托卡马克等离子体中电磁测地声模的回旋动理学分析*

陈 哲 1)2) 任海骏 1)† 王 灏 2)

1) (中国科学技术大学, 合肥 230026)

2) (日本国立聚变科学研究所, 土岐 509-5292)

(2025 年 9 月 28 日收到; 2025 年 11 月 13 日收到修改稿)

托卡马克等离子体中的测地声模 (geodesic acoustic mode, GAM) 及其伴随的电磁场扰动在湍流调控与约束改善中发挥着重要作用. 然而, 现有的动理学理论与磁流体力学 (magnetohydrodynamics, MHD) 在描述 GAM 扰动磁场的三维结构上存在一个显著差异, 即动理学描述通常采用平行磁矢势近似, 而无法自洽给出 GAM 的径向与环向磁场扰动. 为弥合理论上的这一差异, 本文在线性电磁回旋动理学框架下, 摒弃了传统的平行磁矢势近似, 保留完整的扰动磁矢势, 并结合准中性条件及安培定律, 自洽地推导了 GAM 的电磁扰动特性. 推导结果首次在动理学层面自洽给出了 GAM 磁场扰动在径向、极向与平行 (环向) 方向上的完整三维结构: 径向与极向磁场扰动呈现 $m=2$ (m 是极向波数) 的驻波形式, 而平行磁场扰动则呈现 $m=1$ 的结构. 该结果在定性上与理想 MHD 理论的预测高度一致, 从而弥合了长期以来两种理论在电磁 GAM 描述上的分歧. 此外, 动理学模型能够清晰区分电子与离子的贡献, 进一步分析表明: 离子热压对径向和极向磁场扰动的作用更为显著, 而电子热压在平行磁场扰动中的贡献相对更大. 这展现了动理学效应对 GAM 电磁特性的细致修正, 为相关实验诊断与数值模拟研究提供了更加精确的理论依据.

关键词: 回旋动理学, 电磁测地声模, 磁场扰动

DOI: 10.7498/aps.75.20251334 **CSTR:** 32037.14.aps.75.20251334

1 引 言

磁约束核聚变是解决全球能源危机的重要途径之一, 而托卡马克作为主流的磁约束装置, 其内部等离子体中的湍流与反常输运问题是实现聚变能源的关键挑战. 在托卡马克等离子体中, 由湍流自发产生的宏观剪切流, 即带状流 (zonal flow, ZF), 在抑制湍流和改善等离子体约束方面发挥着重要作用 [1,2]. 测地声模 (geodesic acoustic mode, GAM) 是环形磁场位形的测地曲率效应引起的带状流高频分支 [3], 其基本物理图像表现为环向对称 (环向模数 $n=0$) 和极向准对称 (极向模数 $m\approx 0$) 的电势扰动和等离子体极向流, 并耦合了极向上下反对称的 $m=1$ 密度和压强边带扰动 [4]. GAM 可由背景湍流通过雷诺应力 [5–8] 或输运调制 [9] 等非线性机制激发, 并反作用于湍流, 在调节湍流和相关输运中起到关键作用, 因此获得了广泛的研究关注. GAM 的扰动电势会带来时变的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 剪切流, 从而能够抑制湍流并降低相关输运 [10]. 由于湍流能量驱动 GAM 幅度的增长, 在其幅度径向峰值附近, 湍流能量会降低, 这是一种幅度调制现象 [11]; 在远离其幅度径向峰值的位置, GAM 的剪切作用对湍流有频率调制作用, 能量由湍流低频成分转移

* 国家自然科学基金 (批准号: 12175228) 和国家重点研发计划 (批准号: 2024YFE03050002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hjren@ustc.edu.cn

到高频成分[12], 上下不对称的压强扰动使得能量可以从 GAM 再反馈给湍流[13,14]. 除湍流激发外, 测地声模还可以被辅助加热产生的快粒子 (energetic particle, EP) 激发, 被称为快粒子驱动的测地声模 (EP-driven GAM, EGAM)[15–17]. 快粒子通过逆朗道阻尼机制将能量传递给 EGAM, 使其表现出不稳定性, 部分通行共振快粒子失去能量转变为捕获粒子, 这会增强芯部快粒子的径向输运和损失[16,18,19]. 此外, EGAM 还能够建立起快粒子加热等离子体的能量通道[20–23], LHD 实验表明, 本底离子的温度在 EGAM 活动期间有显著上升[24].

除电场、压强及密度扰动外, GAM 还包含由等离子体有限热压效应所引起的磁场扰动, 磁场扰动与电场扰动的幅度之比约为 $\mathcal{O}(q\beta/c_s)$[25], 其中 q 为安全因子, β 为等离子体热压与磁压之比, c_s 为等离子体声速. 尽管在低 β 等离子体中, GAM 的磁场扰动远弱于电场扰动, GAM 常被近似为准静电振荡, 但是, 对电磁 GAM 磁场扰动的研究仍具有重要意义. 首先, GAM 的磁场扰动具有特定的空间结构. 例如, 理论[25–32] 与模拟[33,34] 结果表明, 在圆形磁面近似下, GAM 的极向磁场扰动呈现出典型的 $m=2$ 驻波结构, 这与实验观测结果[35–39] 高度一致. 这一特征不仅为实验上利用磁探针等诊断手段识别 GAM 提供了关键依据, 也为结合磁扰动诊断结果与理论表达式反演等离子体参数开辟了新途径. 其次, GAM 的磁场扰动是其作为全局本征模存在的重要条件, 磁场扰动通过环效应耦合, 将不同径向位置的局域 GAM 振荡整合为一个相干的整体结构, 使其能够以单一离散频率的形式全局存在[40–43]. Smolyakov 等[44] 的理论还表明, GAM 的电磁性是其内在属性, 扰动磁场是 GAM 与阿尔芬边带模直接耦合的物理媒介. 最后, GAM 的磁场扰动还是其参与非线性湍流相互作用的关键. T-10 装置上的实验利用双相干分析, 证实了 GAM 与背景宽带电磁湍流之间存在显著的三波耦合[45]. 进一步的分析揭示, 能量主要通过由密度扰动和磁场扰动主导的通道进行非线性传递, 而电势扰动在其中的作用相对较弱[46].

在理论研究方面, 对电磁 GAM 的描述主要有两大框架: 磁流体力学 (magnetohydrodynamics, MHD) 和动理学 (kinetics). 然而, 目前这两种模型在 GAM 磁场扰动的描述上存在一个显著差异. MHD 模型作为一种流体近似, 为理解 GAM 的宏观磁场结构提供了清晰的物理图像. 基于理想 MHD 理论, 可以自然地给出扰动磁场 $\delta\boldsymbol{B}$ 在径向、极向和环向三个方向上的分量. Wahlberg 和 Graves[28,30] 系统分析了 MHD 框架下的电磁 GAM, 指出由于环效应的耦合, GAM 的极向流可驱动一个全局存在的 $m=2$ 极向磁场扰动分量. Ren[25] 的研究进一步证实, 在 MHD 框架下, GAM 存在 $m=2$ 的径向和极向磁场扰动, 以及 $m=1$ 的环向 (近似为平衡磁场的平行方向) 磁场扰动, 其中极向与环向 (平行) 分量大致处于同一量级, 而径向分量则显著更小. 与 MHD 描述相对的是, 动理学理论能够处理速度空间信息, 可以考虑动理学电子效应、波–粒相互作用、有限拉莫尔半径 (finite-Larmor-radius, FLR) 效应以及有限轨道宽度 (finite-orbit-width, FOW) 效应等 MHD 无法处理的微观过程. 然而, 在以往电磁 GAM 的动理学研究中[26,29,31,32,44], 研究者普遍采用平行磁矢势近似, 即假设扰动磁矢势 $\delta\boldsymbol{A}$ 主要由其平行分量贡献: $\delta\boldsymbol{A}\approx\delta A_{/\!/}\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{b}$ 为平衡磁场的单位矢量. 在该近似下, 磁场扰动由 $\delta\boldsymbol{B}=\nabla\times\delta\boldsymbol{A}\approx\nabla\times(\delta A_{/\!/}\boldsymbol{b})$ 决定, 这仅能给出由 $\delta A_{/\!/}$ 的径向梯度产生的极向磁场扰动 δB_θ, 而径向和平行分量 (δB_r 与 $\delta B_{/\!/}$) 则被忽略. 这正是动理学模型与 MHD 模型在电磁 GAM 描述上的核心差异. 尽管在该近似下动理学模型能够得到与 MHD 结果定性一致的 δB_θ, 但对 δB_r 和 $\delta B_{/\!/}$ 描述的系统性缺失, 是目前电磁 GAM 动理学研究的共同局限. 值得注意的是, Kennedy 等[47] 的动理学模拟结果表明, 常被忽略的平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$ 对未来聚变堆中高 β 等离子体的不稳定性演化具有至关重要, 甚至可能是决定性的作用.

