

高阶矩阵非线性薛定谔方程中孤子相互作用与束缚态调控*

曾平安¹⁾ 刘露^{2)†} 曾平平³⁾

1) (浙江工业大学之江学院理学院, 绍兴 312000)

2) (山东科技大学经济管理学院, 青岛 266590)

3) (浙江金融职业学院信息技术学院, 杭州 310000)

(2025 年 11 月 21 日收到; 2026 年 3 月 11 日收到修改稿)

基于二元 Darboux 变换, 研究了高阶矩阵非线性薛定谔方程中孤子相互作用及束缚态的调控问题. 该方程包含符号交替的非线性项和高阶色散效应, 可用于刻画非线性光学系统中多分量波的传播动力学. 通过调节参数 $l_{jk}(j, k = 1, 2, 3, 4)$, 系统构造了多种类型的束缚态孤子结构. 在二阶情形下, 通过调控矩阵 C_1 与 C_2 的关系及其行列式条件, 获得了呼吸型孤子、具有一个/两个峰的束缚态孤子以及一个呼吸型孤子与亮孤子的束缚态. 在三阶情形下, 进一步构造了一个孤子与两个呼吸型孤子、一个孤子与双峰孤子等多种束缚态孤子. 结合数值图像, 深入分析了孤子相互作用过程中形态演化、传播方向、相位偏移及能量重分布等动力学特性, 揭示了弹性与非弹性碰撞等不同相互作用机制. 数值稳定性测试表明, 在 10% 噪声扰动下解的保真度良好, 验证了其物理可靠性. 相关结果表明, 通过参数调控可以有效控制束缚态孤子的结构与演化特性, 为高阶非线性系统中多分量孤子动力学的调控提供了理论依据.

关键词: 高阶矩阵非线性薛定谔方程, 二元 Darboux 变换, 孤子相互作用, 束缚态孤子

DOI: 10.7498/aps.75.20251591

CSTR: 32037.14.aps.75.20251591

1 引言

在当今数字化时代, 光纤通信的重要性日益凸显, 已成为现代通信系统的核心支柱之一^[1,2]. 光孤子动力学理论凭借其独特的物理内涵与特性, 对光纤通信的发展产生了深远影响, 推动了光纤通信技术在传输效率、稳定性及容量扩展等多方面的发展^[3,4]. 光孤子可分为时间孤子和空间孤子两类, 前者源于折射非线性与脉冲色散的共同作用, 后者则源自非线性效应与光束衍射的平衡^[5]. 光空间孤子本质上是一类具有有限空间横截面的自陷垂直光束, 其传播特性表现为不存在与自由扩散光束相关联的发散现象, 从而能够在介质中保持相对稳定的

传输状态^[6]. 值得关注的是, 当两个或多个孤子具有相同速度时, 会形成束缚态孤子. 这类束缚态作为一种典型的相互作用形式已被广泛研究^[7-10]. 此外, 孤子和简并孤子之间的相互作用也可导致不同形式束缚态的产生. 简并孤子解与量子物理系统中的超透明势表现出很强的相关性, 这是 Matveev^[11] 在研究 Korteweg-de Vries 方程时首次提出的. 简并孤子解可视为具有相同谱参数的多孤子解的极限情形, 其内在关系已通过理论与实验得到充分验证^[12,13]. 为构造这些丰富的解, 研究者发展了多种有效方法, 例如 Hirota 双线性、Riemann-Hilbert 方法、Darboux 变换等^[14-24].

在光孤子理论研究中, 非线性薛定谔方程被广泛用于描述光孤子的特性及其在纳米光纤等介质

* 国家自然科学基金 (批准号: 72272089, 71902105) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liulu_77@126.com

中的传播动力学 [25–27]. 同时, 该方程也能准确刻画双折射光纤等多种物理系统的行为特征, 因而成为该领域备受关注的研究对象 [28–32]. 随着光纤技术的发展, 研究人员进一步提出了具有负相干耦合的矩阵非线性薛定谔方程, 用于描述各向同性介质中正交偏振非线性波的传播行为 [33–35]. 然而, 当高强度超短脉冲在光纤中传播时, 标准的非线性薛定谔系统已不足以准确描述其演化过程, 必须考虑高阶效应的影响, 如三阶色散、自陡峭、受激拉曼散射等 [36–39]. 其中, 三阶色散效应会导致高阶孤子分裂; 自陡峭效应因脉冲峰值传播速度慢于两侧部分, 引起脉冲宽度显著窄化; 自频移则是由受激拉曼散射引起的脉冲频谱红移现象, 表现为长波长分量通过消耗短波长分量获得拉曼增益, 从而导致红移量随传播距离持续增大. 本文主要研究具有符号交替非线性的高阶矩阵非线性薛定谔方程

$$iQ_t + Q_{xx} + 2QQ^*Q + i\alpha Q_{xxx} + 6i\alpha QQ^*Q_x = 0, \quad (1)$$

其中 $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix}$, q_1 , q_2 分别代表两个相互作用的偏振对应的缓变复振幅, “*”表示复共轭, α 为高阶扰动强度. 将矩阵 $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix}$ 代入方程 (1), 可将其展开为如下分量形式:

$$\begin{aligned} & iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 - 2|q_2|^2)q_1 \\ & - 2q_1^*q_2^2 + i\alpha q_{1xxx} + 6i\alpha(|q_1|^2 - |q_2|^2)q_{1x} \\ & - 6i\alpha(q_1q_2^* + q_2q_1^*)q_{2x} = 0, \\ & iq_{2t} + q_{2xx} + 2(2|q_1|^2 - |q_2|^2)q_2 \\ & + 2q_2^*q_1^2 + i\alpha q_{2xxx} + 6i\alpha(|q_1|^2 - |q_2|^2)q_{2x} \\ & + 6i\alpha(q_2q_1^* + q_1q_2^*)q_{1x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $|q_1|^2q_1$ 和 $|q_2|^2q_2$ 表示自相位调制, $|q_1|^2q_2$ 和 $|q_2|^2q_1$ 为交叉相位调制项, $q_1^*q_2^2$ 和 $q_2^*q_1^2$ 则描述光纤两轴之间能量交换的相干耦合项. 值得注意的是, 自相位调制与交叉相位调制的系数符号相反, 体现了系统非线性的非对称特性. 目前针对该方程的研究仍较为有限, 已报道的结果包括混合背景上的孤子与怪波 [40] 以及局域波与周期波 [41]. 然而其束缚态孤子问题尚未系统探讨. 为此, 本文借助于二元 Darboux 变换, 系统研究方程 (1) 中束缚态孤子的解析构造及其动力学行为, 旨在揭示不同参数条件下束缚态孤子的形成规律与演化特性.

本文结构安排如下: 第 2 节构造方程 (1) 的二元

Darboux 变换. 第 3 节和第 4 节基于二元 Darboux 变换, 分多种情形构造不同类型的束缚态孤子, 结合图像分析其空间形态、传播稳定性及相互作用动力学, 并以表格形式系统总结不同约束条件下束缚态孤子的分类与特征. 最后, 总结主要结果, 并对未来可能的研究方向进行展望.

