

专题: 超冷原子分子物理

## 光腔中不同空间维度下费米气体的超辐射相变\*

文林<sup>1)</sup> 黄焱寒<sup>1)</sup> 邱旭<sup>1)†</sup> 杨明月<sup>2)‡</sup>

1) (重庆师范大学物理与光电工程学院, 重庆 401331)

2) (首都师范大学物理系, 北京 100048)

(2026年2月2日收到; 2026年3月12日收到修改稿)

基于推广的 Dicke 模型哈密顿量和 Lindblad 主方程, 研究了单模光腔中自旋 1/2 均匀无相互作用费米气体的超辐射相变, 重点分析了空间维度、塞曼场和腔场耗散对相变临界行为的影响. 在平均场近似下, 推导了超辐射序参量与原子自旋 Bloch 方程相耦合的动力学方程, 并通过求解其稳态解和对正常态的线性稳定性分析, 得到了超辐射相变的临界光与原子耦合强度的解析表达式. 结果表明, 腔场频率和腔场耗散均会抑制超辐射相变; 塞曼场的影响则呈现显著的维度依赖性, 在一维和二维体系中, 超辐射相变临界耦合强度不依赖塞曼场, 而在三维体系中, 临界耦合强度随塞曼场增大而单调增加, 表明塞曼场会抑制超辐射相变. 该结果为实验上通过调控空间维度、塞曼场和耗散实现超辐射相变调控提供了理论依据.

**关键词:** 费米气体, 超辐射, 光腔**DOI:** 10.7498/aps.75.20260194**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260194

## 1 引言

超辐射相变是量子光学与多体物理交叉领域中的一个基本现象, 描述了原子系综与光场在强耦合条件下发生的集体量子行为. 当光与原子的耦合强度超越临界值时, 系统从光场处于真空态的正常相, 跃迁至原子呈现宏观相干性且光场获得宏观布居的超辐射相. 这一概念最初由美国物理学家 Robert Dicke 于 1954 年提出<sup>[1]</sup>, 不仅揭示了光与物质相互作用的非平衡统计性质, 也为连接微观量子世界与宏观经典行为提供了关键范例<sup>[2,3]</sup>, 对于理解开放量子系统的非平衡相变具有重要科学意义<sup>[4,5]</sup>.

近年来, 蓬勃发展的腔量子电动力学 (cavity QED) 与超冷原子物理, 已经成为探索非平衡量子多体物理的热点前沿<sup>[6,7]</sup>. 特别是 2010 年苏黎世联

邦理工学院实验组在玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 与光腔耦合系统中率先观测到了超辐射相变<sup>[8]</sup>, 引发了该领域的爆发式增长. 早期的大多数实验和理论工作主要利用原子的外部运动自由度来模拟 Dicke 模型中的二能级系统<sup>[8,9]</sup>, 成功揭示了诸如超固态、密度条纹相<sup>[10,11]</sup> 以及多模腔中涌现的  $U(1)$  对称性<sup>[12,13]</sup> 等新奇现象. 国内学者在这一领域也取得了丰硕成果, 尤其是在自旋-轨道耦合超冷原子方面开展了大量深入研究<sup>[14]</sup>.

近期, 随着实验技术的发展, 基于原子内部自旋态的超辐射相变逐渐成为研究焦点<sup>[15,16]</sup>. 当引入内部自由度时, 光与原子的集体耦合会导致更为深刻的多体效应, 例如旋量 BEC 中的自组织自旋纹理<sup>[17]</sup> 以及腔场辅助的动力学自旋-轨道耦合<sup>[18]</sup>. 特别地, 超冷费米气体与光腔耦合体系因其独特的量子统计性质, 目前也正成为该领域的新兴前沿.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12175027, 11875010)、重庆市自然科学基金 (批准号: CSTB2025NSCQ-GPX1010) 和重庆市教委科学技术研究项目 (批准号: KJQN202500531) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuqiu@cqnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: 2220601001@cmu.edu.cn

费米子遵循泡利不相容原理, 其费米面结构的存在会显著改变系统的极化率和临界行为<sup>[19,20]</sup>, 费米统计与内部光-原子耦合的结合可能诱导非常规配对机制<sup>[21]</sup>和拓扑量子物态<sup>[22]</sup>. 随着强关联费米子与光场强耦合的实验实现<sup>[23]</sup>, 实验上也观测到了由原子动量态耦合诱导的超辐射量子相变<sup>[24]</sup>, 证实了费米面拓扑结构对相变临界行为的调控作用.