为消除动理学模型与 MHD 模型在电磁 GAM 描述上的上述差异, 本文基于回旋动理学理论, 摒弃了传统的平行磁矢势近似, 考虑了完整的扰动磁矢势 $\delta\boldsymbol{A}$, 系统地推导了托卡马克等离子体中 GAM 的电磁扰动, 自洽地给出了磁场扰动在径向、极向和平行方向 (环向) 的简明表达式. 计算结果表明, 动理学框架下得到的 GAM 三维磁场扰动在空间结构上与理想 MHD 理论的预测一致. 这不仅从更基本的物理层面验证了 MHD 模型的宏观结论, 更重要的是弥合了长期以来流体理论与动理学理论在电磁 GAM 描述上的差异, 为建立统一、自洽的电磁 GAM 理论奠定了基础. 此外, 由于本文动理学模型内在地包含动理学电子效应, 所得磁场扰动

表达式能够区分电子与离子的贡献, 因此在定量上与单流体 MHD 结果存在差异, 这一差异揭示了动理学效应对 GAM 电磁特性的修正.

本文结构安排如下: 第 2 节介绍所采用的回旋动理学框架下的基本方程; 第 3 节给出详细的电磁 GAM 推导过程及最终的磁场扰动表达式, 并与 MHD 理论结果进行对比讨论; 第 4 节为总结部分.

2 基本方程

本文的理论分析基于线性的电磁回旋动理学框架. 为最终推导出 GAM 的三维电磁扰动结构, 首先需要建立一个自洽的闭合方程组. 该系统由描述粒子响应的线性回旋动理学方程, 以及描述场演化的准中性条件和安培定律构成. 本节将详细介绍这些基本方程.

2.1 回旋动理学方程

在动理学描述中, 粒子的分布函数可写为 $f_j = F_j + \delta F_j$, 其中 F_j 是平衡分布函数, δF_j 是扰动分布函数, 下标 $j = \mathrm{i,e}$ 分别代表 (氢) 离子和电子. 本文采用标准的麦克斯韦分布作为平衡分布, 即 $F_j = n_j/(\pi^{3/2}v_{Tj}^3)\exp(-v^2/v_{Tj}^2)$, 其中 n_j 为粒子数密度, $v_{Tj} \equiv \sqrt{2T_j/m_j}$ 为热速度, T_j 和 m_j 分别为温度和粒子质量.

根据电磁回旋动理学理论[48], 扰动分布函数 δF_j 可以分解为绝热部分和非绝热部分:

$$\delta F_j = -\frac{q_j \delta\phi}{T_j} F_j + \delta h_j. \tag{1}$$

其中, q_j 为粒子电荷; $\delta\phi$ 为扰动静电势; δh_j 为非绝热部分, 其在导心坐标 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{v})$ 相空间的演化由如下线性回旋动理学方程决定:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_{/\!/}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}_{Dj}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\right]\delta h_j \\ &= q_j\frac{F_j}{T_j}\frac{\partial\left\langle\delta\varphi\right\rangle_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial\langle\delta\varphi\rangle_\alpha}{\partial \boldsymbol{X}} \times \boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial F_j}{\partial \boldsymbol{X}}.\end{aligned} \tag{2}$$

在方程 (2) 中, $\boldsymbol{X}$ 为粒子导心位置, 与粒子实际位置 $\boldsymbol{x}$ 的关系为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\rho}_j$, 其中 $\boldsymbol{\rho}_j = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}/\omega_{\mathrm{c}j}$ 是拉莫尔回旋半径矢量, $\omega_{\mathrm{c}j} = q_j B/m_j$ 是粒子回旋频率. 托卡马克平衡磁场在磁通坐标系下可以写为

$$\boldsymbol{B} = I\nabla\zeta + \nabla\zeta\times\nabla\psi,$$

其中 $2\pi\psi$ 是极向磁通, ζ 是环向角, I 是平衡磁场环向分量与大半径的乘积. $\boldsymbol{v}_{Dj}$ 是由磁场曲率和梯度引起的导心磁漂移速度:

$$\boldsymbol{v}_{Dj} = \left[\left(v_{/\!/}^2 + v_\perp^2/2\right)/\omega_{cj}\right]\boldsymbol{b}\times\nabla\ln B,$$

其中 $v_{/\!/}$ 和 $v_\perp$ 是粒子在平行和垂直磁场方向的速度分量. $\delta\varphi \equiv \delta\phi - \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{A}$ 是广义扰动势, 其中 $\delta\boldsymbol{A}$ 为扰动磁矢势. $\langle\cdots\rangle_\alpha \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cdots\mathrm{d}\alpha$ 表示在导心坐标 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{v})$ 相空间对回旋相位角 α 的平均, 用于消除快速的回旋运动. 本文中未标注具体位置的扰动势 $\delta\phi$, $\delta\varphi$, $\delta\boldsymbol{A}$ 均指在粒子实际位置 $\boldsymbol{x}$ 处的值; 对于导心 $\boldsymbol{X}$ 处的扰动势, 会明确写为 $\delta\phi(\boldsymbol{X})$, $\delta\varphi(\boldsymbol{X})$, $\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$.

本文考虑大纵横比、圆形磁面的托卡马克等离子体, 使用 (r,θ,ζ) 空间环坐标系, 其中 r 和 θ 分别是小半径和极向角, 并假定平衡态时温度 T_j 和数密度 n_j 具有平坦的径向分布. 考虑 GAM 的扰动量 (以 $\delta\phi$ 为例) 具有如下谐波形式:

$$\delta\phi = \sum_m \delta\phi_m \exp[\mathrm{i}(m\theta + k_r r - \omega t)],$$

其中 k_r 和 ω 分别是径向波数和模式频率. 考虑局域近似, 即假设 GAM 径向波长远小于径向尺度 ($k_r r \gg 1$), 则粒子位置处与导心位置处扰动势之间的差异主要是由两个位置的小半径不同导致的. 粒子位置小半径 $r_{\boldsymbol{x}} = r$, 而导心位置小半径 $r_{\boldsymbol{X}} = r - \rho_j\cos\alpha$, 因此两个位置处的扰动势 (同样以 $\delta\phi$ 为例) 满足

$$\delta\phi(\boldsymbol{x}) \approx \delta\phi(\boldsymbol{X})\exp(\mathrm{i}k_r\rho_j\cos\alpha).$$

对广义势进行回旋平均, 可得:

$$\begin{aligned}\langle\delta\varphi\rangle_\alpha =& \mathrm{J}_0(k_r\rho_j)\left[\delta\phi(\boldsymbol{X}) - v_{/\!/}\delta A_{/\!/}(\boldsymbol{X})\right] \\ &+ \frac{v_\perp}{k_r}\mathrm{J}_1(k_r\rho_j)\delta B_{/\!/}(\boldsymbol{X}),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 J_l 表示 l 阶贝塞尔函数, $\delta B_{/\!/} \equiv \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A})$ 是平行磁场扰动. 值得强调的是, 该表达式中的最后一项 (平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$ 的贡献) 是源于 $\boldsymbol{v}_\perp\cdot\delta\boldsymbol{A}_\perp$ 的回旋平均. 在传统的平行磁矢势近似 (即假设 $\delta\boldsymbol{A} \approx \delta A_{/\!/}\boldsymbol{b}$) 下, 该项会被忽略, 因此无法体现平行磁场扰动的效应. 为了获得 GAM 磁场扰动的完整三维结构, 尤其是由抗磁效应驱动的平行分量, 本文在模型建立之初便自洽地保留了该贡献.