2 二元 Darboux 变换

方程 (1) 的 Lax 对可表示为

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U\Psi = (\lambda U_0 + U_1)\Psi, \\ \Psi_t &= V\Psi = (\lambda^3 V_3 + \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0)\Psi, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$U_0 = i \begin{pmatrix} -I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & Q \\ -Q^* & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = 4\alpha U_0, \quad V_2 = 2(2\alpha Q + U_0),$$

$$V_1 = 2(\alpha Q^2 U_0 + Q + \alpha Q_x U_0),$$

$$V_0 = 2\alpha Q^3 + Q^2 U_0 - \alpha Q_{xx} + Q_x U_0 + \alpha(Q_x Q - Q Q_x),$$

其中, $I_{2 \times 2}$ 是 2×2 的单位矩阵, $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ 是 2×2 的零矩阵. 由相容性条件 $U_t - V_x + [U, V] = 0$ 可以导出方程 (2).

假设 $\Psi_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 是 Lax 对在谱参数 λ_j 下的 N 个不同的特征函数, 受文献 [42] 启发, 我们构造了方程 (1) 的 N 重二元 Darboux 变换:

$$Q[N] = Q - 2i\Psi_1 W^{-1}\Psi_2^\dagger, \quad (4)$$

$$W = \begin{pmatrix} \Omega(\Psi_1, \Psi_1) & \Omega(\Psi_1, \Psi_2) & \cdots & \Omega(\Psi_1, \Psi_N) \\ \Omega(\Psi_2, \Psi_1) & \Omega(\Psi_2, \Psi_2) & \cdots & \Omega(\Psi_2, \Psi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega(\Psi_N, \Psi_1) & \Omega(\Psi_N, \Psi_2) & \cdots & \Omega(\Psi_N, \Psi_N) \end{pmatrix},$$

$$\Omega(\Psi_j, \Psi_k) = \frac{\Psi_j^\dagger \Psi_k}{\lambda_k - \lambda_j^*}.$$

借助于二元 Darboux 变换中的 $\Omega(\Psi_j, \Psi_k)$, 即可得到方程 (1) 的多类型束缚态孤子.

3 束缚态二孤子

当 $N = 2$ 时, 为了构造方程 (1) 的束缚态孤子, 我们选取零种子解. 于是, Lax 对 (3) 的解可表示为

$$\Psi_j = \begin{pmatrix} c_{j1}e^{-i\theta_j} & c_{j2}e^{-i\theta_j} & c_{j3}e^{-i\theta_j} & c_{j4}e^{-i\theta_j} \\ -c_{j2}e^{-i\theta_j} & c_{j1}e^{-i\theta_j} & -c_{j4}e^{-i\theta_j} & c_{j3}e^{-i\theta_j} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中, $\theta_j = \lambda_j[x + (4\alpha\lambda_j^2 + 2\lambda_j)t]$, 且 l_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) 均为复数.

令 $\hat{C}_j = \begin{pmatrix} c_{j1} & -c_{j2} \\ c_{j2} & c_{j1} \end{pmatrix}$, $\tilde{C}_j = \begin{pmatrix} c_{j3} & -c_{j4} \\ c_{j4} & c_{j3} \end{pmatrix}$. 由此, 根据二元 Darboux 变换, 可以得到解

$$Q[2] = -2i \begin{pmatrix} \hat{C}_1 e^{-i\theta_1} & \hat{C}_2 e^{-i\theta_2} \end{pmatrix} \Xi_{jk}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 e^{i\theta_1} & \tilde{C}_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}^\dagger, \quad (6)$$

其中 $\Xi_{jk} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} [\hat{C}_j^\dagger \hat{C}_k e^{i(\theta_j^* - \theta_k)} + \tilde{C}_j^\dagger \tilde{C}_k e^{-i(\theta_j^* - \theta_k)}]$.

接下来, 令 $C_j = \begin{pmatrix} c_{j1} & c_{j2} \\ c_{j3} & c_{j4} \end{pmatrix}$, 并分成四种情况讨论 c_{jk} ($j = 1, 2, k = 1, 2, 3, 4$) 的取值对束缚态孤子的影响.

Case A1: $C_1 \neq C_2, \det(C_2) = i \det(C_1), \det(C_1 C_2) = -i$.

在此情况下, 可以导出 $q_1 = -iq_2$, 这暗示着 q_1 和 q_2 的表达式线性相关. 换言之, q_1 和 q_2 分量的结构相似. 从图 1 可以看到, q_1 和 q_2 分量都表现为

一个呼吸型的孤子. 产生该现象的原因是两个孤子之间的作用力足够强, 使得束缚态孤子合并成了呼吸型孤子, 这种现象称为孤子融合, 即两个孤子合并成了一个孤子. 需要注意的是, 图 1 中的呼吸型的孤子与文献 [43,44] 中报道的耗散脉动孤子虽然均呈现周期性演化, 但物理本质截然不同. 前者源于可积守恒系统, 是矩阵非线性薛定谔方程在无增益/损耗条件下的解析解, 其周期性振荡完全由内部相位耦合与色散非线性平衡驱动, 能量严格守恒. 后者则存在于耗散系统 (如锁模光纤激光器), 其脉动行为由增益、损耗、饱和吸收等外部参数共同调制, 与腔回转周期相关, 常伴随能量或光谱的周期性变化. 简言之, 二者分别属于保守系统中的内部模式干涉与非平衡系统中的能量流调制这两种不同的动力学类别, 虽波形特征相似, 但不能等同. 此外, 还发现随着 λ_j ($j = 1, 2$) 的改变, 呼吸型孤子又分裂成了两个平行的呼吸型孤子. 同时, 其中一个呼吸型孤子的振幅要高于另一个呼吸型孤子的振幅, 见图 2 和图 3.

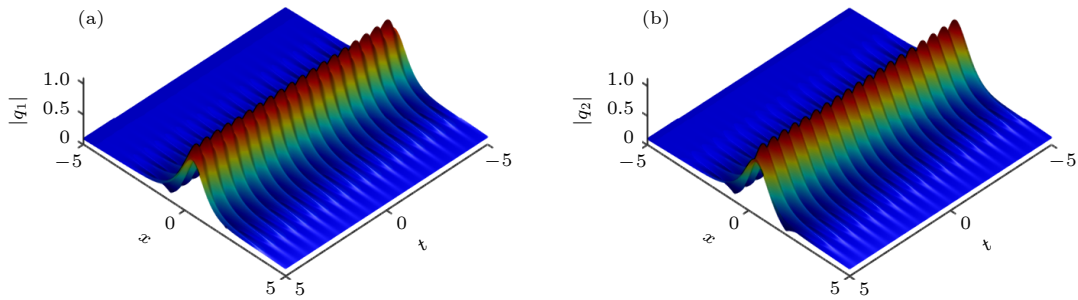


图 1 由解 (6) 给出的呼吸型孤子, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \frac{i}{10}$, $\lambda_2 = \frac{7i}{8}$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$

Fig. 1. Breathing soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \frac{i}{10}$, $\lambda_2 = \frac{7i}{8}$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$.