目前, 关于光腔中费米气体的理论和实验工作大多数局限于三维体系. 在冷原子实验中, 原子通常被囚禁在势阱中, 可通过对不同囚禁方向的自由度施加强束缚, 使该方向的激发被冻结, 体系在低能区仅保留一个或两个方向上的有效自由度, 从而实现有效的准一维和准二维费米气体<sup>[25,26]</sup>, 为研究光腔中的低维费米气体超辐射性质提供了平台. 在一维和二维费米气体中, 态密度展现出与三维体系截然不同的能量依赖关系<sup>[27]</sup>, 这使得低维空间中费米气体与光场的耦合展现出不同的超辐射特性. 此外, 在实验过程中, 光腔不可避免地存在光子损耗, 导致系统成为典型的开放量子系统<sup>[28]</sup>. 耗散不仅会修正稳态相图<sup>[29]</sup>, 还可能诱导极限环振荡等非平衡动力学<sup>[30]</sup>. 因此, 在不同空间维度下, 研究光腔中费米气体的内部自由度耦合、外部磁场以及腔场耗散等效应对超辐射相变的影响, 对于全面理解真实条件下光-费米子相互作用的物理本质具有重要的科学价值.

本文以置于单模光学腔中的无相互作用自旋 1/2 均匀费米气体为研究对象, 基于推广的 Dicke 模型哈密顿量和 Lindblad 主方程, 在平均场近似下推导了超辐射序参量及原子自旋所满足的运动方程. 通过求解运动方程的稳态解, 并结合对正常态的线性稳定性分析, 获得了不同空间维度下超辐射相变的临界光与原子耦合强度的解析表达式, 进而系统研究了不同空间维度下塞曼场、腔场频率和腔场耗散对超辐射相变的影响. 结果表明: 在一维和二维体系中, 超辐射相变的临界耦合强度与塞曼场无关, 而随腔场频率和腔场耗散的增大而增大; 在三维体系中, 临界耦合强度除依赖腔场频率和腔场耗散外, 还随塞曼场增强而单调增大.

## 2 理论模型

考虑  $N$  个无相互作用的自旋 1/2 费米原子被置于腔场频率为  $\omega_c$  的均匀  $d$  维单模光腔中 ( $d = 1,$

2, 3), 原子通过吸收或发射光子可实现自旋翻转, 体系的哈密顿量为<sup>[24]</sup>

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \xi_{\mathbf{k}} \hat{C}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{C}_{\mathbf{k}} + h \hat{S}_{\mathbf{k},z} + \frac{2g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \hat{S}_{\mathbf{k},x} \right] + \omega_c \hat{a}^{\dagger} \hat{a}, \quad (1)$$

其中  $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$  为原子的动能,  $h$  为塞曼场强度; 算符  $\hat{C}_{\mathbf{k}} = (\hat{c}_{\mathbf{k},\uparrow}, \hat{c}_{\mathbf{k},\downarrow})^T$ ,  $\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}$  和  $\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) 分别代表产生和湮灭动量为  $\mathbf{k}$ 、自旋为  $\sigma$  的费米子场算符;  $\hat{a}^{\dagger}$  和  $\hat{a}$  分别为光子的产生和湮灭算符;  $\mu$  为化学势, 由费米原子数方程  $N = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}$  给出;  $\hat{S}_{\mathbf{k},\nu} = \frac{1}{2} \hat{C}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{\nu} \hat{C}_{\mathbf{k}}$  ( $\nu = x, y, z$ ) 为原子自旋算符,  $\boldsymbol{\sigma}_{\nu}$  泡利矩阵. 哈密顿量 (1) 中第三项代表原子与腔光场之间的相干耦合,  $g$  代表耦合强度. 当腔光场存在耗散时, 体系的动力学性质可以通过 Lindblad 主方程来描述<sup>[28,31]</sup>:

$$\partial_t \rho = -i[\hat{H}, \rho] + \kappa \hat{\mathcal{L}}[\hat{a}], \quad (2)$$

其中  $\rho$  代表体系的密度矩阵, 算符  $\hat{\mathcal{L}}[\hat{a}] = 2\hat{a}\rho\hat{a}^{\dagger} - \{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \rho\} = 2\hat{a}\rho\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rho - \rho\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$  为描述光场以衰减率  $\kappa$  向环境的不可逆光子流失, 即光场的耗散项.