基于以上的假设与分析, (2) 式可以简化为以极向角 θ 为变量的常微分方程:

$$\partial_\theta \delta h_j - \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{d}j}}{\omega_{\mathrm{t}j}}\sin\theta\delta h_j - \mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{t}j}}\delta h_j = -\mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{t}j}}\frac{q_j F_j}{T_j}\langle\delta\varphi\rangle_\alpha, \tag{4}$$

其中, 渡越频率 $\omega_{\mathrm{t}j}$ 和磁漂移频率 $\omega_{\mathrm{d}j}$ 分别定义为

$$\omega_{\mathrm{t}j} \equiv \frac{v_{/\!/}}{qR_0}, \quad \omega_{\mathrm{d}j} \equiv \frac{k_r}{\omega_{cj}R_0}\left(v_{/\!/}^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right), \tag{5}$$

这里, R_0 为磁轴处大半径. 将 $\langle\delta\varphi\rangle_\alpha$ 写为极向谐波形式:

$$\langle\delta\varphi\rangle_\alpha = \sum_m \langle\delta\varphi\rangle_{\alpha,m}\exp(\mathrm{i}m\theta),$$

基于方程 (3), $\langle\delta\varphi\rangle_{\alpha,m}$ 满足:

$$\begin{aligned}\langle\delta\varphi\rangle_{\alpha,m} = &\Big[\mathrm{J}_0(k_r\rho_j)\left(\delta\phi_m - v_{/\!/}\delta A_{/\!/,m}\right) \\ &+ \frac{v_\perp}{k_r}\mathrm{J}_1(k_r\rho_j)\delta B_{/\!/,m}\Big] \\ &\times \exp\left\{\mathrm{i}\left[k_r(r-\rho_j\cos\alpha)-\omega t\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

借助 (6) 式, 可以求解 (4) 式最终得到非绝热响应部分为

$$\begin{aligned}\frac{\delta h_j}{q_jF_j/T_j} = &\langle\delta\varphi\rangle_\alpha - \sum_{p,k,l=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^{p-k}\mathrm{J}_{p+l-k}(n_{\mathrm{d}j}) \\ &\times \mathrm{J}_l(n_{\mathrm{d}j})\frac{(l-k)\langle\delta\varphi\rangle_{\alpha,p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{(l-k)+\omega/\omega_{tj}},\end{aligned} \tag{7}$$

其中,

$$n_{\mathrm{d}j} \equiv \omega_{\mathrm{d}j}/\omega_{\mathrm{t}j} = qk_r(v_{/\!/}^2 + v_\perp^2/2)/(v_{/\!/}\omega_{\mathrm{c}j}).$$

2.2 准中性条件与安培定律

2.1 节得到了扰动分布函数对扰动电磁场的依赖关系, 为构成封闭的方程组, 还需要场的控制方程, 即准中性条件:

$$\sum_j q_j\int\delta F_j\mathrm{d}^3v = 0,$$

和安培定律

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{B} = \mu_0\sum_j q_j\int\boldsymbol{v}\delta F_j\mathrm{d}^3v.$$

这两个条件均建立在粒子实际位置 $\boldsymbol{x}$ 处, 因此相应的速度空间积分需在粒子坐标 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 相空间中进行. 从 (6) 式和 (7) 式可以看出, 在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 相空间, δh_j 对回旋角 α 的依赖关系是 $\exp(-\mathrm{i}k_r\rho_j\cos\alpha)$. 为简化后续积分运算, 这里定义一个与回旋角无关的量 $\delta\hat{h}_j$, 使得 $\delta h_j = \delta\hat{h}_j\exp(-\mathrm{i}k_r\rho_j\cos\alpha)$. 通过这一变换, 在进行速度空间积分时, 对回旋角的积分可以预先完成, 从而得到相应的贝塞尔函数因子.

将 (1) 式代入准中性条件可得:

$$\sum_{j=\mathrm{i,e}}\frac{n_jq_j^2}{T_j}\delta\phi = \sum_{j=\mathrm{i,e}}q_j\int\mathrm{J}_0(k_r\rho_j)\delta\hat{h}_j\,\mathrm{d}^3v. \tag{8}$$

(8) 式的左侧代表了由绝热响应引起的电荷密度扰动, 右侧则代表了非绝热响应的贡献. 对于安培定律, 由于本文的动理学模型包含了完整的三维扰动磁矢势, 因此需要在平行和垂直方向分别考虑. 在局域近似下, $\nabla_\perp^2 \approx -k_r^2$, 安培定律的平行分量给出平行磁矢势扰动 $\delta A_{/\!/}$ 的控制方程:

$$k_r^2\delta A_{/\!/} = \mu_0\sum_{j=\mathrm{i,e}}q_j\int v_{/\!/}\mathrm{J}_0(k_r\rho_j)\delta\hat{h}_j\,\mathrm{d}^3v. \tag{9}$$

该式表明平行磁矢势扰动是由非绝热响应引起的平行电流扰动导致的. 安培定律的垂直分量 ($\boldsymbol{b}\times\nabla r$ 方向) 则给出平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$ 的控制方程:

$$\frac{\delta B_{/\!/}}{B} = -\frac{\mu_0}{B^2}\sum_{j=\mathrm{i,e}}\int m_jv_\perp^2\frac{\mathrm{J}_1(k_r\rho_j)}{k_r\rho_j}\delta\hat{h}_j\mathrm{d}^3v. \tag{10}$$

(9) 式表明, 平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$ 主要由粒子的抗磁效应产生, 与等离子体垂直压强扰动相关.

3 理论推导

3.1 简化近似与模型截断

第 2 节建立的闭合方程组在形式上是完备的, 但由于环形几何效应会耦合所有极向谐波, 它实际上是一个无限阶的方程组, 无法直接解析求解. 为了从中解析地提取 GAM 的物理特性, 本节引入简化近似, 对方程组进行截断, 从而隔离出主导的物理过程. 相关近似是基于实验与数值模拟所揭示的 GAM 常见特征: 其径向波长通常远大于离子拉莫尔半径, 且空间结构主要由少数低阶极向谐波主导.

首先, 利用 GAM 的长波长特性[49], 引入两个小参数: $k_r\rho_j \ll 1$ 和 $n_{\mathrm{d}j} \sim qk_r\rho_j \ll 1$. 在扰动分布函数中存在两种贝塞尔函数, 一种以 $k_r\rho_j$ 为变量 (如 $\mathrm{J}_0(k_r\rho_j)$), 另一种以 $n_{\mathrm{d}j}$ 为变量 (如 $\mathrm{J}_l(n_{\mathrm{d}j})$), 它们分别对应 FLR 和 FOW 效应. 基于引入的两个小参数, 可以将 $\mathrm{J}_0(k_r\rho_j)$ 展开至 $(k_r\rho_j)^{2p}$ 量级以包含至 p 阶 FLR 效应, 将 $\mathrm{J}_l(n_{\mathrm{d}j})$ 展开至 $(n_{\mathrm{d}j})^{2s}$ 量级以包含至 s 阶 FOW 效应. 本文旨在捕捉主导的动理学效应, 因此仅保留至一阶 FLR 和 FOW 效

应, 即在计算中保留至 $\mathcal{O}[(k_r\rho_j)^2]$ 和 $\mathcal{O}[(n_{\mathrm{d}j})^2]$ 的项.