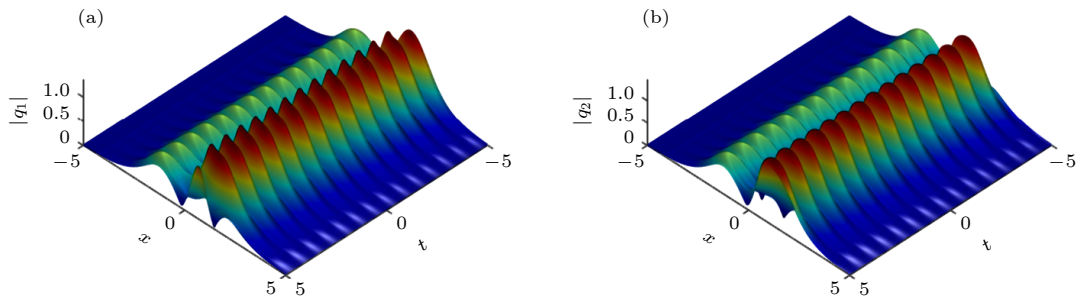


图 2 由解 (6) 给出的平行呼吸型孤子, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{3i}{5}$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$

Fig. 2. Parabolic breathing soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{3i}{5}$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$.

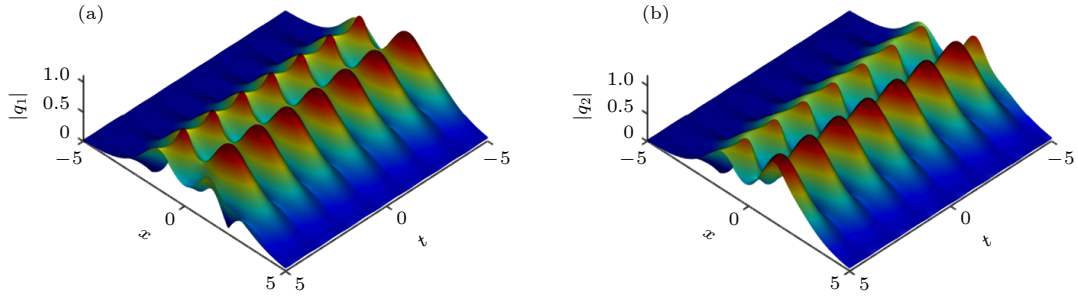


图 3 由解 (6) 给出的平行呼吸型孤子, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$

Fig. 3. Parabolic breathing soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$.

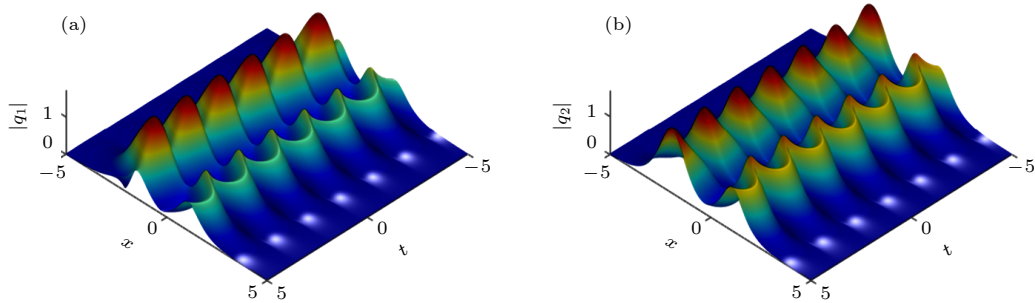


图 4 由解 (6) 给出的平行呼吸型孤子, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = 0$

Fig. 4. Parabolic breathing soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = 0$.

Case B1: $C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = i$.

在这种情况下, 得到了 $q_1 \neq i q_2$, 即 q_1 和 q_2 的表达式线性无关. 也就是说, q_1 和 q_2 分量的结构是完全不同的. 此时, 图 4 中得到了由一个孤子和一个呼吸型孤子组成的束缚态孤子. 另一方面, 还发现了一个有趣的现象, 即当两个孤子之间存在相互吸引的作用时, 它们之间并不会发生相互作用, 这反映了孤子这种特殊的物理实体在相互作用过程中的复杂性和独特性.

Case C1: $C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$.

在图 5 中, 两个孤子呈现出以相同的振幅匀速进行传播的态势. 尤为关键的是, 这两个孤子并非处于静态稳定状态, 而是展现出周期性的吸引与排斥行为. 从孤子动力学理论的视角来看, 孤子的束缚态往往正是在这类特定条件下产生的. 更重要的是, 从图 5 可以发现, 其中的吸引点与排斥点呈现出恒定的特性. 当两个孤子进入相互吸引阶段时, 能量发生显著的聚集与再分配, 进而产生一个具有高振幅的波. 这一波形的出现, 不仅是孤子间相互

作用的外在表征, 更暗示着系统内部能量流转的动态过程.

Case D1: $C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = \frac{5}{4} - 3i$.

在这种情况下, q_1 和 q_2 分量展示了两种完全不同的构造. 从图 6(a) 可以清晰地观察到, q_1 分量展示了两个具有独特双峰结构的束缚态孤子, 它们以完全相同的振幅和速度传播, 且在传播过程中, 呈现出周期性的吸引与排斥交替现象. 这种规律化的相互作用模式, 不仅深刻反映了孤子间复杂的非线性耦合关系, 还为进一步探究孤子系统的内在稳定性机制提供了直观的观测实例. 与此同时, 在图 6(b) 中, q_2 分量揭示了另一类典型的束缚态孤子, 这类孤子呈现单峰形态, 且孤子相互交错.

我们将 $N = 2$ 时不同参数下解的结构总结于表 1. 为检验所构造解析解在小扰动作用下的鲁棒性, 以图 1 中的 q_1 分量为例, 对其进行了基于噪声扰动的数值稳定性测试. 具体地, 在固定时刻 $t = -5, 0, 5$ 处, 取解析解 $q_{\text{exact}}(x, t)$ 的实部作为参考

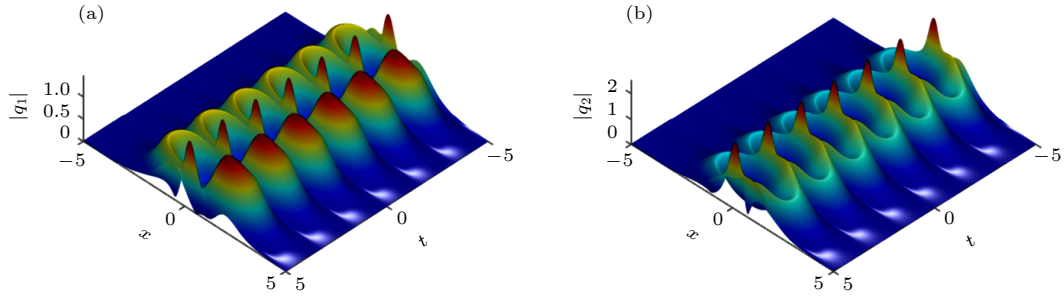


图 5 由解 (6) 给出的束缚态孤子, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = -i$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$

Fig. 5. Bound-state soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = -i$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$.

