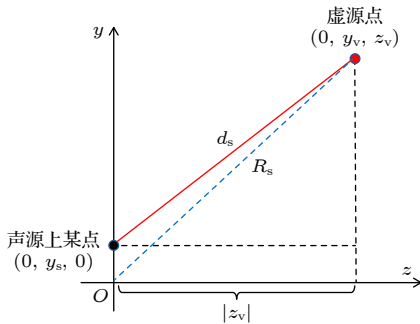


图 3 近轴近似与非近轴近似中的几何关系

Fig. 3. Geometric relationship between paraxial approximation and non-paraxial approximation.

本文对高频声场采取非近轴近似, 可以进一步提升非线性声场的广角计算精度. 非近轴近似的形式如下:

$$d_s = \sqrt{(x_v - x_s)^2 + (y_v - y_s)^2 + (z_v - z_s)^2} \approx R_s + \frac{(x_v - x_s)^2 + (y_v - y_s)^2}{2R_s} - \frac{x_v^2 + y_v^2}{2R_s}, \quad (14)$$

其中,  $R_s = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$ .

即使用 (14) 式代替 (5) 式中分子上的指数函数中的  $d_s$ , 而使用  $R_s$  近似分母中的  $d_s$ .

将矩形 PA 声源表面振速表示为高斯函数展开形式:

$$v_i(x_s, y_s) = V_i \sum_{m=1}^N A_m \exp(-B_m x_s^2 / a_x^2) \times \sum_{n=1}^N A_n \exp(-B_n y_s^2 / a_y^2), \quad (15)$$

其中,  $V_i$  是振幅;  $A_m$ ,  $B_m$  和  $A_n$ ,  $B_n$  是高斯波束展开系数;  $N$  是高斯展开系数的数量. 要有效地拟合矩形声源表面的振速分布, 一般  $N = 10$  即可满足要求<sup>[24]</sup>. 由于高斯函数的非正交性, 高斯波束展开系数一般通过非线性最优化方法得到, 但在优化过程中往往会面临局部最优的情形, 因此本文将在 2.4 节中引入一种改进的高斯波束展开系数求解方法<sup>[25]</sup>.

为简化计算引入下列无量纲变量:

$$\begin{cases} \tilde{x}_s = x_s / a_x, & \tilde{y}_s = y_s / a_y, & \tilde{x}_v = x_v / a_x, \\ \tilde{y}_v = y_v / a_y, & \tilde{z}_{v,\psi,i} = z_v / R_{\psi,i}, \\ \tilde{R}_{s,\psi,i} = R_s / R_{\psi,i}, & R_{\psi,i} = k_i a_{\psi}^2 / 2, \\ \psi = x, y; & i = 1, 2. \end{cases} \quad (16)$$

将 (14) 式—(16) 式代入 (5) 式, 可以得到如下形式:

$$p_i(\mathbf{r}_v) = P_i \exp \left\{ j k_i \left[ R_s - \frac{x_v^2 + y_v^2}{2R_s} \right] \right\} \times \sum_{m_i=1}^N \frac{A_{m_i}}{\sqrt{j\pi \tilde{R}_{s,x,i}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{j(\tilde{x}_v - \tilde{x}_s)^2}{\tilde{R}_{s,x,i}} - B_{m_i} \tilde{x}_s^2 \right] d\tilde{x}_s \times \sum_{n_i=1}^N \frac{A_{n_i}}{\sqrt{j\pi \tilde{R}_{s,y,i}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{j(\tilde{y}_v - \tilde{y}_s)^2}{\tilde{R}_{s,y,i}} - B_{n_i} \tilde{y}_s^2 \right] d\tilde{y}_s, \quad (17)$$

其中,  $P_i = \rho_0 c_0 V_i$ . 将指数积分转化为指数函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{j(\tilde{x}_v - \tilde{x}_s)^2}{\tilde{R}_{s,x,i}} - B_{m_i} \tilde{x}_s^2 \right] d\tilde{x}_s = \frac{\sqrt{j\pi \tilde{R}_{s,x,i}}}{\sqrt{1 + j\tilde{R}_{s,x,i} B_{m_i}}} \exp \left( -\frac{B_{m_i} \tilde{x}_v^2}{1 + j\tilde{R}_{s,x,i} B_{m_i}} \right). \quad (18)$$

再引入高斯波束函数:

$$G(X, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{1 + jYZ}} \exp\left(\frac{-ZX^2}{1 + jYZ}\right),$$

$$\text{Re}[Z] > 0, Y \neq 0, \quad (19)$$

其中, 高斯波束函数  $G(X, Y, Z)$  的用途是为简化公式表达, 在推导过程中, 函数自变量  $X$ ,  $Y$  和  $Z$  分别取  $\tilde{\psi}_v$ ,  $\tilde{R}_{s,\psi,i}$  和  $B_{m(n_i)}$ .

将 (18) 式和 (19) 式应用到 (17) 式, 经过推导可以得到非近轴近似下的高频声场解:

$$p_i(\mathbf{r}_v) = P_i \exp\{jk_i [R_s - (x_v^2 + y_v^2)/(2R_s)]\}$$

$$\times \sum_{m_i=1}^N \left[ A_{m_i} \times G(\tilde{x}_v, \tilde{R}_{s,x,i}, B_{m_i}) \right]$$

$$\times \sum_{n_i=1}^N \left[ A_{n_i} \times G(\tilde{y}_v, \tilde{R}_{s,y,i}, B_{n_i}) \right]. \quad (20)$$

当考虑波导的影响时, 对于每一个镜像源辐射

的声场, 都需要考虑其在镜像过程中满足的边界反射条件. 以位于  $y = D$  平面之下的第一个镜像源为例, 其形成的高频声场为

$$p_{i,\text{down}}^A(\mathbf{r}_v) =$$

$$\frac{-j\rho_0\omega_i}{2\pi} \iint_S \left[ R_{i,\text{down}}(\omega_i) v_i \frac{\exp(jk_i d_{i,\text{down}}^A)}{d_{i,\text{down}}^A} \right] dS, \quad (21)$$

其中,  $R_{i,\text{down}}(\omega_i)$  为下界面的反射系数,  $R_{i,\text{down}}(\omega_i)$  与角频率  $\omega_i$  有关; 距离  $d_{i,\text{down}}^A$  为

$$d_{i,\text{down}}^A =$$

$$\sqrt{(x_v - x_s)^2 + (y_v - y_s - Y_{\text{down}}^1)^2 + (z_v - z_s)^2}. \quad (22)$$

(21) 式以及 (8) 式中的每一项都可以通过推导得到类似于 (20) 式的形式, 由此得到波导中 PA 产生的高频声场的非近轴模型.

将 (20) 式和 (7) 式代入 (6) 式, 经过推导可以得到非近轴近似下的非线性声场解为

$$p_d(\mathbf{r}) = \frac{-\beta\omega_d^2 P_1 P_2}{4\pi\rho_0 c_0^A} \iiint_V \exp\{jk_d [R_s - (x_v^2 + y_v^2)/(2R_s)]\} \frac{e^{jk_d d_v}}{d_v} d\mathbf{r}_v$$

$$\times \sum_{m_1=1, m_2=1}^N A_{m_1} G(\tilde{x}_v, \tilde{R}_{s,x,1}, B_{m_1}) \left[ A_{m_2} G(\tilde{x}_v, \tilde{R}_{s,x,2}, B_{m_2}) \right]^*$$

$$\times \sum_{n_1=1, n_2=1}^N A_{n_1} G(\tilde{y}_v, \tilde{R}_{s,y,1}, B_{n_1}) \left[ A_{n_2} G(\tilde{y}_v, \tilde{R}_{s,y,2}, B_{n_2}) \right]^*. \quad (23)$$

当考虑波导的影响时, 以位于  $y = D$  平面之下的第一个镜像非线性虚源为例, 其形成的非线性声场为

$$p_{d,\text{down}}^A(\mathbf{r}) = \frac{-j\rho_0\omega_d}{4\pi} \iiint_V R_{d,\text{down}}(\omega_d) q_d \frac{\exp(jk_d d_{v,\text{down}}^A)}{d_{v,\text{down}}^A} dV, \quad (24)$$

其中,  $R_{d,\text{down}}(\omega_d)$  为下界面的反射系数, 距离  $d_{v,\text{down}}^A$  为

$$d_{v,\text{down}}^A = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v - Y_{\text{down}}^1)^2 + (z - z_v)^2}. \quad (25)$$

(24) 式以及 (9) 式中的每一项都可以通过推导得到类似于 (23) 式的形式, 由此得到波导中 PA 产生的非线性声场的非近轴模型.

至此便建立起波导中非线性声场的非近轴模型. 对比 (5) 式和 (20) 式, 以及 (6) 式和 (23) 式, 可以看出高频声场表达式由二重积分化为了求和的形式, 非线性声场的求解也由原先的五维积分简化成三重积分, 这将为后续的非线性声场求解提供

便利. 该声场模型的计算量与传统 GBE 方法相当, 并且由于打破了近轴近似的限制可以实现广角声场的准确计算. 所提出的非近轴模型与传统的 GBE 模型的适用范围是统一的: 1) 该方法适用于声源表面振速可以用一组高斯系数来拟合的情形, 例如, 振速均匀分布的声源. 当难以用高斯系数来拟合声源振速时, 该方法的适用性下降. 2) 在高频情形下该方法有效且精确, 在低频时则需要进一步调整并优化高斯波束展开系数以提高适用性.