其次, 为了截断无限的谐波耦合, 需引入一个关于扰动势和扰动场谐波分量的先验量级假设. 对于对静电势扰动, 先前理论[31,32] 表明: $\delta\phi_m/\delta\phi_0\sim\mathcal{O}[(k_r\rho_{\mathrm{i}})^{|m|}]$. 磁扰动是由等离子体有限 β 效应产生的, 且在 MHD 理论框架下主要谐波 ($m=1,2$) 的幅度相近[25], 这里考虑低 β_j 等离子体, 并假定 $\beta_{\mathrm{i}}\sim\beta_{\mathrm{e}}\sim\mathcal{O}[(k_r\rho_{\mathrm{i}})^2/q^2]$, 其中 $\beta_j\equiv 2\mu_0 n_jT_j/B^2$ 是等离子体电子 ($j=\mathrm{e}$) 或离子 ($j=\mathrm{i}$) 的热压与磁压之比. 这样就可以对磁场扰动采用一个宽松的量级假设: 在 $|m|\leqslant 2$ 的主要谐波范围内, $v_{T\mathrm{i}}\delta A_{//,m}/\delta\phi_0$ 和 $v_{T\mathrm{i}}\delta B_{//,m}/(k_r\phi_0)$ 的量级上限均设为 $\mathcal{O}[(k_r\rho_{\mathrm{i}})^2]$. 对磁扰动采取宽松的量级假设是必要的, 因为它避免了在推导初期就基于不完全的物理图像排除掉关键谐波. 这个假设为所有可能的磁扰动低阶谐波都设定了一个安全的幅度上限. 后续的自洽计算结果将表明, 所有最终得到的磁扰动谐波分量, 其幅度均未超过此上限, 从而验证了该假设的有效性. 基于此, 可以将模型截断, 仅保留 $|m|\leqslant 2$ 的谐波分量.

进一步, 基于该量级假设, 还可以对回旋平均的广义势表达式 ((3) 式) 中的各项进行量级分析, 以评估垂直磁矢势扰动 $\delta A_\perp$ 的贡献 (体现在平行磁场扰动 $\delta B_{//}$ 上) 和平行磁矢势扰动 $\delta A_{//}$ 的贡献, 二者对应项之比为

$$\frac{v_\perp J_1(k_r\rho_j)\delta B_{//}(\boldsymbol{X})}{k_rJ_0(k_r\rho_j)v_{//}\delta A_{//}(\boldsymbol{X})}\sim\mathcal{O}(k_r\rho_j)\ll 1. \tag{11}$$

这一关系的物理原因在于回旋运动的对称性. 平行项 $v_{//}\delta A_{//}$ 不含快速回旋的速度分量, 在回旋一周的时间尺度上可近似视为常数, 因此其零阶贡献在回旋平均后得以保留, 代表了粒子沿磁力线感受到的平均感应电场. 与之相反的是, $\delta B_{//}$ 项源于 $\boldsymbol{v}_\perp\cdot\delta\boldsymbol{A}_\perp$ 的贡献, 由于速度矢量 $\boldsymbol{v}_\perp$ 的快速旋转, 其零阶贡献在回旋平均后相互抵消为零, 其非零的贡献来自于 $\delta\boldsymbol{A}_\perp$ 在拉莫尔轨道尺度上的空间不均匀性, 这是一种高阶修正效应, 其大小正比于小参数 $k_r\rho_j$. 因此, 在长波长近似下, 磁扰动对回旋平均的广义势的贡献是由 $\delta A_{//}$ 主导的, 而 $\delta B_{//}$ 的贡献则是更高 1 阶的小量. 然而, 尽管 $\delta B_{//}$ 在回旋平均的广义势中的贡献是高阶的, 但它本身作为平行磁场扰动, 是构成 GAM 扰动磁场三维结构不可或缺的分量, 因此我们在表达式中保留了该项.

3.2 GAM 频率与平行磁矢势扰动

基于 3.1 节的简化近似, 将粒子扰动分布函数 ((1) 式和 (7) 式) 代入准中性条件 ((8) 式) 和平行方向安培定律 ((9) 式), 根据准中性条件和平行安培定律的 $m=0,\pm1,\pm2$ 这五个谐波分量方程可得:

$$\sum_{j=\mathrm{i,e}}\left[\frac{1}{2}L^j_{2,0}(\omega)\delta\phi_0+\frac{1}{2}D^j_{2,0}(\omega)\delta\phi_0-\mathrm{i}D^j_{1,0}(\omega)\delta\phi_1\right]=0, \tag{12a}$$

$$\sum_{j=\mathrm{i,e}}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,0}(\omega)\delta\phi_0+D^j_{0,0}(\omega)\delta\phi_1-D^j_{0,1}(\omega)v_{Tj}\delta A_{//,1}\right]=0, \tag{12b}$$

$$\sum_{j=\mathrm{i,e}}\left[\frac{1}{4}D^j_{2,0}(\omega)\delta\phi_0-\frac{1}{8}D^j_{2,0}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\delta\phi_0-\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,0}(\omega)\delta\phi_1+\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,0}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\delta\phi_1+D^j_{0,0}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\delta\phi_2-D^j_{0,1}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)v_{Tj}\delta A_{//,2}\right]=0, \tag{12c}$$

$$\delta A_{//,1}+\sum_{j=\mathrm{i,e}}\frac{2\beta_j}{(k_r\rho_{Tj})^2}\frac{T_j}{n_j}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,1}(\omega)\frac{\delta\phi_0}{v_{Tj}}+D^j_{0,1}(\omega)\frac{\delta\phi_1}{v_{Tj}}+\left(\frac{n_j}{2T_j}-D^j_{0,2}(\omega)\right)\delta A_{//,1}\right]=0, \tag{12d}$$

$$\begin{aligned}\delta A_{//,2}+\sum_{j=\mathrm{i,e}}\frac{2\beta_j}{(k_r\rho_{Tj})^2}\frac{T_j}{n_j}&\left[\frac{1}{4}D^j_{2,1}(\omega)\frac{\delta\phi_0}{v_{Tj}}-\frac{1}{8}D^j_{2,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\delta\phi_0}{v_{Tj}}-\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,1}(\omega)\frac{\delta\phi_1}{v_{Tj}}+\frac{\mathrm{i}}{2}D^j_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\delta\phi_1}{v_{Tj}}\right.\\&\left.+D^j_{0,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\delta\phi_2}{v_{Tj}}+\left(\frac{n_j}{2T_j}-D^j_{0,2}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\delta A_{//,2}\right]=0,\end{aligned} \tag{12e}$$

以及 $\delta A_{//,0}=0,\delta A_{//,1}=\delta A_{//,-1},\delta A_{//,2}=-\delta A_{//,-2}$, $\delta\phi_1=-\delta\phi_{-1},\delta\phi_2=\delta\phi_{-2}$. 其中, $\rho_{Tj}\equiv v_{Tj}/\omega_{\mathrm{c}j}$ 是 j 种粒子拉莫尔半径的热力学平均值, $D^j_{n,m}(\omega)$ 和 $L^j_{n,m}$ 分别源于 FOW 和 FLR 效应, 定义如下:

$$D_{n,m}^{j}(\omega) \equiv \int \frac{(n_{\mathrm{d}j})^{n}}{1-\omega/\omega_{tj}}\left(\frac{v_{/\!/}}{v_{Tj}}\right)^{m}\frac{F_j}{T_j}\mathrm{d}^3v, \tag{13}$$

$$L_{n,m}^{j} \equiv \int (k_r\rho_j)^{n}\left(\frac{v_{/\!/}}{v_{Tj}}\right)^{m}\frac{F_j}{T_j}\mathrm{d}^3v. \tag{14}$$