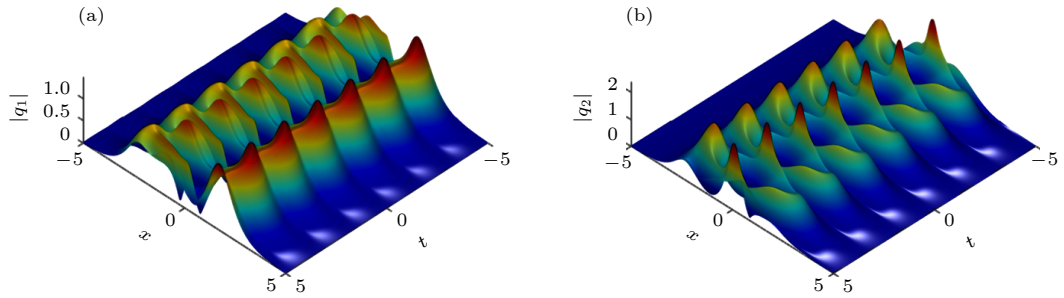


图 6 由解 (6) 给出的一个孤子与一个呼吸型孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = i - \frac{1}{2}$, $c_{14} = 1$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = i - 1/2$, $c_{24} = 1$

Fig. 6. Bound-state of one soliton and one breathing soliton via Solution (6) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = i - 1/2$, $c_{14} = 1$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = i - 1/2$, $c_{24} = 1$.

表 1 $N = 2$ 时不同参数条件下解的结构

Table 1. Structures of solutions under different parameter conditions when $N = 2$.

参数	解的结构
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -i$	呼吸型孤子/平行呼吸型孤子
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = i$	一个孤子和一个呼吸型孤子的束缚态
$C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$	束缚态孤子
$C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = 5/4 - 3i$	双峰结构的束缚态孤子

解, 并在其幅值上引入幅度为 10% 的高斯随机噪声扰动, 从而得到扰动解 $q_{\text{pert}}(x, t)$. 通过比较两者在区间 $x \in [-5, 5]$ 内的偏差分布, 计算 $\text{Re}(q_{\text{exact}}) - \text{Re}(q_{\text{pert}})$ 以刻画扰动对解构造的影响, 见图 7. 数值结果表明, 尽管初始条件中引入了相对较强的随机扰动, 扰动解与解析解之间的偏差在整个空间区间内仍保持在较小量级, 且整体轮廓未发生明显畸变. 同时, 基于归一化范数定义的形状保真度在所选时刻均维持在较高水平, 表明该解对随机噪声具有较好的抗扰动能力. 上述结果从数值角度验证了该类孤子结构在有限扰动条件下的稳定传播特性.

4 束缚态三孤子

该部分给出束缚态三孤子, 即选择 $N = 3$ 时的二元 Darboux 变换, 由此可得解

$$Q[3] = -2i \begin{pmatrix} \hat{C}_1 e^{-i\theta_1} & \hat{C}_2 e^{-i\theta_2} & \hat{C}_3 e^{-i\theta_3} \end{pmatrix} \times \Xi_{jk}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 e^{i\theta_1} & \tilde{C}_2 e^{i\theta_2} & \tilde{C}_3 e^{i\theta_3} \end{pmatrix}^\dagger, \quad (7)$$

$$\text{其中 } \Xi_{jk} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j^*} \left[\hat{C}_j^\dagger \hat{C}_k e^{i(\theta_j^* - \theta_k)} + \tilde{C}_j^\dagger \tilde{C}_k e^{-i(\theta_j^* - \theta_k)} \right].$$

下面分成七种情形来讨论多种类型的束缚态孤子的构造.

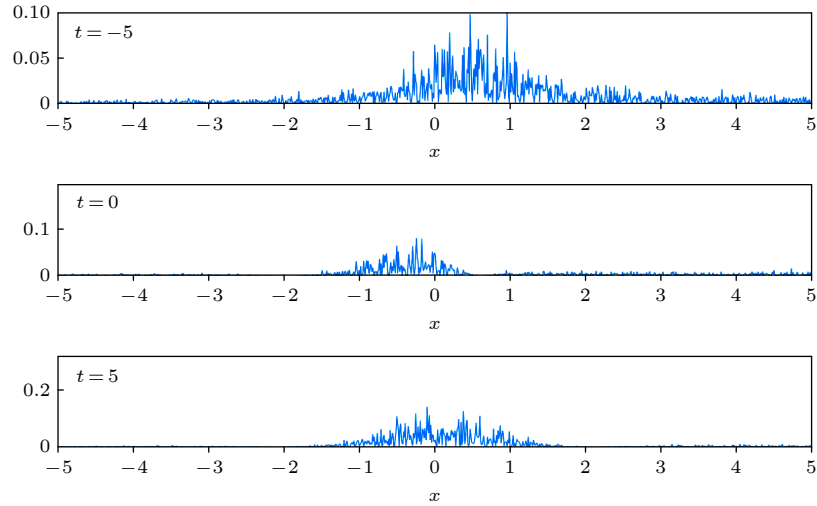


图 7 在不同时刻 $t = -5, 0, 5$ 对图 1 中的解 q_1 引入 10% 高斯噪声扰动后的偏差分布, 参数与图 1 相同

Fig. 7. Deviation distribution of q_1 in Fig. 1 after introducing 10% Gaussian noise disturbance at different times $t = -5, 0, 5$ with the same parameters as Fig. 1.

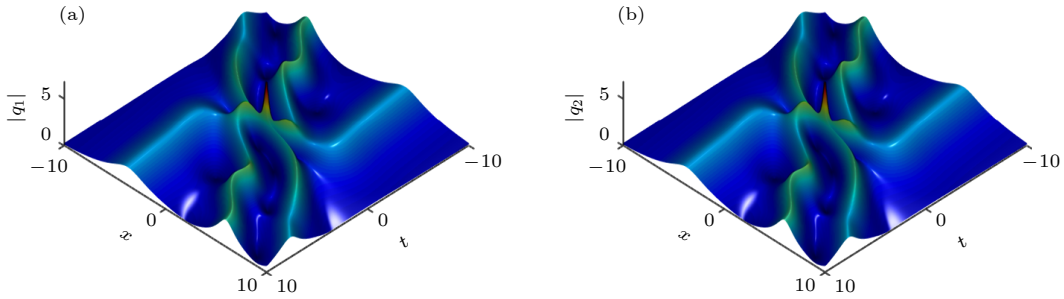


图 8 由解 (7) 给出的一个孤子与两个呼吸型孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$

Fig. 8. Bound-state of one soliton and two breathing solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$.

Case A2: $C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = \text{idet}(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = -i$.

在这种情况下, 图 8 描述了一个孤子与两个呼吸型孤子之间的相互作用. 值得注意的是, 在整个碰撞过程中, 由一个孤子和两个呼吸型孤子所构成的束缚态, 始终维持着恒定的速度, 这就暗示着能量守恒定理在孤子相互作用情境下依旧满足. 此外, 其中的恒定速度这一特性能够作为一个关键的约束条件, 有助于更为精准的孤子运动模型的构建与优化, 进而为诸如光通信、量子计算等诸多前沿领域里基于孤子特性的技术应用, 奠定更为坚实可靠的理论基石.