## 2.4 改进的高斯波束展开系数求解方法

如图 1 所示, 对于一般的二维矩形声源, 声源振速分布函数在  $x$  轴和  $y$  轴方向均具有对称性, 正如 (15) 式中将二维振速函数表示成两个一维函数的乘积, 这里仅对一维情况进行分析:

$$v(\eta) = \sum_{n=1}^N A_n \exp(-B_n \eta^2), \quad (26)$$

其中,  $A_n$  和  $B_n$  是待求解的高斯波束展开系数,  $\eta$  是归一化空间变量. 定义目标函数  $J$  为

$$J(A_n, B_n, N) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| v(\eta) - \sum_{n=1}^N A_n \exp(-B_n \eta^2) \right|^2 d\eta. \quad (27)$$

通过最小化目标函数  $J$  来求解  $A_n$  和  $B_n$ . 当  $J$  最小时需满足:

$$\frac{\partial J}{\partial A_i^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

其中\*表示复共轭, 并可推出:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}. \quad (29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N,1} & \cdots & C_{N,N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix},$$

$$C_{i,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(B_i^* + B_n) \eta^2] d\eta,$$

$$D_i = \int_{-\infty}^{\infty} v(\eta) \exp(B_i^* \eta^2) d\eta. \quad (30)$$

将 (29) 式代入 (27) 式得

$$J(B_n, N) = \int_{-\infty}^{\infty} |v(\eta)|^2 d\eta - \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^*. \quad (31)$$

此时,  $J$  只与  $B_n$  和  $N$  有关. 对  $B_n$  进行如下构造:

$$B_n = \mu - jm\varepsilon, \quad (32)$$

其中,  $\mu > 0$ ,  $m = n - (N + 1)/2$ . 这里引入的参数  $\mu$  称为高斯函数基函数的衰减参数, 控制主瓣和旁瓣的误差大小,  $\mu$  若过小将导致旁瓣很大,  $\mu$  过大将导致主瓣振荡.  $\varepsilon$  为高斯函数基函数的频率参数, 控制基函数的频率成分,  $\varepsilon$  若过小将导致过渡区域不陡峭, 而  $\varepsilon$  过大将会导致拟合误差变大.

至此  $J(B_n, N)$  只与参数  $\mu$ ,  $\varepsilon$  和  $N$  相关, 通过二维搜索即可得到  $\mu$  和  $\varepsilon$ , 进而可得到  $B_n$  和  $A_n$ .

### 3 数值计算方法与验证

本节将对 2.2 节和 2.3 节中的镜像源方法和非近轴模型进行分析验证. 然后对 2.4 节中提出的改进高斯波束展开系数求解方法进行验证, 并与传统

的非线性优化方法进行对比, 以验证所提出理论的适用性.

#### 3.1 镜像源方法的验证

为了验证镜像源方法的有效性, 利用所提出模型计算  $D = 100$  m 深的波导中声源直接产生的频率为 200 Hz 的线性声场, 并将 Bellhop<sup>[26]</sup> 声场软件的计算结果作为对比. Bellhop 通常用于海洋中点声源声场的求解, 但可以提供一个\*.sbp 文件, 该文件中包含以“角度-振幅”来定义的波束模式, 即可完成“声源波束模式”的仿真. 具体步骤如下.

1) 利用瑞利积分获得矩形声源辐射的线性声场的指向性数据, 数据包含角度  $\theta$  和对应的振幅在内的两个列向量, 其中角度  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

2) 创建一个\*.sbp 文件, 内容为步骤 1) 中计算的声源的指向性数据.

3) 修改 Bellhop 的\*.env 环境文件, 在对应的\*.env 文件中, 将 OPTIONS3(选项 3) 的第三个字母设置为“\*”, 即可启用 Bellhop 的“声源波束模式”对矩形声源辐射声场进行求解 (注意: 环境\*.env 文件和声源波束模式\*.sbp 文件的文件名应该相同).

设置仿真参数如下: 海水介质声速  $c_0 = 1482$  m/s, 密度  $\rho_0 = 998$  kg/m<sup>3</sup>, 声吸收衰减按经验公式计算<sup>[27]</sup>; 假设声源的坐标为 (0 m, 50 m, 0 m), 声源表面振速均匀分布, 表面峰值声压为 100 kPa, 声源辐射面边长为  $L_x = L_y = 0.214$  m. 声场空间计算范围:  $x \in [-50$  m, 50 m],  $y \in [0$  m, 100 m],  $z \in [0$  m, 100 m], 对于理想海洋波导, 波导上界面为 Dirichlet 边界, 声反射系数为 -1, 下界面为 Neumann 边界, 声反射系数为 1. 结果如图 4 所示, 所提出模型的结果与 Bellhop 软件计算结果基本吻合, 两者之间的误差可能来源于 Bellhop 软件计算声场时所采用的几何波束种类和数量.

需要注意的是, 一般无法直接利用 Bellhop 软件计算非线性声场, 因为 Bellhop 基于线性声学, 它所依赖的线性波动方程无法用于求解非线性声场并捕捉非线性效应, 也无法描述非线性虚源的积累过程.

#### 3.2 镜像过程次数对计算精度的影响

根据 2.2 节中的分析, 镜像过程次数也会对声场计算准确性产生影响. 假设声源参数和声场观测空间范围与 3.1 节相同. 分别计算声源在波导中直

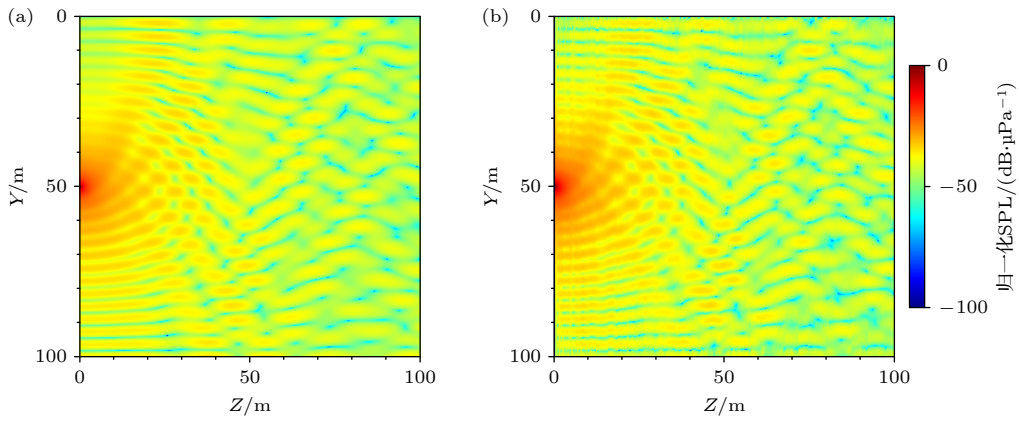


图 4 声场计算结果 (a) 所提出模型; (b) Bellhop 软件

Fig. 4. Sound field calculation results: (a) Proposed model; (b) Bellhop software.

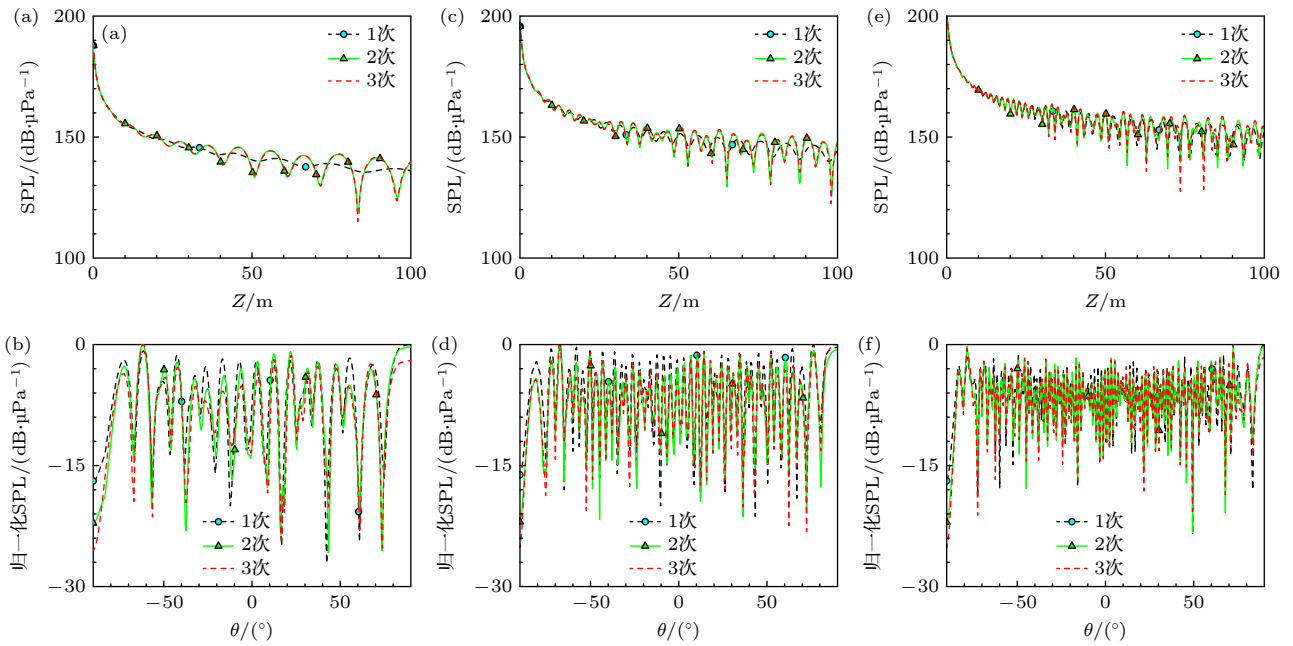


图 5 声场轴向 SPL 和指向性 (a) 200 Hz 轴向 SPL; (b) 200 Hz 指向性; (c) 500 Hz 轴向 SPL; (d) 500 Hz 指向性; (e) 1 kHz 轴向 SPL; (f) 1 kHz 指向性