一般地, 对于任意的可观测量  $\hat{O}$ , 其平均值  $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{O})$  随时间的演化可由方程  $\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \text{Tr} \left( \frac{d\rho}{dt} \hat{O} \right)$  给出, 其中  $\text{Tr}$  代表求迹. 因此, 结合哈密顿量 (1) 和 Lindblad 主方程 (2), 可导出光子湮灭算符平均值  $\langle \hat{a} \rangle$  和原子自旋算符平均值  $\langle \hat{S}_{\mathbf{k},\nu} \rangle$  所满足的运动方程:

$$i \frac{d\langle \hat{a} \rangle}{dt} = (\omega_c - i\kappa) \langle \hat{a} \rangle + \frac{2g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \langle \hat{S}_{\mathbf{k},x} \rangle, \quad (3a)$$

$$\frac{d\langle \hat{S}_{\mathbf{k},x} \rangle}{dt} = -h \langle \hat{S}_{\mathbf{k},y} \rangle, \quad (3b)$$

$$\frac{d\langle \hat{S}_{\mathbf{k},y} \rangle}{dt} = h \langle \hat{S}_{\mathbf{k},x} \rangle + \frac{2g}{\sqrt{N}} \langle (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \hat{S}_{\mathbf{k},z} \rangle, \quad (3c)$$

$$\frac{d\langle \hat{S}_{\mathbf{k},z} \rangle}{dt} = \frac{2g}{\sqrt{N}} \langle (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \hat{S}_{\mathbf{k},y} \rangle. \quad (3d)$$

在平均场近似下, 忽略光场的量子涨落、原子自旋的量子涨落以及光场与原子自旋之间的涨落关联, 引入超辐射序参量  $\alpha = \langle \hat{a} \rangle$ , 并取  $\langle (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \hat{S}_{\mathbf{k},\nu} \rangle \approx \langle \hat{a}^{\dagger} + \hat{a} \rangle \langle \hat{S}_{\mathbf{k},\nu} \rangle = (\alpha + \alpha^*) S_{\mathbf{k},\nu}$ , 其中  $S_{\mathbf{k},\nu} = \langle \hat{S}_{\mathbf{k},\nu} \rangle$ . 则方程 (3) 在平均场近似下可写作:

$$i\frac{d\alpha}{dt} = (\omega_c - i\kappa)\alpha + \frac{2g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k},x}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\mathbf{S}_{\mathbf{k}}}{dt} = \mathbf{B}_{\text{eff}} \times \mathbf{S}_{\mathbf{k}}, \quad (4b)$$

其中,  $\mathbf{B}_{\text{eff}} = \left( -\frac{2g}{\sqrt{N}}(\alpha + \alpha^*), 0, -h \right)$ ,  $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}$  代表以  $S_{\mathbf{k},x}$ ,  $S_{\mathbf{k},y}$  和  $S_{\mathbf{k},z}$  为分量的平均自旋矢量. 方程 (4b) 描述原子平均自旋矢量在有效磁场  $\mathbf{B}_{\text{eff}}$  中进动时所满足的 Bloch 方程. 运动方程 (4) 清晰展示, 通过光与原子的耦合, 光子的超辐射以有效外磁场的形式影响原子平均自旋矢量的进动, 而原子平均自旋矢量的进动又反过来影响光子超辐射的动力学性质.

在平均场近似下, 通过幺正变换  $\hat{c}_{\mathbf{k},\uparrow} = \cos\theta \times \hat{\gamma}_{\mathbf{k},+} - \sin\theta \hat{\gamma}_{\mathbf{k},-}$  和  $\hat{c}_{\mathbf{k},\downarrow} = \sin\theta \hat{\gamma}_{\mathbf{k},+} + \cos\theta \hat{\gamma}_{\mathbf{k},-}$ , 可将哈密顿量 (1) 进行对角化:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s=\pm} E_{\mathbf{k},s} \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s} + \omega_c |\alpha|^2, \quad (5)$$