Case B2: $C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \text{idet}(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = -i$

在此条件下, 我们导出了一个孤子和两个孤子

所形成的束缚态相互作用. 有趣的是, 不同于上一种情形, 此处的相互作用过程中, 可以观察到不仅一个孤子的形状保持不变, 而且束缚态的结构在相互作用前后也不曾发生变换. 进一步观察还发现, 一个显著的相移现象清晰地呈现在图 9 中.

Case C2: $C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = 5/4 - 3i$, $\det(C_3) = -i$

在这里, 得到了一个孤子与两个双峰孤子的束缚态, 见图 10. 相较于图 8 所呈现的情形, 图 10 中的孤子束缚态结构出现了显著差异. 图 10 中展示的是一个孤子与两个具有双峰的孤子所形成的束缚态之间的相互作用. 可以看到, 在相互作用之后, 两个双峰孤子的振幅出现了变化, 这一变化暗示着孤子间能量的汇聚与重新分配机制在起作用. 与之形成鲜明对比的是, 另外那个单独的孤子, 其形态

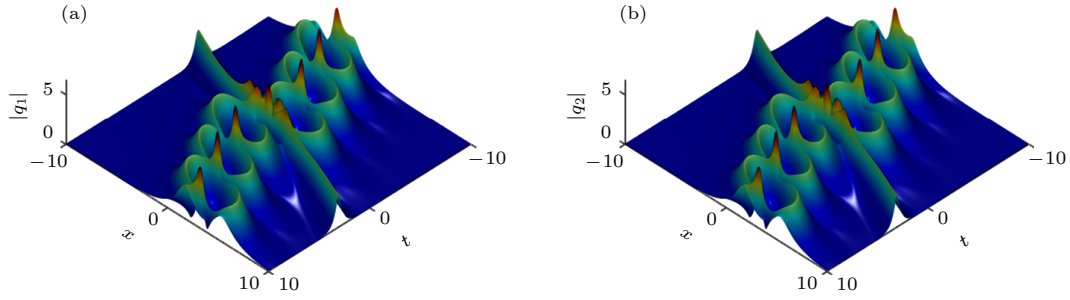


图 9 由解 (7) 给出的一个孤子与两个孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = -i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$

Fig. 9. Bound-state of one soliton and two breathing solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = -i$, $c_{21} = -i$, $c_{22} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$.

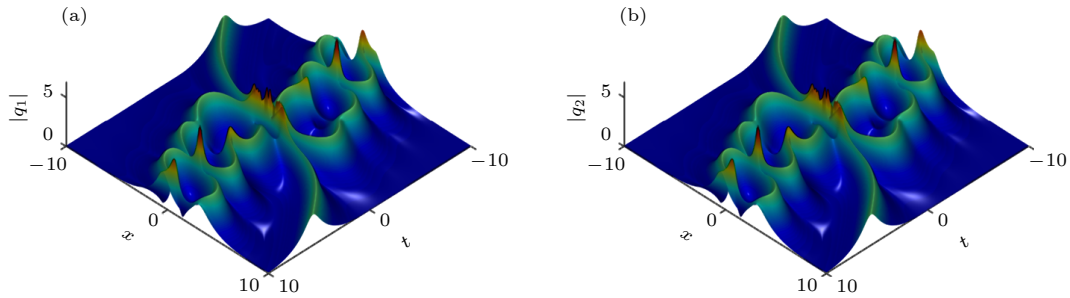


图 10 由解 (7) 给出的一个孤子与两个双峰孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = i - \frac{1}{2}$, $c_{14} = 1$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = i - 1/2$, $c_{24} = 1$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$

Fig. 10. Bound-state of one soliton and two bimodal solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = i - 1/2$, $c_{14} = 1$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = i - 1/2$, $c_{24} = 1$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$.

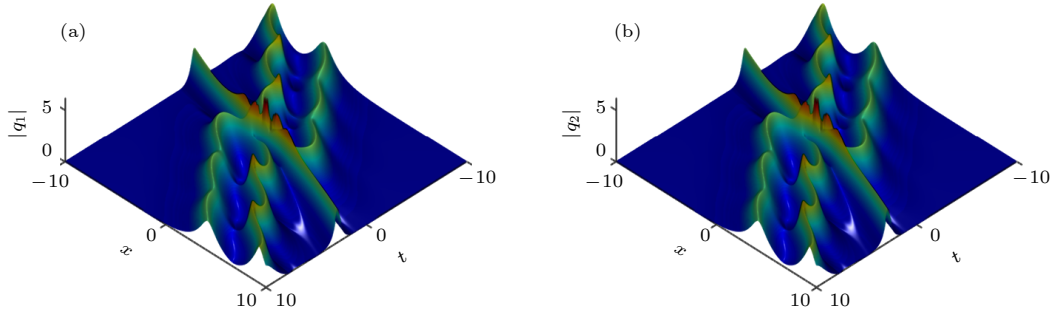


图 11 由解 (7) 给出的一个孤子与两个分离的双峰孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = 0$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$

Fig. 11. Bound-state of one soliton and two separated bimodal solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = 0$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = -i$.

始终维持稳定, 未受此次相互作用的明显扰动, 凸显出孤子体系在复杂能量交换场景下依然可能保有局部稳定性.

Case D2: $C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = i$, $\det(C_3) = -i$.

此种条件下, 图 11 展现了一个孤子与两个分离的双峰孤子的束缚态. 与上一种情况相同的是,

在相互作用前后, 单独的一个孤子其形态自始至终维持稳定. 但不同的是, 不论是一个孤子还是两个双峰孤子的结构都发生了变化, 比如, 一个孤子的形状发生了变化, 且两个双峰孤子出现了分离的现象. 确切来说, 这是因为孤子之间出现了显著的能量交换. 这种能量交换机制, 不仅推动了束缚态结构的转变, 更是孤子间非线性相互作用的核心表现.

Case E2: $C_1 \neq C_2, \det(C_2) = \text{idet}(C_1), \det(C_1 C_2) = -1, \det(C_3) = i$.

这种情况下, 在图 12 中观察到了一个孤子与一个呼吸型孤子的保形相互作用. 与上面的情形不同, 这里的两个孤子的束缚态经历了独特的演化过程, 合并成了一个呼吸型孤子, 随后产生了一个孤子与一个呼吸型孤子的相互作用. 另一方面, 在相互作用前后, 虽然两个孤子的束缚态的振幅和宽度始终保持不变, 但是相互作用后发生了相移.

Case F2: $C_1 = C_2, \det(C_2) = \det(C_1), \det(C_1 C_2) = -1, \det(C_3) = i$.

在这里, 图 13 清晰呈现了一个孤子与两个孤子的相互作用的束缚态, 可以明显看到两个孤子的形状、大小与前面集中情形的孤子完全不同. 同时, 在整个相互作用过程中, 束缚态的结构维持稳定, 周期性的吸引与排斥现象持续出现. 不过, 相互作用之后产生了相移现象. 这一转变表明孤子的两个分量之间发生了能量交换.