Fig. 5. Axial SPL and directivity of the sound field: (a) Axial SPL at 200 Hz; (b) directivity at 200 Hz; (c) axial SPL at 500 Hz; (d) directivity at 500 Hz; (e) axial SPL at 1 kHz; (f) directivity at 1 kHz.

接产生的频率为 200, 500 和 1000 Hz 的线性声场, 其中镜像过程分别取 1 次、2 次和 3 次, 得到声场轴向 SPL 分布和 50 m 处的指向性, 结果如图 5 所示.

随着频率的升高, 1 次镜像过程计算结果的精度提高. 当频率确定时, 定义 1 次镜像过程和 2 次镜像过程的轴向 SPL 的平均误差为“一级误差”, 2 次镜像过程和 3 次镜像过程的轴向 SPL 的平均误差为“二级误差”, 表 1 给出了三种频率对应的具体计算误差. 可以看出频率越高, 一级误差越小, 二级误差则越大, 因此随着频率的提高, 为了保证计算精度需要增加镜像过程的次数.

表 1 计算误差

Table 1. Calculation error.

频率	一级误差/dB	二级误差/dB
200 Hz	2.6	0.3
500 Hz	2.4	0.7
1 kHz	2.0	1.2

### 3.3 非近轴方法的验证

2.3 节中所提出的非近轴模型在非线性声场的计算中采用严格的虚源积分, 并未进行任何额外近似, 高频声场的计算精度将直接影响最终非线性声场的计算精度, 因此这里针对高频声场进行研究.

将瑞利积分模型 ((5) 式) 得到的结果作为精确解, 传统 GBE 模型<sup>[16]</sup> 作为对比来说明所提出非近轴模型的适用性. 其中, 介质参数与 3.1 节中一致, 高频中心频率为  $f_c = 30$  kHz, 声场的计算范围: 轴向范围  $z \in [0 \text{ m}, 10 \text{ m}]$ , 角度范围  $\varphi \in [-60^\circ, 60^\circ]$ .

仿真中通过逐步缩小声源表面的积分步长得到 RI 积分数值解, 当声压级 (sound pressure level, SPL) 误差小于 0.1 dB 时认为结果收敛. 计算声轴方向的 SPL、距离声源 10 m 处的指向性以及它们和精确解之间的误差, 结果如图 6 所示. 其中, SPL 误差定义为  $\Delta_{\text{SPL}} = |20 \lg(|p'|/|p|)|$ .

如图 6(a) 和图 6(c) 所示, 通过 2.3 节中的分析, 非近轴模型和传统 GBE 模型在声轴上的计算结果是一致的, 随着从 Fresnel 区逐渐过渡到 Fraunhofer 区, 二者与精确解的误差也快速收敛. 在图 6(b) 和图 6(d) 中, 由非近轴模型计算得到的指向性与 RI 精确解在  $\pm 25^\circ$  范围内的平均误差为 0.3 dB, 最大误差仅为 2.5 dB, 并且在更大离轴角度上也基本一致; 而传统 GBE 模型的结果在  $\pm 15^\circ$  以内的平均误差为 0.7 dB, 最大误差达到了 6.1 dB, 且随着离轴角度的增大误差也逐渐变大. 由此可见, 传统 GBE 模型只适用于近轴区域 (通常指

$\pm 15^\circ$ ) 的高频声场计算, 而非近轴模型适用于广角高频声场的计算.

### 3.4 改进高斯波束展开系数求解方法的验证

如图 1 所示, 假设 PA 声源参数同 3.1 节, 分别采用 2.4 节中的改进方法和传统的非线性优化方法对声源振速函数进行高斯波束展开.

由改进方法得到的高斯波束展开系数以及目标函数  $J$  在参数空间的分布分别如表 2 和图 7 所示.

表 2 振速分解复系数

Table 2. Complex coefficients of vibration velocity decomposition.

编号 $i$	$A_{mi} = A_{ni}$	$B_{mi} = B_{ni}$
1	-0.201-0.056j	2.939+24.245j
2	0.033-0.515j	2.939+18.857j
3	0.883-0.386j	2.939+13.469j
4	1.465+1.077j	2.939+8.082j
5	-1.665+3.884j	2.939+2.694j
6	-1.665-3.884j	2.939-2.694j
7	1.465-1.077j	2.939-8.082j
8	0.883+0.386j	2.939-13.469j
9	0.333+0.515j	2.939-18.857j
10	-0.201+0.056j	2.939-24.245j

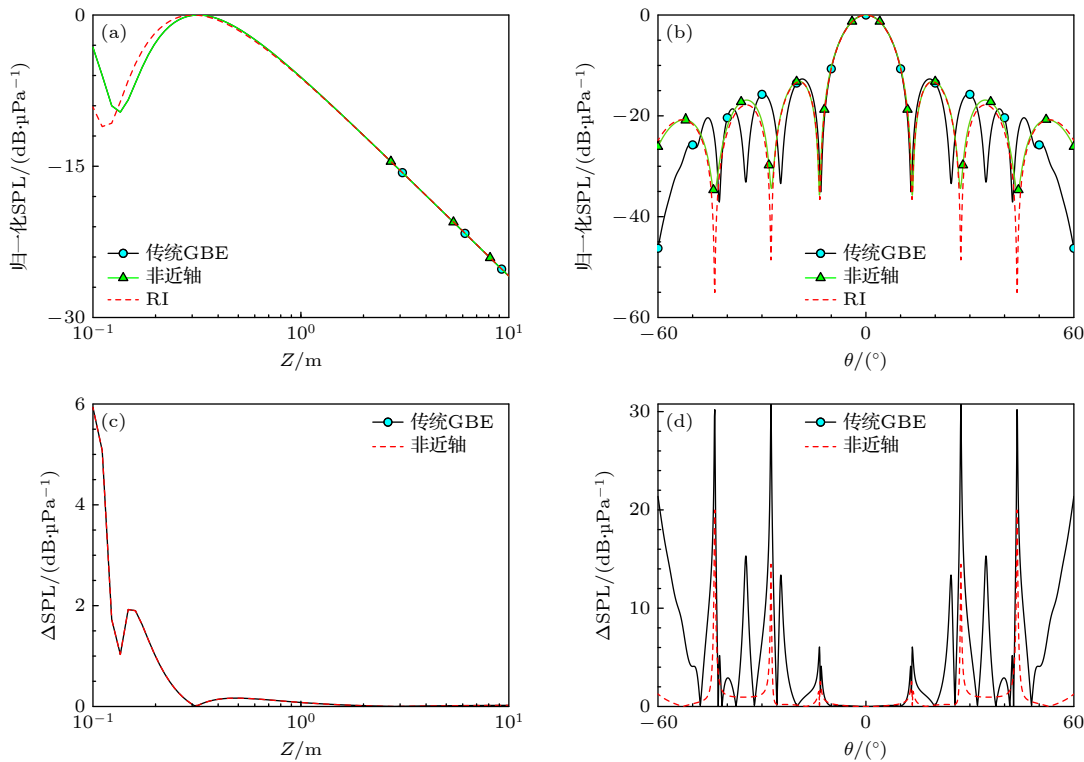


图 6 声场计算结果与误差 (a) 轴向 SPL; (b) 指向性; (c) 轴向误差; (d) 指向性误差

Fig. 6. Sound field calculation results and errors: (a) Axial SPL; (b) directivity; (c) axial error; (d) directivity error.

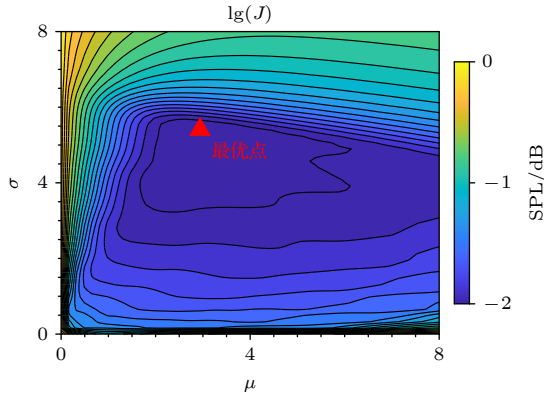


图 7 目标函数在参数空间的分布

Fig. 7. Distribution of objective function in parameter space.