值得注意的是, (12) 式中仅包含静电势扰动与平行磁矢势扰动, 而并未出现平行磁场扰动. 这是因为基于扰动势和扰动场的量级上限假设, (12) 式中与 $\delta B_{/\!/}$ 相关的项均是 $\mathcal{O}[(k_r\rho_{Tj})^3]$ 或更高阶, 因此在保留至一阶 FLR 与 FOW 效应的量级分析中被自洽省略了. 这说明仅考虑一阶 FLR 和 FOW 效应时, 平行磁矢势扰动和垂直磁矢势扰动 (或者说平行磁场扰动) 是解耦的, 可以证明 (12) 式与平行磁矢势近似 ($\delta\boldsymbol{A}\approx\delta A_{/\!/}\boldsymbol{b}$) 下的方程组 (文献 [32] 中的 (16) 式) 是等价的. 换言之, 在电磁 GAM 的动理学描述中, 平行磁矢势近似 (即假设 $\delta\boldsymbol{A}\approx\delta A_{/\!/}\boldsymbol{b}$) 的自洽性仅在最低阶 (一阶)FLR 和 FOW 效应的范畴内成立. 在此近似下, 虽然无法描述平行磁场扰动, 但其求解出的平行磁矢势 $\delta A_{/\!/}$ 本身在对应量级上是准确的. 然而, 若要将分析拓展至包含高阶的 FLR 和 FOW 效应, 此近似便不再适用. 届时, 平行与垂直磁矢势扰动将发生耦合, 必须采用完整的三维扰动磁矢势进行自洽求解. 若仍沿用平行磁矢势近似, 不仅会继续忽略 $\delta B_{/\!/}$ 的存在, 其计算出的 $\delta A_{/\!/}$ 本身也将因忽略了高阶耦合效应而变得不再准确.

将平衡分布函数 F_j 代入 (13) 式和 (14) 式积分可得:

$$\begin{aligned}
L_{2,0}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}(k_r\rho_{Tj})^2,\\
D_{0,0}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}\left[1+\xi_j Z(\xi_j)\right],\\
D_{0,1}^{j}(\omega) &= \xi_j D_{0,0}^{j}(\omega),\\
D_{0,2}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}\left[\xi_j^2+\frac{1}{2}+\xi_j^3 Z(\xi_j)\right],\\
D_{1,0}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}(qk_r\rho_{Tj})\left[\xi_j+\left(\xi_j^2+\frac{1}{2}\right)Z(\xi_j)\right],\\
D_{1,1}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}(qk_r\rho_{Tj})\left[\xi_j^2+1+\xi_j\left(\xi_j^2+\frac{1}{2}\right)Z(\xi_j)\right],\\
D_{2,0}^{j}(\omega) &= \frac{n_j}{T_j}(qk_r\rho_{Tj})^2\left\{\xi_j^2+\frac{3}{2}\right.\\
&\quad\left.+\left[\left(\xi_j^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\frac{Z(\xi_j)}{\xi_j}\right\},\\
D_{2,1}^{j}(\omega) &= \xi_j D_{2,0}^{j}(\omega),
\end{aligned} \tag{15}$$

其中, $\xi_j\equiv qR_0\omega/v_{Tj}$, $Z(\xi_j)$ 是著名的等离子体色散函数. 基于 (15) 式, 虽然可以数值求解 (12) 式, 但为了得到一个更直接的解析解, 进一步考虑 $q^2\gg 1$ 的情形, 由于 GAM 常在边缘等离子体区域被观测到, 该假设是合理的. 基于该假设以及 $\omega R_0/v_{T\mathrm{i}}\sim\mathcal{O}(1)$, 有 $\xi_{\mathrm{i}}\gg 1$, 继而可以将 $Z(\xi_{\mathrm{i}})$ 渐进展开为

$$\begin{aligned}
Z(\xi_{\mathrm{i}}) &= \mathrm{i}\sqrt{\pi}\exp(-\xi_{\mathrm{i}}^2)-1/\xi_{\mathrm{i}}-1/(2\xi_{\mathrm{i}}^3)\\
&\quad-3/(4\xi_{\mathrm{i}}^5)-15/(8\xi_{\mathrm{i}}^7)-\cdots.
\end{aligned}$$

同时考虑到电子质量远小于离子质量, 有 $\xi_{\mathrm{e}}\ll 1$, $Z(\xi_{\mathrm{e}})$ 相应的级数展开为

$$\begin{aligned}
Z(\xi_{\mathrm{e}}) &= \mathrm{i}\sqrt{\pi}\exp(-\xi_{\mathrm{e}}^2)-2\xi_{\mathrm{e}}+4\xi_{\mathrm{e}}^3/3-8\xi_{\mathrm{e}}^5/15\\
&\quad+16\xi_{\mathrm{e}}^7/105-\cdots.
\end{aligned}$$

借助等离子体色散函数展开式, 令 $\omega\equiv\omega_r+\mathrm{i}\gamma$ 和 $\tau\equiv T_{\mathrm{e}}/T_{\mathrm{i}}$, 可以解析求解 (12) 式, 最终得到静电势扰动和平行磁矢势扰动为

$$v_{T\mathrm{i}}\delta A_{/\!/,1} = \mathcal{O}[(k_r\rho_{T\mathrm{i}})^3\delta\phi_0], \tag{16a}$$

$$\delta\phi_1 = \frac{\mathrm{i}\tau}{2\omega_r R_0/v_{T\mathrm{i}}}k_r\rho_{T\mathrm{i}}\delta\phi_0, \tag{16b}$$

$$v_{T\mathrm{i}}\delta A_{/\!/,2} = \frac{q(7\beta_{\mathrm{i}}+4\beta_{\mathrm{e}})}{16\omega_r R_0/v_{T\mathrm{i}}}\delta\phi_0, \tag{16c}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi_2 &= \frac{q^2(7\beta_{\mathrm{i}}+4\beta_{\mathrm{e}})}{32}\delta\phi_0\\
&\quad-\frac{\tau(7+4\tau)}{16(\omega_r R_0/v_{T\mathrm{i}})^2}(k_r\rho_{T\mathrm{i}})^2\delta\phi_0,
\end{aligned} \tag{16d}$$

以及 GAM 的实频率 ω_r 和阻尼率 γ 为

$$\frac{\omega_r R_0}{v_{T\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{7}{4}+\tau}+\mathcal{O}(1/q^2), \tag{17a}$$

$$\frac{\gamma R_0}{v_{T\mathrm{i}}} = -\frac{\sqrt{\pi}q^5}{2}\left(\frac{7}{4}+\tau\right)^2\exp\left[-q^2\left(\frac{7}{4}+\tau\right)\right]. \tag{17b}$$

在 (16) 式和 (17) 式中只保留了最低阶项, 相较于最低阶项在 $\mathcal{O}(1/q^2)$ 量级的项都被舍去了, 该表达式与前人的动理学理论结果 [31,32,49,50] 一致. (16) 式展示了 GAM 的部分电磁结构, $\delta\phi_1$ 以及 $\delta\phi_2$ 表达式中的第二项是由电子绝热响应导致的扰动静电势的极向不对称边带, 而 $\delta A_{/\!/,2}$ 以及 $\delta\phi_2$ 表达式中的第一项正比于 $7\beta_{\mathrm{i}}+4\beta_{\mathrm{e}}$, 这表明它们是由等离子体有限热压效应所激发的电磁响应. 值得注意的是, $\delta A_{/\!/,1}$ 的量级远小于 $\delta A_{/\!/,2}$, 这说明在电磁 GAM 中, 平行电流扰动主要呈现 $m=2$ 的结

构, 这正是产生 $m=2$ 极向磁场扰动的根源.