Case G2: $C_1 \neq C_2, \det(C_2) = \text{idet}(C_1), \det(C_1 C_2) = i,$

$\det(C_3) = i$.

图 14 所示为一个孤子与两个分离的双峰孤子的相互作用. 与图 11 相比, 可以明显地观察到, 这里的两个双峰孤子的形状发生了显著变化, 并且两个双峰孤子之间的距离变大. 与此同时, 一个孤子的形状结构也发生了变化. 这种结构上的动态变迁, 精准反映出孤子间能量交换对孤子体系形态塑造的关键作用.

将 $N = 3$ 时不同参数下解的结构总结于表 2.

1) 束缚态多孤子的物理本质

在高阶矩阵非线性薛定谔方程 (1) 中, 二阶和三阶孤子并非简单的多个基本孤子的线性叠加, 而是由多个谱参数在复平面中特定配置所诱导的非线性相干结构. 当多个孤子对应的谱参数在实部与虚部上满足一定约束关系时, 各孤子之间通过非线性项与色散项形成有效“相互束缚”, 从而表现为: 能量在各孤子分量之间周期性交换; 相对间距保持有限且随时间振荡; 整体结构呈现出类分子态 (soliton molecule) 的动力学特征.

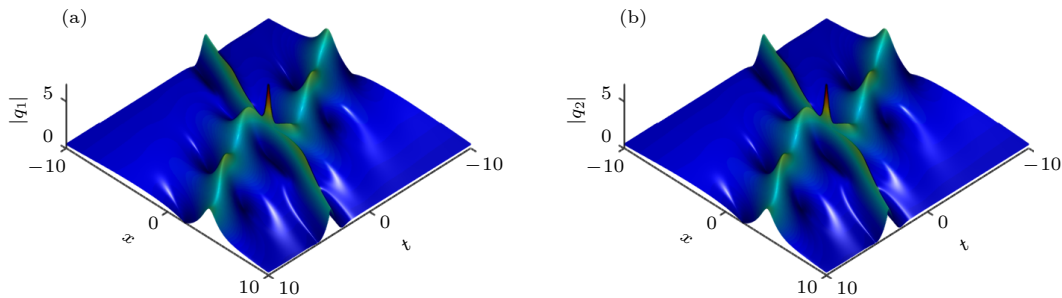


图 12 由解 (7) 给出的一个孤子与一个呼吸型孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = \frac{9}{10}i, c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{13} = 1, c_{14} = i, c_{21} = -i, c_{22} = 0, c_{23} = 1, c_{24} = -i, c_{31} = 1, c_{32} = 0, c_{33} = i, c_{34} = -i$

Fig. 12. Bound-state of one soliton and one breathing soliton via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = \frac{9}{10}i, c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{13} = 1, c_{14} = i, c_{21} = -i, c_{22} = 0, c_{23} = 1, c_{24} = -i, c_{31} = 1, c_{32} = 0, c_{33} = i, c_{34} = -i$.

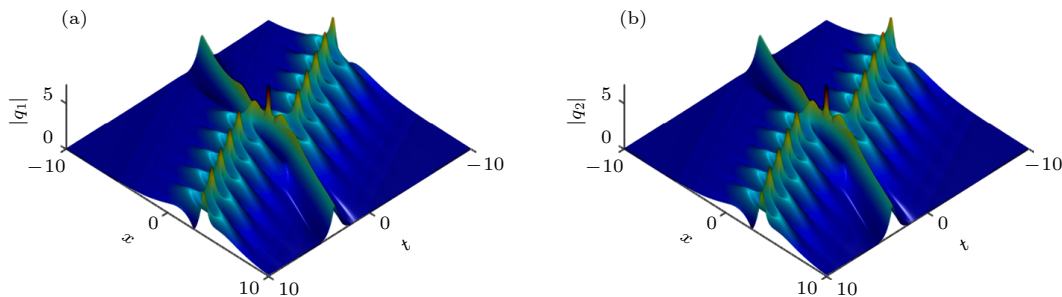


图 13 由解 (7) 给出的一个孤子与两个孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = \frac{9}{10}i, c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{13} = 1, c_{14} = -i, c_{21} = 1, c_{22} = 0, c_{23} = 1, c_{24} = -i, c_{31} = 1, c_{32} = 0, c_{33} = i, c_{34} = i$

Fig. 13. Bound-state of one soliton and two solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = \frac{9}{10}i, c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{13} = 1, c_{14} = -i, c_{21} = 1, c_{22} = 0, c_{23} = 1, c_{24} = -i, c_{31} = 1, c_{32} = 0, c_{33} = i, c_{34} = i$.

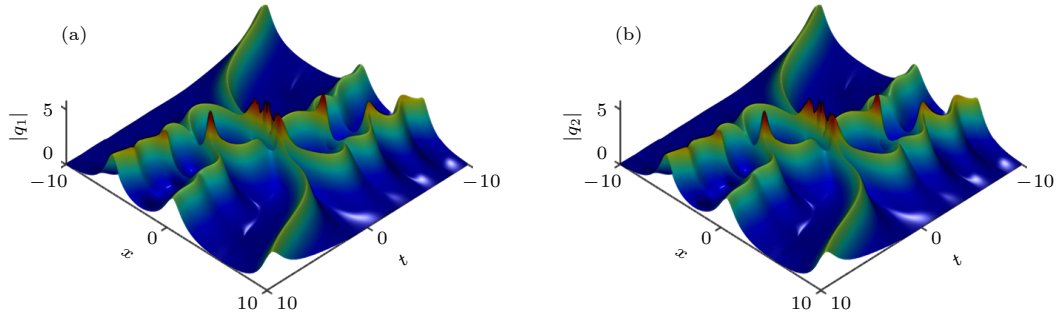


图 14 由解 (7) 给出的一个孤子与两个分离的双峰孤子的束缚态, 参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = i$, $c_{34} = i$

Fig. 14. Bound-state of one soliton and two separated bimodal solitons via Solution (7) with $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}i$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 1$, $c_{14} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = i$, $c_{23} = 1$, $c_{24} = -i$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = i$, $c_{34} = i$.

表 2 $N = 3$ 时不同参数条件下解的结构

Table 2. Structures of solutions under different parameter conditions when $N = 3$.

参数	解的结构
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = -i$	一个孤子与两个呼吸型孤子的束缚态
$C_1 = C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = -i$	一个孤子和两个孤子的束缚态
$C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = \frac{5}{4} - 3i$, $\det(C_3) = -i$	一个孤子与两个双峰孤子的束缚态
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = i$, $\det(C_3) = -i$	一个孤子与两个分离的双峰孤子的束缚态
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = i$	一个孤子与一个呼吸型孤子的束缚态
$C_1 = C_2$, $\det(C_2) = \det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = -1$, $\det(C_3) = i$	一个孤子与两个孤子的束缚态
$C_1 \neq C_2$, $\det(C_2) = i\det(C_1)$, $\det(C_1 C_2) = i$, $\det(C_3) = i$	一个孤子与两个分离的双峰孤子的束缚态

因此, 所谓“束缚态二阶或三阶孤子”, 在物理上可理解为多个孤子在非线性介质中形成的稳定或准稳定复合态.