两种方法对实际声源振速的拟合结果如图 8(a) 和图 8(b) 所示, 改进方法对声源振速实部的拟合效果与传统非线性优化方法相比, 旁瓣更加平缓, 而对虚部的拟合前者更加贴近实际振速. 由两种方法得到高斯波束展开系数后, 结合所提出的非近轴模型分别仿真得到距离声源 10 m 处的指向性以及它们和精确解之间的误差, 结果如图 8 所示, 改进方法对指向性旁瓣的预测精度明显优于传统非线性优化方法, 有效地降低了广角位置处的预测误差, 故后续仿真均采用改进方法.

## 4 数值仿真结果与分析

本节将利用所提出的模型研究不同声波频率、声源深度和声源掠射角条件下波导中非线性声传播的特性, 并分析其内在物理机制.

### 4.1 不同声波频率条件下非线性声传播特性

首先研究声波频率对波导中非线性声传播特性的影响. 设置仿真参数如下: 声源、环境参数和声场观测空间与 3.1 节中一致, 根据波导深度和海洋非线性声学领域所关注的低频频段 [28,29], 按照 1/3 倍频程选择差频频率  $f_d$  分别为 200, 250, 400 和 500 Hz, 高频中心频率为  $f_c = 30$  kHz, 两列高频波频率分别为  $f_1 = f_c + f_d/2$  和  $f_2 = f_c - f_d/2$ .

需要说明的是, 对于本节设置的频率参数, 高频声波 (以中心频率  $f_c$  为例) 和差频声波的自由场轴向 SPL 分布如图 9 所示. 可见在 100 m 距离内, 高频声波由于声吸收和波扩展引起的声衰减约为 40 dB, 基本符合球面波衰减规律; 差频波轴向 SPL 随着差频频率的提升而增加, 并且随距离呈

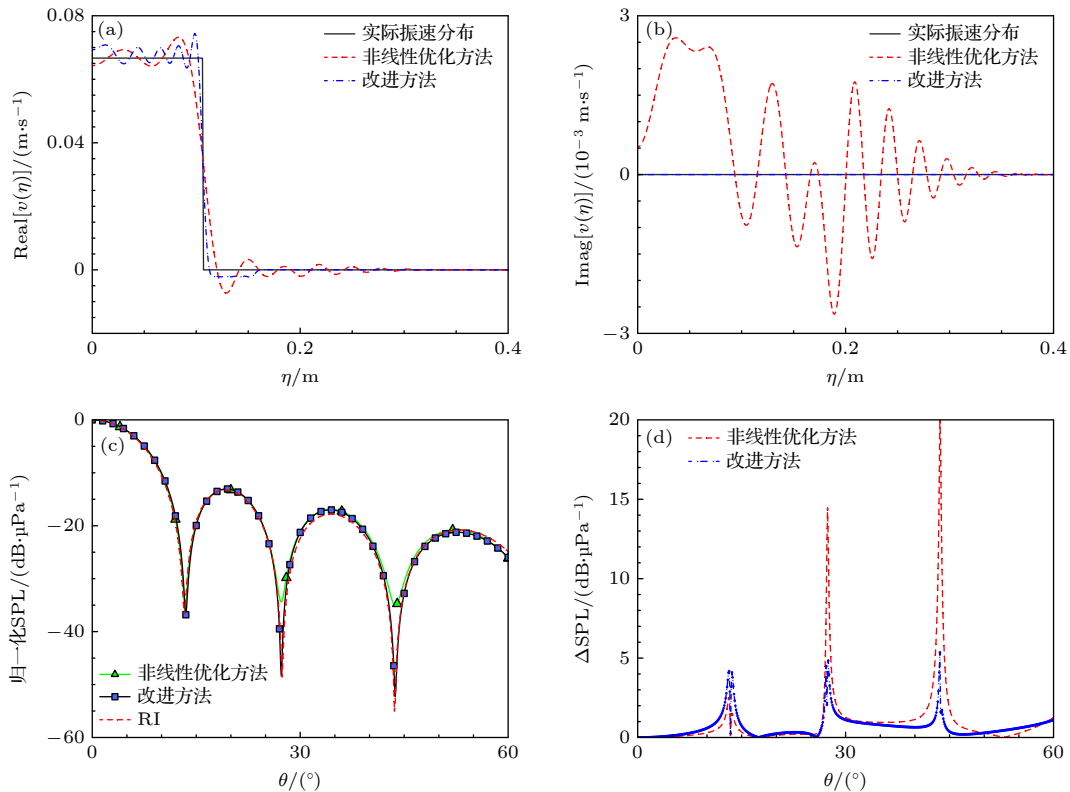


图 8 拟合效果对比 (a) 实部拟合效果; (b) 虚部拟合效果; (c) 指向性; (d) 指向性误差

Fig. 8. Comparison of fitting effect: (a) Fitting effect of real part; (b) fitting effect of imaginary part; (c) directivity; (d) directivity error.

现先增后减的趋势, 本质上是产生差频波的非线性效应与高频波声衰减效应之间相互竞争的结果. 对于所研究的频率组合, 差频波均在声场观测空间内

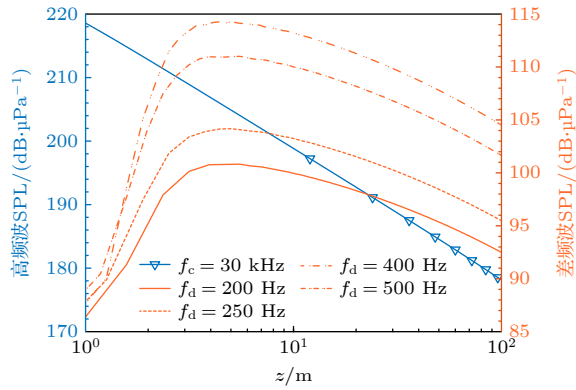


图 9 轴向 SPL 分布

Fig. 9. Distribution of axial SPL.

得到了有效积累.

下面利用所提出的模型仿真不同频率下波导中的非线性声场分布, 并将声源直接产生的线性低频声场作为对比, 同时计算了在波导中距离声源 50 m 处的声指向性, 结果如图 10 所示.

声源直接产生的低频线性声波在波导中会随频率呈现不同强度的干涉现象. 如图 10(i) 所示, 线性声场指向性的不均匀性会随着频率升高而变大. 而声源由于非线性效应产生的非线性波束则不同, 随着频率升高, 波束的能量更加集中于声轴附近, 这使得其定向性能和抗干涉能力得到提升. 如图 10(j) 所示, 虽然波导界面同样会使得非线性声场产生干涉现象, 并在非线性波束的广角位置处引入旁瓣, 但由于非线性波束的抗干涉能力, 其指向性随频率提升而更加尖锐.