3.3 平行磁场扰动

在求解了由平行电流驱动的 $\delta A_{/\!/}$ 后, 现在转向求解平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$. 如前所述, $\delta B_{/\!/}$ 源于垂直磁矢势 $\delta A_{\perp}$ 的贡献, 其物理本质是等离子体对背景磁场的抗磁响应. 当 GAM 引入压强扰动时, 必然会伴随产生抗磁电流, 该电流会改变平行方向的磁场, 从而产生 $\delta B_{/\!/}$. 下面将通过求解垂直方向的安培定律来确定其大小和结构. 类似地, 将粒子扰动分布函数 ((1) 式和 (7) 式) 代入垂直方向安培定律 ((10) 式)), 根据垂直安培定律的 $m=0,\ \pm1,\ \pm2$ 这五个谐波分量方程可得:

$$v_{T\mathrm{i}}\delta B_{/\!/,0}=\mathcal{O}\left[(k_r\rho_{T\mathrm{i}})^3k_r\delta\phi_0\right],\qquad(18\mathrm{a})$$

$$\begin{aligned}v_{T\mathrm{i}}\delta B_{/\!/,\pm1}=&\pm\frac{\beta_i}{k_r\rho_{T\mathrm{i}}}\bigg[\frac{\mathrm{i}}{2}K^{\mathrm{i}}_{1,0}(\omega)k_r\delta\phi_0\\&+K^{\mathrm{i}}_{0,0}(\omega)k_r\delta\phi_1-K^{\mathrm{e}}_{0,0}(\omega)k_r\delta\phi_1\bigg],\end{aligned}\qquad(18\mathrm{b})$$

$$v_{T\mathrm{i}}\delta B_{/\!/,\pm2}=\mathcal{O}\left[(k_r\rho_{T\mathrm{i}})^3k_r\delta\phi_0\right],\qquad(18\mathrm{c})$$

其中, $K^j_{n,m}(\omega)$ 的定义如下

$$K^j_{n,m}(\omega)=\int\frac{F_j}{n_j}\frac{(n_{\mathrm{d}j})^n}{1-\omega/\omega_{tj}}\left(\frac{v_{\perp}}{v_{Tj}}\right)^2\left(\frac{v_{/\!/}}{v_{Tj}}\right)^m\mathrm{d}^3v.\qquad(19)$$

将平衡分布函数 F_j 代入 (19) 式积分可得:

$$K^j_{0,0}(\omega)=1+\xi_jZ(\xi_j),$$

$$K^j_{1,0}(\omega)=qk_r\rho_{Tj}\left[\xi_j+(1+\xi_j^2)Z(\xi_j)\right].\qquad(20)$$

同样使用 $\xi_{\mathrm{i}}\gg1$ 和 $\xi_{\mathrm{e}}\ll1$ 展开 $Z(\xi_{\mathrm{i}})$ 和 $Z(\xi_{\mathrm{e}})$, 最终解析计算 (18b) 式得到平行磁场扰动的主导分量 $\delta B_{/\!/,\pm1}$ 为

$$v_{T\mathrm{i}}\delta B_{/\!/,\pm1}=\mp\mathrm{i}\frac{3\beta_{\mathrm{i}}+4\beta_{\mathrm{e}}}{4\omega_rR_0/v_{T\mathrm{i}}}k_r\delta\phi_0.\qquad(21)$$

(21) 式给出了平行磁场扰动的关键特征, $\delta B_{/\!/}$ 呈现出 $m=1$ 的极向结构, 这与 $\delta A_{/\!/}$ 的 $m=2$ 结构不同. 这是因为 $\delta B_{/\!/}$ 是由抗磁效应引起的, 而抗磁效应直接与等离子体压强扰动相关, GAM 的压强扰动主要是 $m=1$ 的结构[25,51].

3.4 与 MHD 结果对比

以上基于回旋动理学理论自洽地推导出了 GAM 的三维磁场扰动的空间结构. 现在, 将该结果与单流体 MHD 理论下的经典结果进行详细对比, 以阐明二者在物理描述上的异同.

首先, 在局域近似 ($k_rr\gg1$) 下, 由平行磁矢势 $\delta A_{/\!/}$ 产生的极向磁场扰动为 $\delta B_\theta\approx-\mathrm{i}k_r\delta A_{/\!/}$. 此外, 根据高斯磁定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$, 并考虑局域近似条件 ($k_rr\gg1$) 以及 $\delta A_{/\!/}/\delta A_{\perp}\sim\mathcal{O}(1)$, 可以得到径向扰动磁场 $\delta B_r\approx-\partial_\theta\delta B_\theta/(\mathrm{i}k_rr)$. 考虑到 GAM 的径向电场扰动 $\delta E_r\approx-\mathrm{i}k_r\delta\phi_0\exp[\mathrm{i}(k_rr-\omega t)]$ 是扰动电磁场的主导分量, 基于 (16) 式和 (21) 式, 可以将动理学框架下的 GAM 磁场扰动归一化地写为

$$\delta B_r=-\frac{2q}{k_rr}\left(\frac{7}{8}\beta_{\mathrm{i}}+\frac{1}{2}\beta_{\mathrm{e}}\right)\frac{\delta E_r}{\omega_rR_0}\cos2\theta,\qquad(22\mathrm{a})$$

$$\delta B_\theta=\mathrm{i}q\left(\frac{7}{8}\beta_{\mathrm{i}}+\frac{1}{2}\beta_{\mathrm{e}}\right)\frac{\delta E_r}{\omega_rR_0}\sin2\theta,\qquad(22\mathrm{b})$$

$$\delta B_{/\!/}=\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\beta_{\mathrm{i}}+2\beta_{\mathrm{e}}\right)\frac{\delta E_r}{\omega_rR_0}\sin\theta.\qquad(22\mathrm{c})$$

作为对比, 理想 MHD (单流体) 理论给出的 GAM 磁场扰动如下[25,51]:

$$\delta B_r=-\frac{2q}{k_rr}\beta\frac{\delta E_r}{\omega_{\mathrm{MHD}}R_0}\cos2\theta,\qquad(23\mathrm{a})$$

$$\delta B_\theta=\mathrm{i}q\beta\frac{\delta E_r}{\omega_{\mathrm{MHD}}R_0}\sin2\theta,\qquad(23\mathrm{b})$$

$$\delta B_{/\!/}=2\mathrm{i}\beta\frac{\delta E_r}{\omega_{\mathrm{MHD}}R_0}\sin\theta,\qquad(23\mathrm{c})$$

其中, MHD(单流体) 框架下 GAM 的频率以及等离子体总热压与磁压之比 β 分别表示为

$$\omega_{\mathrm{MHD}}=c_{\mathrm{s}}/R_0\sqrt{2+1/q^2},$$

$$\beta\equiv\mu_0\gamma_{\mathrm{MHD}}\,p/B^2.$$

式中, p 是等离子体总压强 (电子与离子压强之和), γ_{MHD} 是绝热指数.

对比 (22) 式和 (23) 式, 可以得出两个主要结论. 第一, 在 GAM 磁扰动空间结构上, 动理学理论与 MHD 理论的结果高度一致. 两种理论都给出了 $m=2$ 的径向和极向磁场扰动, 以及 $m=1$ 的平行 (环向) 磁场扰动, 且扰动都为驻波形式. 这说明, 电磁 GAM 的动理学推导从更底层的粒子运动出发, 最终复现了与 MHD 结果一致的宏观结构, 这弥合了两种理论在描述 GAM 磁场空间结构上的长期差异, 为建立统一的电磁 GAM 物理图像提供了坚实的理论基础. 第二, 在定量关系上, 动理学理论提供了更精细的物理描述. 单流体 MHD 模型无法区分电子和离子的贡献, 其结果中的 β 是等

离子体总热压与磁压之比. 而本文的动理学结果 ((22) 式) 清晰地分离了电子 ($\beta_{\rm e}$) 和离子 ($\beta_{\rm i}$) 的贡献, 并揭示了它们在不同扰动分量中的权重不同. 对于由平行电流扰动主导的 $m=2$ 磁场扰动 (δB_r 和 δB_θ), 离子热压 $\beta_{\rm i}$ 贡献更大, 而对于由抗磁效应主导的 $m=1$ 平行磁场扰动 $\delta B_{/\!/}$, 电子热压贡献则稍大一些.