2) 不同参数条件下相互作用类型的物理来源

本文通过调节谱参数、相位参数以及背景参数, 观察到多种不同的相互作用行为, 物理机制可归结为以下几个方面:

①相对速度失配的影响

谱参数实部的差异对应不同孤子的群速度. 当速度差较小时, 孤子之间可以长期保持近距离相互作用, 形成稳定或呼吸型束缚态. 而当速度失配增大时, 束缚态被破坏, 孤子逐渐解耦并发生分离传播.

②相位差诱导的吸引与排斥效应

不同孤子分量之间的相位差直接影响非线性干涉项的符号与强度, 从而决定孤子间的有效相互作用是吸引型还是排斥型. 这也是在不同参数区间内出现“平行传播”、“周期碰撞”或“强烈呼吸振荡”等行为的根本原因.

③高阶效应对相互作用调制的作用

高阶色散与非线性修正项改变了孤子的内部

结构, 使得能量不再局限于单一尺度, 而是在多个特征频率之间分布. 这种多尺度耦合进一步丰富了孤子之间的相互作用形式, 导致二阶与三阶束缚态在动力学行为上呈现出明显差异.

3) 二阶与三阶束缚态相互作用差异的物理理解

从物理层面看: ①二阶束缚态孤子主要体现为两孤子之间的能量交换与相位锁定, 其动力学行为相对简单, 通常表现为周期性呼吸或准弹性碰撞. ②三阶束缚态孤子由于内部包含更多自由度, 其相互作用过程涉及多重能量通道, 容易出现更复杂的时空结构演化, 如多周期振荡、非对称碰撞以及局域能量聚焦等现象.

这正是本文在不同参数条件下观察到多种相互作用类型的物理根源.

5 结 论

本文基于二元 Darboux 变换, 系统研究了具有符号交替非线性的高阶矩阵非线性薛定谔方程,

成功构造了多种类型的束缚态孤子, 并深入探讨了其相互作用动力学. 首先推导了该方程的 N 重二元 Darboux 变换, 进而详细分析了不同参数设定下束缚态孤子的形成与演化行为. 在 $N = 2$ 情形下, 根据矩阵 C_1 与 C_2 的关系及其行列式条件, 获得了呼吸型孤子、单峰/双峰束缚态孤子以及呼吸型孤子与亮孤子共存等多种构型, 揭示了孤子分量间的线性相关性及其与参数的紧密联系. 在 $N = 3$ 情形中, 进一步构造出包括一个孤子与两个呼吸型孤子、一个孤子与双峰孤子等更为复杂的束缚态结构. 通过图像分析, 揭示了孤子相互作用中丰富的动力学行为, 如形态演化、能量转移与相位偏移等现象, 并借助表格对不同约束条件下束缚态孤子的类型进行了系统归纳.

近年来, 随着超快光学测量技术的发展, 孤子及其非稳态动力学行为已能够在实验中被直接实时观测. 文献 [43] 中的相关实验研究展示了在多分量或矢量光学系统中, 孤子之间的相互作用、束缚态形成以及分量间能量交换等复杂动力学行为. 文献 [44] 报道的最新实验工作表明, 在耗散光学系统中借助时间拉伸 (time-stretch) 等实时测量技术, 可以清晰捕捉到脉动孤子及其内部演化动力学过程, 包括脉冲宽度、峰值强度以及频谱结构的周期性变化. 从实验可观测性的角度来看, 本文获得的呼吸型孤子和束缚态解在实验中可能对应于脉冲包络随传播变量呈现周期性压缩与展宽的非稳态孤子结构, 其演化特征有望在时域和频域中表现为强度和光谱的周期性调制. 特别地, 由于本文所研究模型具有矩阵结构, 不同分量之间的能量交换和相位关联行为, 可能在偏振分辨或多通道实验中体现为分量强度的同步或反同步振荡, 这与近期多分量孤子实验中观测到的现象具有一定的相似性.

参考文献

- [1] Fehenberger T, Alvarado A, Bayvel P, Hanik N 2015 *Opt. Exp.* **23** 9183
- [2] Jia T T, Gao Y T, Feng Y J, Hu L, Su J J, Li L Q, Ding C C 2019 *Nonlinear Dyn.* **96** 229
- [3] Masoudi A, Newson T P 2017 *Opt. Lett.* **42** 290
- [4] Orth A, Ploschner M, Wilson E R, Maksymov I S, Gibson B C 2019 *Sci. Adv.* **5** eaav1555
- [5] Song Y, Shi X, Wu C, Tang D, Zhang H 2019 *Appl. Phys. Rev.* **6** 021313
- [6] Stegeman G I, Segev M 1999 *Science* **286** 1518
- [7] Haelteerman M, Sheppard A 1994 *Phys. Rev. E* **49** 3376
- [8] Sheppard A P, Kivshar Y S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4773
- [9] Wu X H, Gao Y T, Yu X, Ding C C, Li L Q 2022 *Chaos, Solitons Fractals* **162** 112399
- [10] Zhao Q L, Zhang X J, Liu F H 2023 *Optik* **281** 170827
- [11] Matveev V B 1992 *Phys. Lett. A* **166** 205
- [12] Stahlhofen A A, Matveev V B 1995 *J. Phys. A: Math. Gen* **28** 1957
- [13] Liu W, Zhang Y S, He J S 2018 *Wave Random Complex* **28** 203
- [14] Yang J Q, Liu W J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100504 (in Chinese) [杨佳奇, 刘文军 2023 物理学报 **72** 100504]
- [15] Kumar S, Mohan B 2022 *Phys. Scr.* **97** 125214
- [16] Yin T L, Xing Z Q, Pang J 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 9741
- [17] Wu J P, Geng X G 2017 *Commun. Theor. Phys.* **67** 527
- [18] Zou Z F, Guo R 2023 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **124** 107316
- [19] Sun W R 2020 *Nonlinear Dyn.* **102** 1743
- [20] Wang M, Tian B, Hu C C, Liu S H 2021 *Appl. Math. Lett.* **119** 106936
- [21] Yao H, Zhang H Q, Xiong W Y 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 040201 (in Chinese) [姚慧, 张海强, 熊玮玥 2024 物理学报 **73** 040201]
- [22] Wang X, Kang J F, Zhang J L, Zhao T J, Jin W T 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 13375
- [23] Guo M Y, Xie X Y 2023 *Results Phys.* **53** 106942
- [24] Xu T, Zhu J Y 2024 *Wave Motion* **129** 103347
- [25] Ekici M, Mirzazadeh M, Sonmezoglu A, Zhou Q, Triki H, Ullah M Z, Moshokoa S P, Biswas A 2017 *Optik* **131** 964
- [26] Green P D, Biswas A 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 3865
- [27] Savecu M, Khan K R, Kohl R W, Moraru L, Yildirim A, Biswas A 2013 *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **8** 208
- [28] Zhang Y Q, Belić M, Wu Z K, Zheng H B, Lu K Q, Li Y Y, Zhang Y P 2013 *Opt. Lett.* **38** 4585
- [29] Trillo S, Deng G, Biondini G, Klein M, Clauss G F, Chabochoub A, Onorato M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 144102
- [30] Shohaib M, Masood W, Alyousef H A, Siddiq M, EI-tantawy S A 2022 *Phys. Fluids* **34** 093107
- [31] Yin H M, Chow K W 2023 *Phys. Rev. E* **107** 064215
- [32] Cheung V Y Y, Yin H M, Li J H, Chow K W 2023 *Phys. Lett. A* **476** 128877
- [33] Uchiyama M, Ieda J, Wadati M 2006 *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 064002
- [34] Sun W R, Tian B, Jiang Y, Zhen H L 2015 *Phys. Rev. E* **91** 023205
- [35] Zhang C R, Tian B, Liu L, Chai H P, Yin H M 2020 *Chaos, Solitons Fractals* **136** 109763
- [36] Porsezian K, Nakkeeran K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3955
- [37] Porsezian K 2003 *Phys. Rev. E* **68** 066607
- [38] Mirzazadeh M, Arnous A H, Mahmood M F, Zerrad E, Biswas A 2015 *Nonlinear Dyn.* **81** 277
- [39] Wang Y Y, Dai C Q, Wang X G 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 1323
- [40] Sun W R, Liu L, Wang L 2021 *Eur. Phys. J. Plus* **136** 383
- [41] Du Z, Zhao X H 2023 *Phys. Fluids* **35** 075108
- [42] Ling L M, Zhao L C, Guo B L 2015 *Nonlinearity* **28** 3243
- [43] Si Z Z, Wang Y Y, Dai C Q 2024 *Sci. Phys. Mech. Astron.* **67** 274211
- [44] Si Z Z, Ju Z T, Ren L F, Wang X P, Malomed B A, Dai C Q 2025 *Laser Photonics Rev.* **19** 2401019