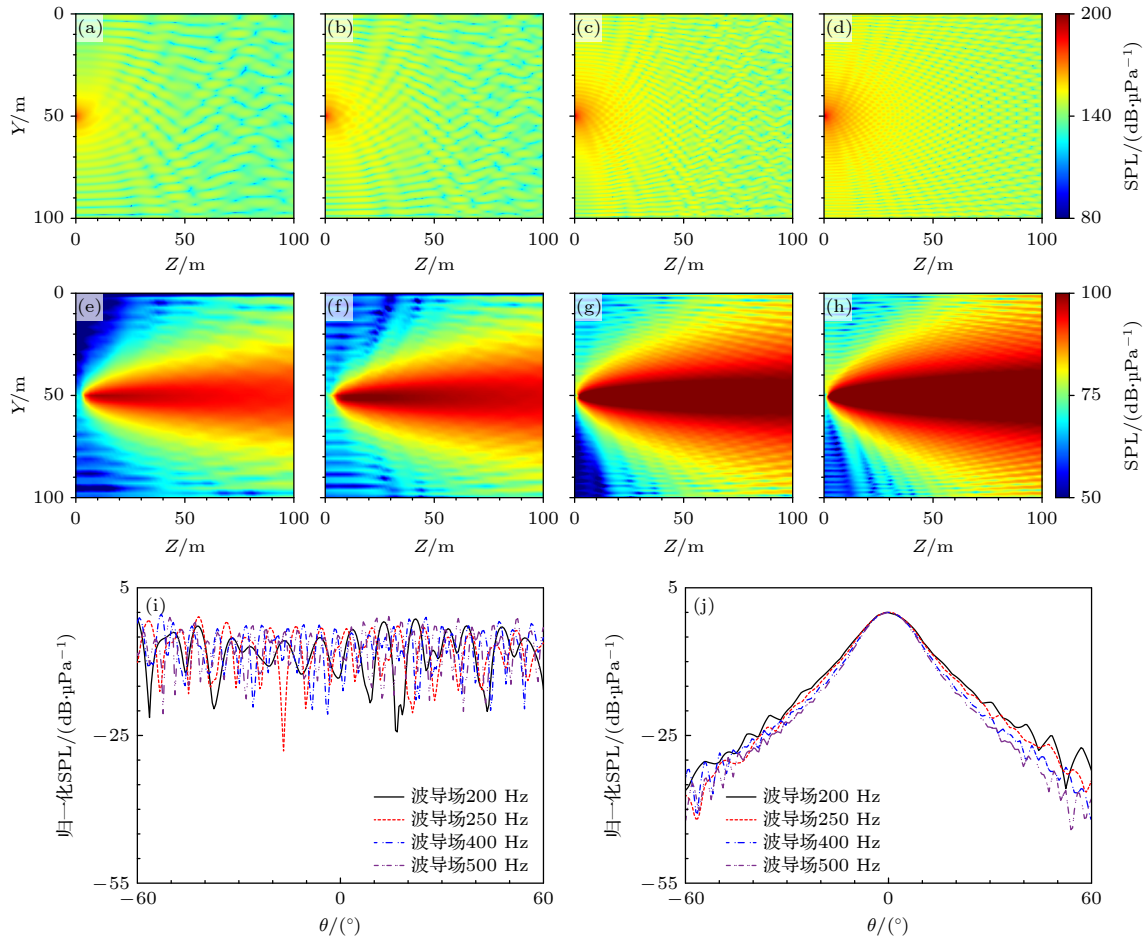


图 10 频率对声传播特性的影响 (a) 200 Hz 线性场 SPL; (b) 250 Hz 线性场 SPL; (c) 400 Hz 线性场 SPL; (d) 500 Hz 线性场 SPL; (e) 200 Hz 非线性场 SPL; (f) 250 Hz 非线性场 SPL; (g) 400 Hz 非线性场 SPL; (h) 500 Hz 非线性场 SPL; (i) 线性场指向性; (j) 非线性场指向性

Fig. 10. The influence of frequency on sound propagation characteristics: (a) Linear field SPL at 200 Hz; (b) linear field SPL at 250 Hz; (c) linear field SPL at 400 Hz; (d) linear field SPL at 500 Hz; (e) nonlinear field SPL at 200 Hz; (f) nonlinear field SPL at 250 Hz; (g) nonlinear field SPL at 400 Hz; (h) nonlinear field SPL at 500 Hz; (i) linear field directivity; (j) nonlinear field directivity.

### 4.2 不同声源深度条件下非线性声传播特性

非线性波束因尖锐的指向性而具有抗干涉能力,为进一步研究波导界面反射带来的影响,将PA声源放置在20 m和80 m两个不同深度,研究其分别靠近波导上界面和下界面时非线性声场的分布特性,并将自由场结果作为对比,结果如图11所示.可以发现当声源靠近波导界面时,图11(b)和图11(d)中的非线性波束将显著地受到界面的影响,波束在靠近该界面的一侧区域内出现旁瓣,原本集中于声轴附近且均匀变化的波束能量出现明显的间断现象(图中黑色圆圈标记处).而这种反射也会在声轴上带来声压的振荡.

### 4.3 不同声源掠射角条件下非线性声传播特性

最后研究声源掠射角对波导中非线性声传播特性的影响.假设声源分别向海底(掠射角 $\theta = 60^\circ$ )、海面(掠射角 $\theta = -60^\circ$ )倾斜入射,PA声源的坐标为(0 m, 60 m, -10 m),声场观测空间范围: $x \in [-50 \text{ m}, 50 \text{ m}]$ ,  $y \in [0 \text{ m}, 100 \text{ m}]$ ,  $z \in [-20 \text{ m}, 100 \text{ m}]$ ,其余参数与3.2节中一致.

声源分别向海底、海面掠射的声场结果如图12和图13所示.为详细分析上下界面对非线性声传播特性的影响,在图12和图13中依次展示了自由场、仅有上界面、仅有下界面和两界面同时存在时(即波导情形)非线性声场的分布.

与图12(a)和图13(a)中的自由场相比,图12(d)和图13(d)中非线性声场显然会因为界面反射而产生明显的干涉效应.另外,由于掠射角的不同,将会直接影响到主波束与界面相互作用的先后次序,这将产生不同的物理特性:若波束首先与下界面(硬界面)作用,声源直接辐射的高频声波相互作用产生的非线性波束经界面反射后,其相位和被界面反射的高频波相互作用产生的非线性波束符号相同,反射波束的能量会干涉增强,因此可以在图12(b)和图12(d)中明显地观察到经下界面反射的波束,并且入射和反射波束的能量均较强,且集中在入射轴线和反射轴线上;而对于向海面(软界面)掠射的波束,声源直接辐射的高频声波相互作用产生的非线性波束经界面反射后,相位符号改变,而被界面反射的高频声波相互作用产生的差频波相位符号不变,反射波束的能量会干涉减弱,因此在图13(b)和图13(d)中可以观察到经过上界面反射后的波

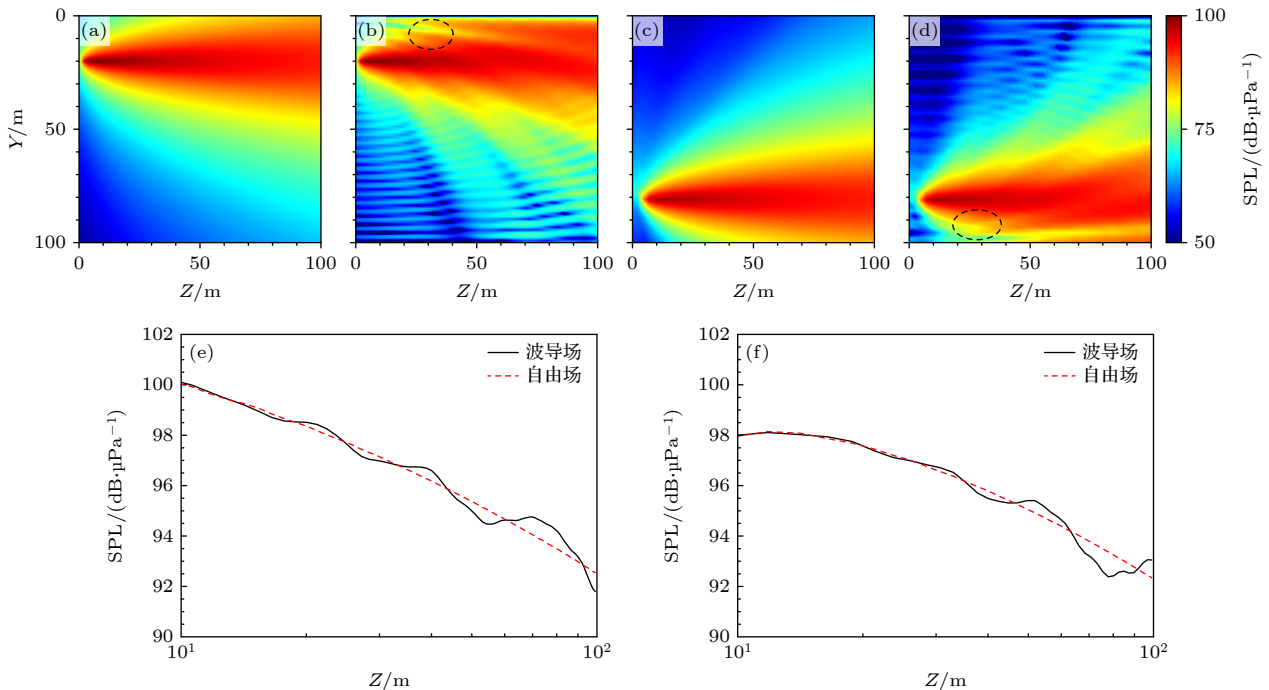


图 11 声源深度对声传播特性的影响 (a) PA 位于 20 m 深, 自由场; (b) PA 位于 20 m 深, 波导场; (c) PA 位于 80 m 深, 自由场; (d) PA 位于 80 m 深, 波导场; (e) 20 m 深度处的轴向 SPL; (f) 80 m 深度处的轴向 SPL

Fig. 11. The influence of source depth on sound propagation characteristics: (a) PA at 20 m depth, waveguide field; (b) PA at 20 m depth, waveguide field; (c) PA at 80 m depth, free field; (d) PA at 80 m depth, waveguide field; (e) axial SPL at 20 m depth; (f) axial SPL at 80 m depth.

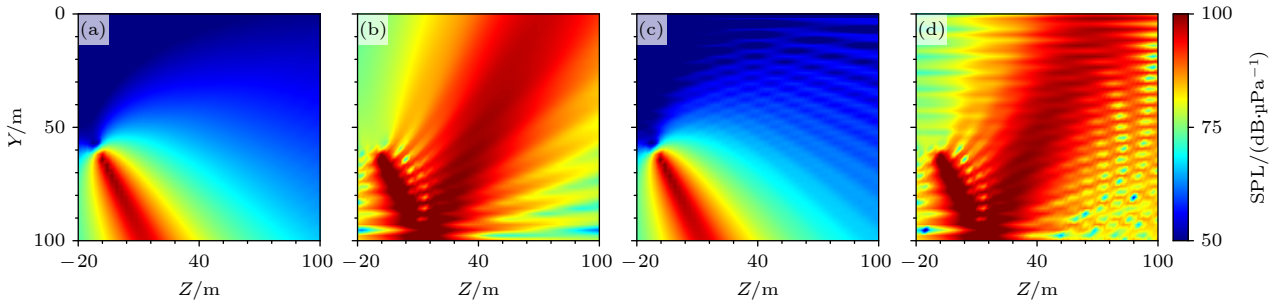


图 12 掠射角为  $60^\circ$  时的非线性声场分布 (a) 自由场; (b) 仅有下界面; (c) 仅有上界面; (d) 波导场

Fig. 12. Distribution of nonlinear sound field when oblique angle is  $60^\circ$ : (a) Free field; (b) only the bottom boundary; (c) only the top boundary; (d) waveguide field.