动理学理论与 MHD 理论在 GAM 磁场扰动极向结构预测上的一致性为未来从实验侧验证电磁 GAM 的三维磁场结构 (特别是平行磁场扰动) 提供了坚实的理论依据. 现有实验诊断主要集中在极向与径向磁场扰动的测量方面. 在多台托卡马克装置 (如 TCV[35], Globus-M[36], COMPASS[37], EAST[38], DIII-D[39] 等) 中, 已多次观测到与 GAM 频率一致的 $m=2$ 极向磁场扰动, 并在部分实验[38]中还观测到了与 GAM 频率一致的径向磁场扰动. 然而, 据我们所知, 尚无明确的实验工作直接报告 GAM 的 $m=1$ 平行 (环向) 磁场扰动. 这可能是因为平行方向上平衡磁场强度远大于扰动磁场, 导致难以分辨 GAM 扰动磁场成分. 随着未来诊断的发展, 对电磁 GAM 的 $m=1$ 平行磁扰动的实验验证有望成为可能, 而本工作为此类实验信号的预期特征提供了明确的理论基础.

4 总 结

本文基于回旋动理学理论, 系统地研究了托卡马克等离子体中电磁 GAM 的三维 (径向、极向和平行方向) 磁场扰动. 针对以往动理学研究中普遍采用平行磁矢势近似, 而导致无法自洽描述 GAM 完整的三维磁场扰动 (主要是径向与平行分量) 的局限性, 本文考虑了完整的三维扰动磁矢势. 通过自洽求解包含完整扰动磁矢势的回旋动理学方程、准中性条件以及安培定律的平行与垂直分量, 成功推导出了 GAM 在径向、极向和平行磁场方向上的磁场扰动解析表达式, 这是对电磁 GAM 动理学描述的重要拓展. 本研究的主要结论如下.

1) 从动理学理论出发, 首次完整地解析了电磁 GAM 的三维磁场扰动. 本文的结果表明, 径向和极向磁场扰动主要呈现 $m=2$ 的极向驻波结构, 而平行磁场扰动则呈现 $m=1$ 的驻波结构. 这与理想 MHD 的理论结果在空间结构上高度一致. 这不仅从更基本的物理原理 (动理学) 出发, 验证了 MHD 模型在描述 GAM 宏观电磁结构上的有效性, 更重要的是, 它成功弥合了两种理论在描述 GAM 磁场扰动上长期存在的显著差异, 为建立统一、自洽的电磁 GAM 物理图像奠定了坚实的理论基础.

2) 动理学模型提供了比单流体 MHD 更精细的 GAM 电磁扰动描述. 本文的结果 ((22) 式) 清晰地分离了电子与离子的热压贡献 ($\beta_{\rm e}$ 和 $\beta_{\rm i}$), 并揭示了它们在不同磁场分量中的权重各不相同. 具体而言, 对于由平行电流扰动主导的 $m=2$ 径向和极向磁场扰动, 离子热压的贡献更为显著; 而对于由抗磁效应主导的 $m=1$ 平行磁场扰动, 电子的贡献则相对更大. 这揭示了在单流体模型中被平均掉的动理学效应, 为通过磁扰动诊断反演等离子体组分信息提供了新的理论依据.

综上所述, 本研究不仅在理论上统一了动理学和 MHD 模型对电磁 GAM 扰动磁场的描述, 而且通过动理学方法深化了对其物理内涵的理解. 本文的工作局限于平坦的密度与温度剖面、局域近似, 以及线性理论, 未来的工作可以将此模型推广至更真实的非均匀等离子体位形, 考虑非线性效应和全局本征 GAM 下的电磁结构, 以期对进一步理解 GAM 与湍流的相互作用等重要问题有所帮助.

参考文献

[1] Lin Z, Hahm T S, Lee W W, Tang W M, White R B 1998 *Science* **281** 1835

[2] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K, Hahm T S 2005 *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** R35

[3] Winsor N, Johnson J L, Dawson J M 1968 *Phys. Fluids* **11** 2448

[4] Conway G D, Smolyakov A I, Ido T 2022 *Nucl. Fusion* **62** 013001

[5] Falchetto G L, Ottaviani M, Garbet X, Smolyakov A 2007 *Phys. Plasmas* **14** 082304

[6] Chakrabarti N, Singh R, Kaw P K, Guzdar P N 2007 *Phys. Plasmas* **14** 052308

[7] Hong W Y, Yan L W, Zhao K J, Lan T, Dong J Q, Yu C X, Cheng J, Qian J, Liu A D, Luo C W, Xu Z Y, Huang Y, Yang Q W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 962 (in Chinese) [洪文玉, 严龙文, 赵开君, 兰涛, 董家齐, 俞昌旋, 程均, 钱俊, 刘阿棣, 罗萃文, 徐征宇, 黄渊, 杨青巍 2008 物理学报 **57** 962]

[8] Sasaki M, Itoh K, Nagashima Y, Ejiri A, Takase Y 2009 *Phys. Plasmas* **16** 022306

[9] Hallatschek K, Biskamp D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1223

[10] Hahm T S, Beer M A, Lin Z, Hammett G W, Lee W W, Tang W M 1999 *Phys. Plasmas* **6** 922

[11] Hamada Y, Watari T, Nishizawa A, Yamagishi O, Narihara K, Kawasumi Y, Ido T, Kojima M, Toi K 2010 *Nucl. Fusion* **50** 025001