Control of solitonic interactions and bound-states in the higher-order matrix nonlinear Schrödinger equation*

ZENG Pingan¹⁾ LIU Lu^{2)†} ZENG Pingping³⁾

¹⁾ (School of Science, Zhijiang College of Zhejiang University of Technology, Shaoxing 312000, China)

²⁾ (School of Economics and Management, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

³⁾ (Institute of Information Technology, Zhejiang Financial College, Hangzhou 310000, China)

(Received 21 November 2025; revised manuscript received 11 March 2026)

Abstract

We investigate the control of solitonic interactions and bound-state formations in the higher-order matrix nonlinear Schrödinger equation with the sign-alternating nonlinearity and third-order dispersion. By employing the binary Darboux transformation, we construct explicit N -soliton solutions from a zero seed background. Adjusting these parameters $l_{jk}(j, k = 1, 2, 3, 4)$ enables systematic generation of various bound-state soliton structures.

For the second-order case ($N = 2$), we obtain several distinct configurations depending on the relations between the matrices C_1 and C_2 (constructed from l_{jk}) and their determinants. When $C_1 \neq C_2$ with $\det(C_2) = i\det(C_1)$ and $\det(C_1 C_2) = -i$, the components q_1 and q_2 exhibit breathing solitons. Varying the spectral parameters λ_j transforms them into parallel breathing solitons with different amplitudes. For $C_1 \neq C_2$ with $\det(C_2) = i\det(C_1)$ and $\det(C_1 C_2) = i$, the components become linearly independent, yielding a bound state of one ordinary soliton and one breathing soliton. When $C_1 = C_2$ with $\det(C_1 C_2) = -1$, the solitons propagate with identical amplitude and velocity while displaying periodic attraction and repulsion, which is a typical soliton molecule behavior accompanied by energy redistribution at the collision points. For $C_1 = C_2$ with $\det(C_1 C_2) = 5/4 - 3i$, we find the double-peaked bound-state solitons in q_1 and single-peaked intertwined structures in q_2 .

In the third-order case ($N = 3$), we explore seven parameter regimes leading to even more complex composite states. These include: one soliton coexisting with two breathing solitons (the elastic interaction with constant velocity), one soliton with two ordinary solitons exhibiting phase shifts after the collision, one soliton with two double-peaked solitons where the amplitude changes indicate energy redistribution, and one soliton with two separated double-peaked solitons where both shape and separation are modified by energy exchange. In all cases, the binary Darboux transformation ensures that the solutions are exact and exhibit either elastic or inelastic interactions characterized by phase shifts, amplitude modulation, and periodic energy transfer among components.

To verify the robustness of the obtained solutions, we perform numerical stability tests by adding 10% Gaussian noise to the analytical profile of the breathing soliton at different propagation distances. The shape fidelity remains high, confirming the physical reliability of these structures under small perturbations.

The results provide a theoretical foundation for manipulating multi-component soliton states in conservative nonlinear systems and offer insights into the design of all optical logic devices or soliton-based communication links where controlled interactions are essential.

Keywords: higher-order matrix nonlinear Schrödinger equation, binary Darboux transformation, solitonic interactions, bound-state solitons

DOI: [10.7498/aps.75.20251591](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251591)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251591](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251591)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 72272089, 71902105).

† Corresponding author. E-mail: liulu_77@126.com

高阶矩阵非线性薛定谔方程中孤子相互作用与束缚态调控

曾平安 刘露 曾平平

Control of solitonic interactions and bound-states in the higher-order matrix nonlinear Schrödinger equation

ZENG Pingan LIU Lu ZENG Pingping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 120001 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251591

CSTR: 32037.14.aps.75.20251591

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251591>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

耦合饱和非线性薛定谔方程的多极矢量孤子

Multipole vector solitons in coupled nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearity

物理学报. 2023, 72(10): 100502 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222284>

空间位移对称非局域非线性薛定谔方程的高阶怪波解

General higher-order rogue waves in the space-shifted γ -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2023, 72(10): 104204 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222298>

具有 γ 次非线性项和时空变系数的广义 γ 维薛定谔方程的相似变换和精确解

Similarity transformations and exact solutions of the generalized γ -dimensional Schrödinger equation with γ th order nonlinear terms and spatiotemporally varying coefficients

物理学报. 2025, 74(11): 110201 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250225>

基于扩展混合训练物理信息神经网络的非线性薛定谔方程求解和参数发现

Solving nonlinear Schrödinger equations and parameter discovery via extended mixed-training physics-informed neural networks

物理学报. 2025, 74(16): 160201 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250422>

(1+1)维非线性薛定谔方程PT对称势函数的数值反演

Numerical inversion of PT-symmetric potential functions for (1+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equations

物理学报. 2025, 74(13): 134203 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250129>

散焦型非线性薛定谔方程的Whitham调制理论及其间断初值问题解的分类和演化

Whitham modulation theory of defocusing nonlinear Schrödinger equation and the classification and evolutions of solutions with initial discontinuity

物理学报. 2023, 72(10): 100503 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230172>