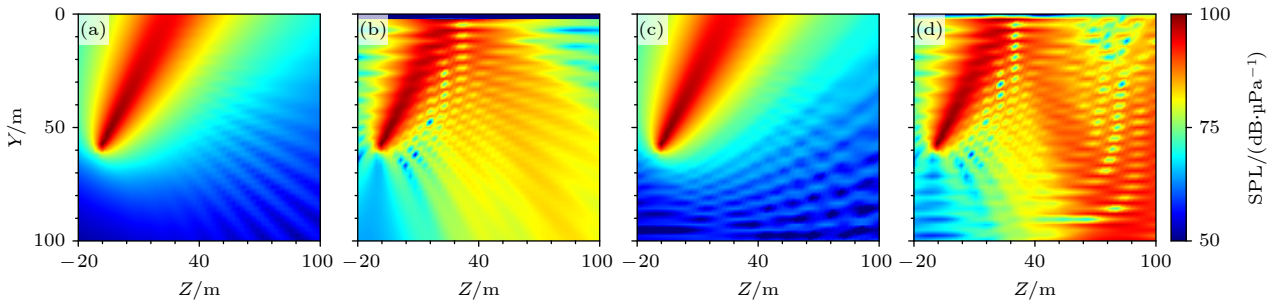


图 13 掠射角为  $-60^\circ$  时的非线性声场分布 (a) 自由场; (b) 仅有上界面; (c) 仅有下界面; (d) 波导场

Fig. 13. Distribution of nonlinear sound field when oblique angle is  $-60^\circ$ : (a) Free field; (b) only the top boundary; (c) only the bottom boundary; (d) waveguide field.

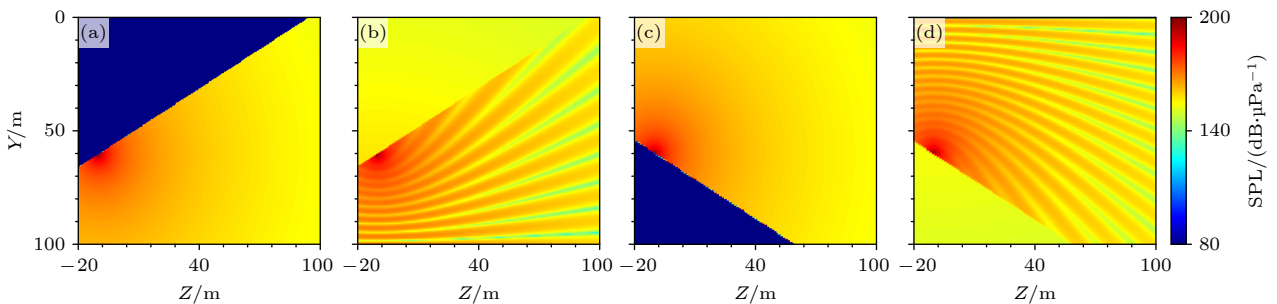


图 14 线性低频声波向界面掠射的声场分布 (a) 自由场, 掠射角为  $60^\circ$ ; (b) 仅有下界面, 掠射角为  $60^\circ$ ; (c) 自由场, 掠射角为  $-60^\circ$ ; (d) 仅有上界面, 掠射角为  $-60^\circ$

Fig. 14. Sound field distribution of linear low-frequency acoustic wave grazing on the boundary: (a) Free field, oblique angle is  $60^\circ$ ; (b) only the bottom boundary, oblique angle is  $60^\circ$ ; (c) free field, oblique angle is  $-60^\circ$ ; (d) only the top boundary, oblique angle is  $-60^\circ$ .

束能量较弱, 反射波束的能量不再集中于反射轴线上, 而是呈现扩散的趋势.

为了体现界面反射对于线性声场和非线性声场影响的差别, 仿真计算了在仅有下界面、仅有上界面时, 声源直接产生的 200 Hz 线性低频声波向界面掠射的声场结果, 并将相对应的自由场声场分布作为参考, 结果如图 14 所示.

通过与图 12、图 13 中结果对比可以发现, 与非线性声场不同, 界面对线性声场的影响比较简单. 声源直接辐射产生的低频线性声场无法观察到

明显的波束特征, 也并不存在像非线性声场那样的干涉增强或减弱现象, 声场仅存在干涉引起的明暗相间的条纹.

#### 4.4 波导界面对非线性声传播特性影响的内在机理

声源深度和掠射角从本质上可以归为声源空间几何位置这一因素, 为了深入地研究波导界面对非线性声传播特性产生影响的内在机制, 从决定非线性声场分布的关键因素, 即非线性虚源密度函数

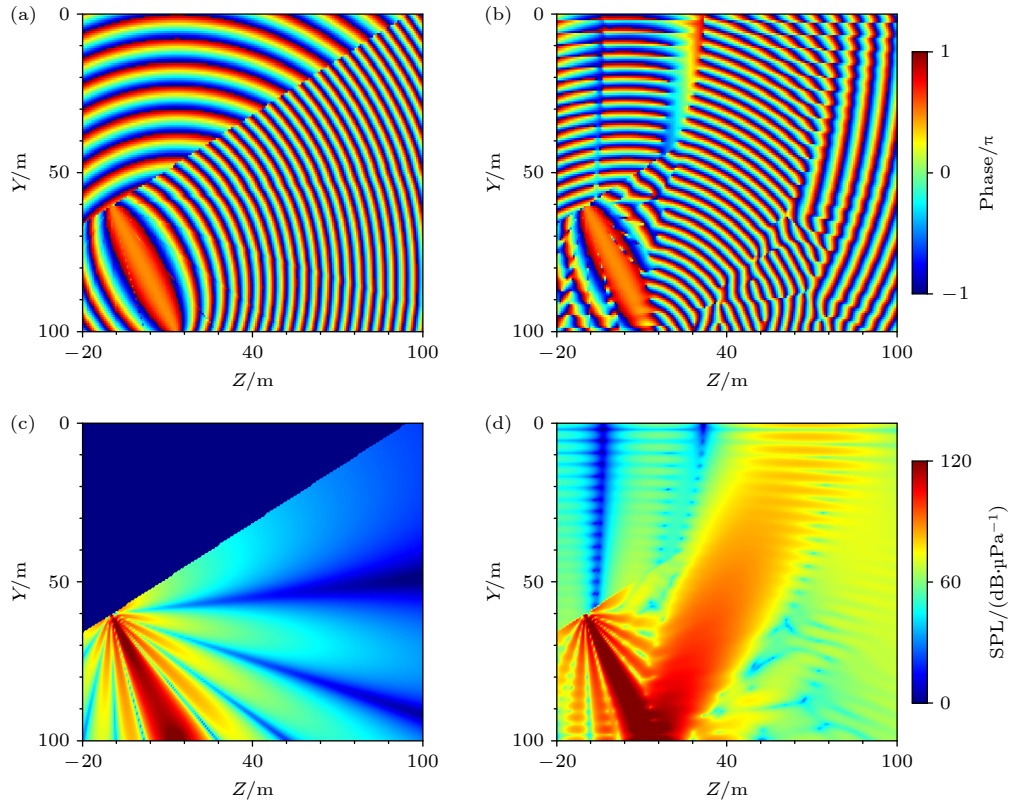


图 15 被积函数的相位和幅值 (掠射角为  $60^\circ$ ) (a) 自由场相位; (b) 波导场相位; (c) 自由场 SPL; (d) 波导场 SPL  
 Fig. 15. Phase and amplitude of the integrand function (oblique angle is  $60^\circ$ ): (a) Phase of free field; (b) phase of waveguide field; (c) SPL of free field; (d) SPL of waveguide field.