[12] Holland C, Tynan G R, Fonck R J, McKee G R, Candy J,

Waltz R E 2007 *Phys. Plasmas* **14** 056112
[13] Scott B 2003 *Phys. Lett. A* **320** 53
[14] Miyato N, Kishimoto Y, Li J 2004 *Phys. Plasmas* **11** 5557
[15] Fu G Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 185002
[16] Nazikian R, Fu G Y, Austin M E, Berk H L, Budny R V, Gorelenkov N N, Heidbrink W W, Holcomb C T, Kramer G J, McKee G R 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 185001
[17] Wei G Y, Chen N F, Qiu Z Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 015201 (in Chinese) [魏广宇, 陈凝飞, 仇志勇 2022 物理学报 **71** 015201]
[18] Fisher R K, Pace D C, Kramer G J, Van Zeeland M A, Nazikian R, Heidbrink W W, García-Muñoz M 2012 *Nucl. Fusion* **52** 123015
[19] Zarzoso D, Del-Castillo-Negrete D, Escande D F, Sarazin Y, Garbet X, Grandgirard V, Passeron C, Latu G, Benkadda S 2018 *Nucl. Fusion* **58** 106030
[20] Sasaki M, Itoh K, Itoh S I 2011 *Plasma Phys. Control. Fusion* **53** 085017
[21] Zarzoso D, Biancalani A, Bottino A, Lauber P, Poli E, Girardo J B, Garbet X, Dumont R J 2014 *Nucl. Fusion* **54** 103006
[22] Wang H, Todo Y, Osakabe M, Ido T, Suzuki Y 2019 *Nucl. Fusion* **59** 096041
[23] Wang H, Todo Y, Osakabe M, Ido T, Suzuki Y 2020 *Nucl. Fusion* **60** 112007
[24] Osakabe M, Ido T, Ogawa K, et al. 2014 *Proceedings of the 25th IAEA International Conference on Fusion Energy*, Saint Petersburg, Russian Federation, October 13–18, 2014 pEX/10-3
[25] Ren H 2014 *Phys. Plasmas* **21** 064502
[26] Zhou D 2007 *Phys. Plasmas* **14** 104502
[27] Wahlberg C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 115003
[28] Wahlberg C 2009 *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 085006
[29] Wang L, Dong J Q, Shen Y, He H D 2011 *Phys. Plasmas* **18** 052506
[30] Wahlberg C, Graves J P 2016 *Plasma Phys. Control. Fusion* **58** 075014
[31] Huang W, Ren H, Xu X Q 2019 *Phys. Plasmas* **26** 022506
[32] Chen Z, Ren H, Wang H, Roach C M 2025 *Plasma Phys. Control. Fusion* **67** 045008
[33] Xie B, Ye L, Chen Y, Zhao P, Guo W, Xiang N 2022 *Plasma Phys. Control. Fusion* **64** 095009
[34] Guo W, Ma J 2024 *Plasma Phys. Control. Fusion* **66** 035005
[35] De Meijere C A, Coda S, Huang Z, Vermare L, Vernay T, Vuille V, Brunner S, Dominski J, Hennequin P, Krämer-Flecken A 2014 *Plasma Phys. Control. Fusion* **56** 072001
[36] Bulanin V V, Gusev V K, Iblyaminova A D, Khromov N A, Kurskiev G S, Minaev V B, Patrov M I, Petrov A V, Petrov Y V, Sakharov N V 2015 *Nucl. Fusion* **56** 016017
[37] Seidl J, Krbec J, Hron M, Adamek J, Hidalgo C, Markovic T, Melnikov A V, Stockel J, Weinzettl V, Aftanas M 2017 *Nucl. Fusion* **57** 126048
[38] Wang M Y, Zhou C, Liu A D, Zhang J, Liu Z Y, Feng X, Ji J X, Li H, Lan T, Xie J L 2018 *Phys. Plasmas* **25** 102508
[39] Lin D J, Heidbrink W, Crocker N, Du X, Nazikian R, Van Zeeland M, Barada K 2022 *Nucl. Fusion* **62** 112010
[40] Berk H L, Boswell C J, Borba D, Figueiredo A C A, Johnson T, Nave M F F, Pinches S D, Sharapov S E 2006 *Nucl. Fusion* **46** S888
[41] Boswell C J, Berk H L, Borba D N, Johnson T, Pinches S D, Sharapov S E 2006 *Phys. Lett. A* **358** 154
[42] Ilgisonis V I, Khalzov I V, Lakhin V P, Smolyakov A I, Sorokina E A 2014 *Plasma Phys. Control. Fusion* **56** 035001
[43] Lakhin V P, Sorokina E A 2014 *Phys. Lett. A* **378** 535
[44] Smolyakov A I, Nguyen C, Garbet X 2008 *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 115008
[45] Melnikov A V, Eliseev L G, Lysenko S E, Ufimtsev M V, Zenin V N 2017 *Nucl. Fusion* **57** 115001
[46] Riggs G A, Nogami S H, Koepke M E, Melnikov A V, Eliseev L G, Lysenko S E, Khabanov P O, Drabinskij M A, Kharchev N K, Kozachek A S 2021 *J. Plasma Phys.* **87** 885870301
[47] Kennedy D, Roach C M, Giacomin M, Ivanov P, Adkins T, Sheffield F, Görler T, Bokshi A, Dickinson D, Dudding H G 2024 *Nucl. Fusion* **64** 086049
[48] Frieman E A, Chen L 1982 *Phys. Fluids* **25** 502
[49] Gao Z, Itoh K, Sanuki H, Dong J Q 2006 *Phys. Plasmas* **13** 100702
[50] Ren H 2015 *Phys. Plasmas* **22** 072502
[51] Chen Z, Li Y, Ren H, Wang H 2025 *Nucl. Fusion* **65** 044001

Gyro-kinetic analysis of electromagnetic geodesic acoustic modes in tokamak plasmas*

CHEN Zhe [1)2)] REN Haijun [1)†] WANG Hao [2)]

1) (*University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

2) (*National Institute for Fusion Science, Toki* 509-5292, *Japan*)

(Received 28 September 2025; revised manuscript received 13 November 2025)

Abstract

Geodesic acoustic modes (GAMs), the high-frequency branch of zonal flows, play a crucial role in regulating turbulence and the associated anomalous transport in tokamaks. Although they are often treated as electrostatic

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12175228) and the National Key R&D Program of China (Grant No. 2024YFE03050002).

† Corresponding author. E-mail: hjren@ustc.edu.cn

oscillations, GAMs intrinsically possess an electromagnetic component, which is manifested as magnetic field perturbations. This component is essential for GAM's interaction with electromagnetic turbulence and also for the existence of global GAM eigenmodes. However, a long-standing discrepancy exists between magnetohydrodynamic (MHD) and gyro-kinetic theories regarding the three-dimensional (3D) structure of these perturbations. MHD models consistently predict a full 3D structure, with dominant $m = 2$ components present in the radial and poloidal magnetic field perturbations and a dominant $m = 1$ component in the toroidal magnetic field perturbation, where m denotes the poloidal wavenumber. In contrast, most gyro-kinetic studies adopt the traditional parallel vector potential approximation ($\delta\boldsymbol{A} \approx \delta A_{//}\boldsymbol{b}$), and are limited to describing the $m = 2$ poloidal component while systematically neglecting the radial and parallel (toroidal) components. This limitation can result in a theoretical gap, thereby preventing a unified understanding of the electromagnetic nature of GAMs.

To address this issue, we employ a self-consistent electromagnetic gyro-kinetic model without invoking the parallel vector potential approximation. Starting from the linear electromagnetic gyro-kinetic equation, we describe the perturbed distribution functions of both ions and electrons. This model is closed with a self-consistent set of field equations—including the quasi-neutrality condition and both the parallel and perpendicular components of Ampère's law—which determine the evolution of the electrostatic potential $\delta\phi$, the parallel vector potential $\delta A_{//}$, and the parallel magnetic perturbation $\delta B_{//}$ (associated with the perpendicular vector potential $\delta A_{\perp}$). By retaining the full perturbed magnetic vector potential $\delta\boldsymbol{A}$, the framework naturally incorporates both parallel current perturbations (related to $\delta A_{//}$) and diamagnetic effects (linked to $\delta B_{//}$). Analytical solutions are obtained in the long-wavelength limit for a large-aspect-ratio and circular tokamak, including first-order finite-Larmor-radius (FLR) and finite-orbit-width (FOW) effects.

For the first time within a gyro-kinetic framework, our analysis yields the complete 3D magnetic perturbation structure of the electromagnetic GAM. The results explicitly demonstrate that the radial (δB_r) and poloidal (δB_θ) perturbations exhibit a dominant $m=2$ standing-wave structure, while the parallel perturbation ($\delta B_{//}$) displays a dominant $m=1$ structure. This spatial structure is in excellent qualitative agreement with the predictions of ideal MHD theory, thereby resolving the long-standing discrepancy between the two theoretical approaches. Moreover, the gyro-kinetic model provides a refined physical picture beyond the scope of single-fluid MHD. The analytical expressions reveal different roles of ions and electrons: the $m = 2$ radial and poloidal magnetic field perturbations, related to parallel currents are more strongly affected by the ion thermal pressure, whereas the $m = 1$ parallel magnetic field perturbation, related to diamagnetic effects, receives a relatively large contribution from the electron thermal pressure. These results not only unify the theoretical description of GAM magnetic perturbations but also deepen our understanding of their kinetic physics, thereby laying a more accurate foundation for experimental diagnostics and numerical simulation.

Keywords: gyro-kinetic equation, electromagnetic geodesic acoustic mode, magnetic field perturbation

DOI: 10.7498/aps.75.20251334 **CSTR:** 32037.14.aps.75.20251334

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

托卡马克等离子体中电磁测地声模的回旋动理学分析

陈哲 任海骏 王灏

Gyro-kinetic analysis of electromagnetic geodesic acoustic modes in tokamak plasmas

CHEN Zhe REN Haijun WANG Hao

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 75, 040501 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251334
CSTR: 32037.14.aps.75.20251334
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.75.20251334
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