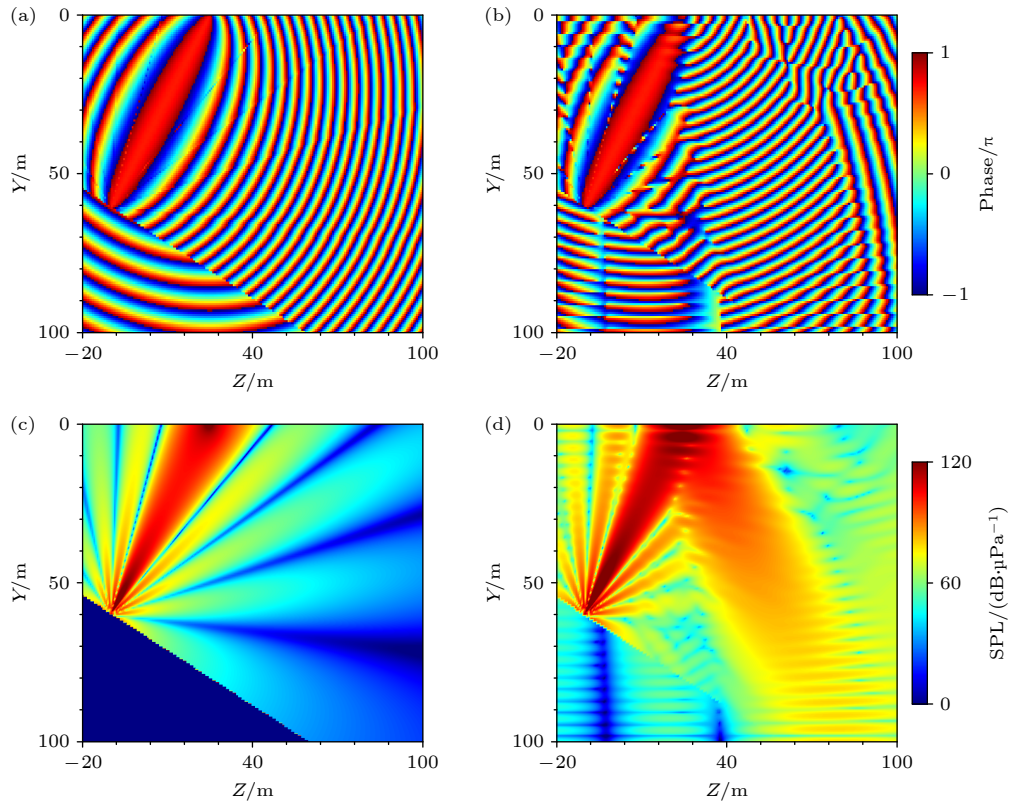


图 16 被积函数的相位和幅值 (掠射角为  $-60^\circ$ ) (a) 自由场相位; (b) 波导场相位; (c) 自由场 SPL; (d) 波导场 SPL  
 Fig. 16. Phase and amplitude of the integrand function (oblique angle is  $-60^\circ$ ): (a) Phase of free field; (b) phase of waveguide field; (c) SPL of free field; (d) SPL of waveguide field.

着手考虑,并对(6)式中被积函数的幅度和相位分布进行了仿真,将自由场结果作为对比,结果如图15和图16所示.其中,仿真参数同4.3节,声源掠射角为 $\pm 60^\circ$ 时选取的观察点分别是差频波束的首次反射点,它们的坐标分别为(0 m, 100 m, 13 m)和(0 m, 0 m, 25 m).

图15(a)和图16(a)中被积函数的相位在“声源中心-观察点”连线附近区域是稳定的,而在该区域外将呈现均匀的振荡现象,图15(c)和图16(c)中被积函数的幅值在声源中心与观察点处所占权重更大,这反映出“声源中心-观察点”连线附近区域是非线性虚源积累的重要区域,该区域内的任何细微变化都会对最终非线性声场的分布产生较大影响.图15(b)和图16(b)中波导界面的反射破坏了相位在连线附近区域乃至整个区域的均匀性;图15(d)和图16(d)中由于界面的存在可以直接观察到“虚源波束”的反射,因此从相位和幅值两方面都体现出波导界面将会改变观测区域内非线性虚源的累积过程,从而对非线性声场的最终分布产生深刻影响.

## 5 结 论

本文针对波导中非线性声传播问题建立了理论分析模型与数值计算方法,研究了非线性声波发生界面声反射的特性.得到的具体结论如下.

1) 频率的提升会增强非线性波束的定向性能,从而进一步提升其在波导中的抗干涉能力,非线性波束的指向性随着频率升高而更加尖锐.

2) 当声源靠近波导界面时,波束在靠近该界面的一侧区域内出现旁瓣,原本集中于声轴附近且均匀变化的波束能量出现明显的间断现象.

3) 声源倾斜入射时不同的掠射角将会直接影响到波束与界面相互作用的先后次序,并影响声场的能量分布.波导界面通过影响非线性虚源的空间幅值和相位分布来决定最终的声场结构.

本文所建立的理论模型考虑了实际声源辐射衍射波束的特性和声场广角信息精度,有助于揭示大掠射角情况下非线性相互作用过程中差频波束在波导界面反射作用下的传播规律.本文在建立模型时使用了理想的边界条件,但真实的海洋波导界面会更加复杂.当考虑阻抗界面时,声反射系数将与频率、声源、入射角和边界阻抗等多种因素有关,每

个镜像源的强度不再是原始声源的简单复制,而是需要乘以一个累积的反射系数的乘积.每次反射都会使镜像源的强度减弱,并引入相位偏移.此外,本文所使用的镜像源方法通常用于解决静态光滑界面的声反射和传播问题.对于动态界面的情形,以海洋波导环境为例,当界面经历深度方向的运动或位移时,镜像源由于多普勒效应而发生频移,从而改变观察到的频率.未来我们将考虑使用改进的镜像源方法<sup>[30]</sup>进行声场建模;对于界面非光滑的情形,比如起伏的海面或不平整的海底,从严格意义上来说镜像源方法不再适用,因为声波被粗糙界面反射后,入射声线和反射声线之间的关系不再是一一对应的.未来我们将考虑利用小斜率近似方法<sup>[31]</sup>建立粗糙界面的声散射模型,并引入与粗糙界面相关的平均反射系数,然后结合镜像源方法对粗糙界面影响下的非线性声传播特性开展研究,并通过与有限差分方法<sup>[32]</sup>进行对比,分析界面平整性偏差对镜像源方法适用性的影响,并给出界面平整性的量化判断标准.

## 参考文献

- [1] Chen H Y, Zhu Z R, Yang D S 2024 *IEEE J. Oceanic Eng.* **49** 1127
- [2] Liu Y F, Zhao Y J, Gerstoft P, Zhou F, Qiao G 2023 *J. Acoust. Soc. Am.* **154** 232
- [3] Wang H, Tang J M, Wu Z P, Liu Y 2022 *IEEE Sens. J.* **22** 13640
- [4] Zhuang T, Zhong J X, Lu J 2024 *IEEE 14th International Symposium on Chinese Spoken Language Processing Beijing, China, November 7–10, 2024* p66
- [5] Härmä A, Van De Par S, De Bruijn W 2008 *124th Audio Engineering Society Convention Amsterdam, The Netherlands, May 17–20, 2008* p160
- [6] Aoki S, Toba M, Tsujita N 2012 *Appl. Acoust.* **73** 1289
- [7] Tan E L, Gan W S, Chen C H 2012 *Asia Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference Hollywood, CA, December 3–6, 2012* p1
- [8] Qian Z W, Shao D Y 1986 *Acta Phys. Sin.* **35** 1374 (in Chinese) [钱祖文, 邵道远 1986 *物理学报* **35** 1374]
- [9] Zhou T, Li H S, Zhu J J, Wei Y K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 084302 (in Chinese) [周天, 李海森, 朱建军, 魏玉阔 2014 *物理学报* **63** 084302]
- [10] Szabo J P, Bent A D 2019 *J. Acoust. Soc. Am.* **145** 795
- [11] Nomura H, Hedberg C M, Kamakura T 2012 *Appl. Acoust.* **73** 1231
- [12] Červenka M, Bednařík M 2019 *J. Acoust. Soc. Am.* **146** 2163
- [13] Chen Z, Li M T, Zhong J X, Lu J, Zhang D 2024 *Tech. Acoust.* **43** 832 (in Chinese) [陈哲, 李梦同, 钟家鑫, 卢晶, 章东 2024 *声学技术* **43** 832]
- [14] Wen J J, Breazeale M A 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1752
- [15] Červenka M, Bednarik M 2013 *J. Acoust. Soc. Am.* **134** 933
- [16] Zhuang T, Zhong J X, Niu F, Mahmoud K, Ray K, Lu J 2023

- J. Acoust. Soc. Am.* **153** 124
- [17] Shi H K, Yang D S, Shi J, Zhang H Y, Cao Y 2025 *Acta Acoust.* **50** 1254 (in Chinese) [施浩康, 杨德森, 时洁, 张昊阳, 曹源 2025 *声学学报* **50** 1254]
- [18] Zaitsev V Y, Ostrovskii L A, Sutin A M 1987 *Sov. Phys. Acoust. -USSR* **33** 21
- [19] Donskoi D M, Zaitsev V Y, Naugolnykh K A, Sutin A M 1993 *Acoust. Phys.* **39** 141
- [20] Li J K, Yang D S, Chen G Z, Li S Zhang H Y 2022 *Wave Motion* **112** 102939
- [21] Muir T G, Mellenbruch L L, Lockwood J C 1977 *J. Acoust. Soc. Am.* **62** 271
- [22] Zhong J X, Wang S P, Kirby R, Qiu X J 2020 *J. Acoust. Soc. Am.* **148** 2327
- [23] Cao Y, Shi J, Zhang J Y, Cheng Y Z, Shi H K 2025 *J. Mar. Sci. Eng.* **13** 286
- [24] Kim H J, Schmerr L W, Sedov A 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **119** 1971
- [25] Yang J, Ji P F 2022 *Parametric Array Loudspeaker: From Theory to Application* (Beijing: Science Press) pp41–45 (in Chinese) [杨军, 姬培锋 2022 *参量阵扬声器: 从理论到应用* (北京: 科学出版社) 第 41—45 页]
- [26] Porter M B, Buckler H P 1987 *J. Acoust. Soc. Am.* **82** 1349
- [27] Thorp W H 1967 *J. Acoust. Soc. Am.* **42** 270
- [28] Gusev V A 2014 *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction Saint Petersburg, Russia, May 26–30, 2014* p107
- [29] Esipov I B, Popov O E, Soldatov G V 2019 *Acoust. Phys.* **65** 391
- [30] Siderius M, Porter M B 2008 *J. Acoust. Soc. Am.* **124** 137
- [31] Jackson D, Olson D R 2020 *J. Acoust. Soc. Am.* **147** 56
- [32] Higgins A, Siderius M 2024 *J. Acoust. Soc. Am.* **156** 119

## Characteristics of nonlinear acoustic propagation in shallow-water waveguides\*

CAO Yuan<sup>1)2)3)</sup> YANG Desen<sup>1)2)3)</sup> SHI Jie<sup>1)2)3)†</sup>  
 ZHANG Haoyang<sup>1)2)3)</sup> ZHANG Jiangyi<sup>1)2)3)</sup>

1) (National Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

2) (Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security of Ministry of Industry and Information Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

3) (College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

( Received 17 September 2025; revised manuscript received 27 November 2025 )

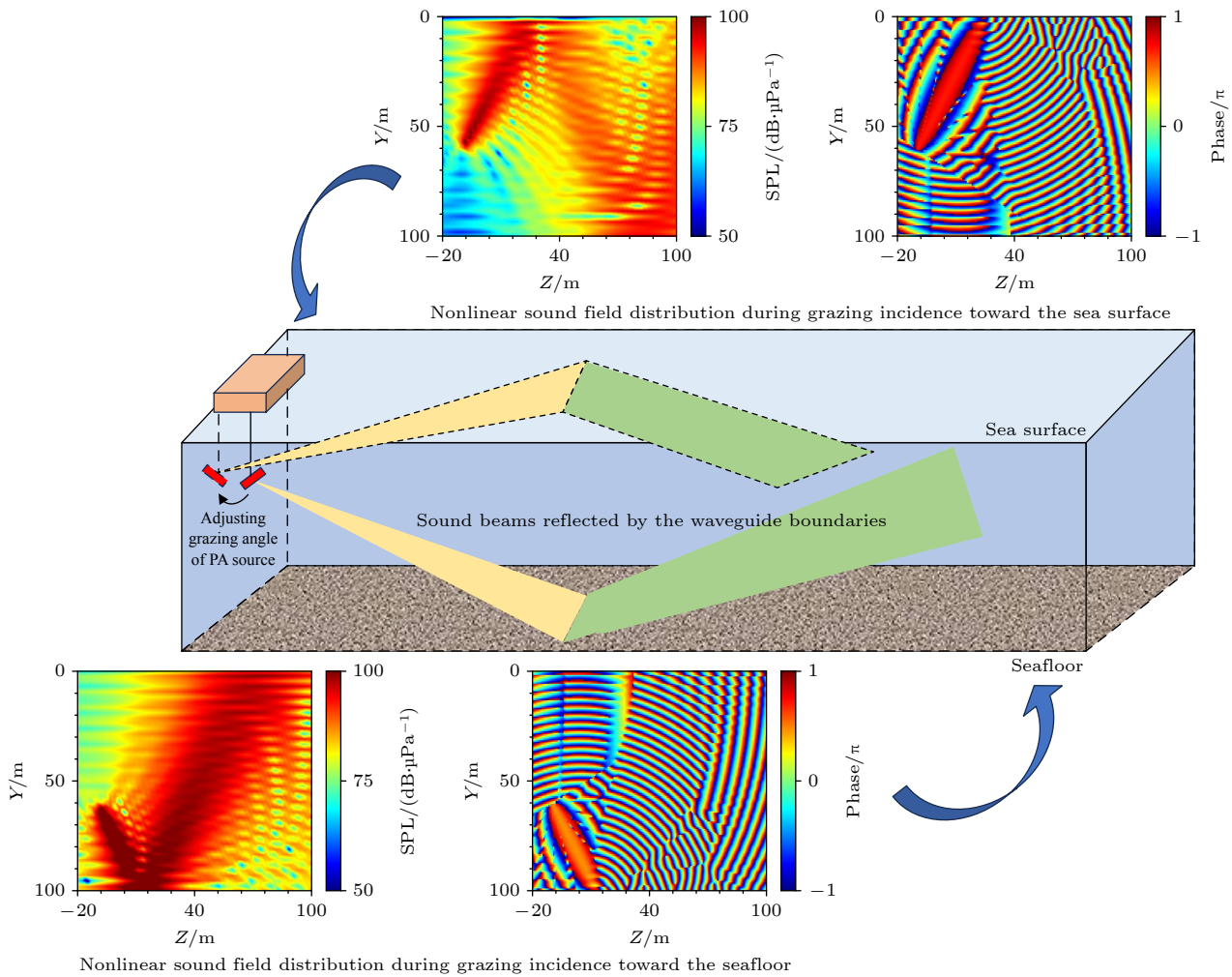
### Abstract

The nonlinear acoustic propagation in shallow-water waveguides is a fundamental problem in the propagation of sound waves in complex marine environments. It is of significant importance for applications in fields such as underwater nonlinear sound field regulation and target detection. In this study, a theoretical model and a numerical method are established to investigate nonlinear sound propagation in waveguides. The physical characteristics of the reflection of difference-frequency beams at the waveguide boundaries in nonlinear interaction processes are examined. Based on the quasi-linear theory of nonlinear wave equation, a theoretical model capable of accurately computing wide-angle sound field information at large grazing angles is developed by introducing a high-precision non-paraxial approximation approach and using the image source method to analyze the nonlinear sound field in the waveguide. The effects of frequency (200—500 Hz), source depth (20 and 80 m), and grazing angle ( $\pm 60^\circ$ ) on nonlinear sound propagation are studied, and their underlying mechanisms are analyzed. The results indicate that increasing the frequency can improve the orientation performance of the nonlinear beam, thereby enhancing its interference resistance in the waveguide. When the sound source is near a waveguide boundary, the nonlinear beam develops side lobes in the area close to this

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 52327901, 52271342, 52171333, 52250344).

† Corresponding author. E-mail: [shijie@hrbeu.edu.cn](mailto:shijie@hrbeu.edu.cn)

boundary. The beam energy, which was originally concentrated near the sound axis and varied uniformly, exhibits obvious discontinuity, and the sound pressure distribution along the sound axis shows fluctuations. The grazing angle of the source directly affects the sequence of boundary reflections, which in turn changes the sound energy distribution and leads to enhanced or weakened interference effects. Waveguide boundaries influence the spatial amplitude distribution and phase distribution of the nonlinear virtual source, thereby modifying the spatial accumulation process and significantly affecting the final sound field distribution. The model developed in this work takes into account the diffraction characteristics of beams emitted by real sources and ensures accuracy in wide-angle sound field modeling. It helps reveal the propagation laws of difference-frequency beams under waveguide boundary reflection during the nonlinear interaction at large grazing angles, and provides theoretical support for fine regulation technologies of directional beams such as active noise control and low-frequency active detection in underwater waveguide environments.



**Keywords:** shallow-water waveguide, nonlinear acoustic propagation, difference-frequency beam, nonlinear acoustics

**DOI:** [10.7498/aps.75.20251274](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251274)

**CSTR:** [32037.14.aps.75.20251274](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251274)



## 浅海波导中非线性声传播特性研究

曹源 杨德森 时洁 张昊阳 张姜怡

### Characteristics of nonlinear acoustic propagation in shallow-water waveguides

CAO Yuan YANG Desen SHI Jie ZHANG Haoyang ZHANG Jiangyi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 041002 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251274

CSTR: 32037.14.aps.75.20251274

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251274>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

多组分尘埃等离子体中非线性尘埃声孤波的传播特征

Propagating characteristics of nonlinear dust acoustic solitary waves in multicomponent dusty plasma

物理学报. 2023, 72(3): 035201 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221843>

含有非热电子和陷俘离子的复杂等离子体中非线性尘埃声波的传播特征

Propagation characteristics of nonlinear dust acoustic solitary waves in complex plasma with nonthermal electrons and trapped ions

物理学报. 2024, 73(7): 075201 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231967>

浅海波导环境不确定性对声源功率估计的影响

Influence of environmental uncertainty on source power estimation in shallow water waveguide

物理学报. 2021, 70(24): 244301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210852>

浅海周期起伏海底环境下的声传播

Sound propagation in shallow water with periodic rough bottom

物理学报. 2021, 70(3): 034302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201233>

浅海粗糙海底声散射建模及声场特性

Acoustic scattering modeling and sound field characteristics of rough seafloor in shallow sea

物理学报. 2024, 73(3): 034301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231472>

基于波束-波数域非相干匹配的浅海运动声源深度估计方法

A method of estimating depth of moving sound source in shallow sea based on incoherently matched beam-wavenumber

物理学报. 2023, 72(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222361>