其中  $\hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}$  和  $\hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}^\dagger$  分别代表费米型准粒子的湮灭算符和产生算符,  $E_{\mathbf{k},\pm} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu \pm \Lambda$  为准粒子能谱,  $\Lambda = \sqrt{h^2/4 + g^2(\alpha^* + \alpha)^2/N}$  为受光场调制后的有效塞曼场, 幺正变换中  $\theta$  满足  $\sin 2\theta = g(\alpha + \alpha^*)/(\sqrt{N}\Lambda)$  和  $\cos(2\theta) = h/(2\Lambda)$ . 在准粒子表象中, 由于零温平均值  $\langle \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s'} \rangle = \Theta(-E_{\mathbf{k},s}) \delta_{s,s'}$ , 则费米原子数  $N = \sum_{\mathbf{k},s} \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s} = \sum_{\mathbf{k},s} \Theta(-E_{\mathbf{k},s})$ , 其中  $\Theta(x)$  为阶跃函数. 对于原子密度为  $n$  的  $d$  维自旋 1/2 均匀无相互作用费米气体, 态密度为

$$D_d(\varepsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{d}{4E_F} \left( \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_F} \right)^{d/2-1},$$

费米能为  $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} [2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1) n]^{2/d}$ . 利用变换

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int_0^\infty D_d(\varepsilon_{\mathbf{k}}) d\varepsilon_{\mathbf{k}},$$

可将原子数方程写作:

$$1 = \frac{1}{2E_F^{d/2}} I_d^+(\alpha), \quad (6)$$

其中函数

$$I_d^\pm(\alpha) = (\mu + \Lambda)^{d/2} \Theta(\mu + \Lambda) \pm (\mu - \Lambda)^{d/2} \Theta(\mu - \Lambda).$$

在原子数方程 (6) 的限制下, 通过求解运动方程 (4), 可以研究体系的动力学性质. 一方面, 通过设  $\alpha$  和  $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}$  不含时, 取方程 (4) 左边等于 0, 可研究体系

的稳态性质. 在准粒子表象中,

$$S_{\mathbf{k},x} = \frac{g(\alpha + \alpha^*)}{2\sqrt{N}\Lambda} [\Theta(-E_{\mathbf{k},+}) - \Theta(-E_{\mathbf{k},-})],$$

序参量  $\alpha$  满足的稳态方程可写作:

$$0 = (\omega_c - i\kappa)\alpha - \frac{g^2(\alpha + \alpha^*)}{2\Lambda E_F^{d/2}} I_d^-(\alpha). \quad (7)$$

因此, 联立求解方程 (6) 和 (7), 可获得体系的稳态解, 进而研究体系的稳态超辐射性质. 另一方面, 当考虑光场涨落和原子自旋涨落时, 也可以通过线性化方程 (4), 研究稳态的动力学稳定性及稳态的静态相变. 若将稳态解记为  $\tilde{\alpha}$  和  $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{k},\nu}$ , 并设  $\alpha(t) = \tilde{\alpha} + \delta\alpha(t)$  和  $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(t) = \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} + \delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(t)$ , 代入方程 (4) 并对其做线性化处理 (保留至  $\delta\alpha(t)$  和  $\delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(t)$  的一阶), 可得到涨落导致的偏离量  $\delta\alpha(t)$  和  $\delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(t)$  所满足的线性运动方程:

$$\frac{d\delta\alpha}{dt} = -i(\omega_c - i\kappa)\delta\alpha - i\frac{2g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \delta S_{\mathbf{k},x}, \quad (8a)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}}}{dt} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{eff}} \times \delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}} + \delta\mathbf{B}_{\text{eff}} \times \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}}, \quad (8b)$$

其中  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{eff}} = \left( -\frac{2g}{\sqrt{N}}(\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^*), 0, -h \right)$  为稳态有效磁场,  $\delta\mathbf{B}_{\text{eff}} = -\frac{2g}{\sqrt{N}}(\delta\alpha + \delta\alpha^*, 0, 0)$  为涨落引起的有效磁场. 进一步, 在方程 (8) 中取  $\delta\alpha(t) \propto e^{-i\lambda t}$  和  $\delta\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(t) \propto e^{-i\lambda t}$ , 可通过分析  $\lambda$  的取值来研究稳态的静态相变和涨落下的动力学稳定性. 当  $\lambda$  的虚部小于 0, 涨落将随时间指数衰减, 稳态解动力学稳定. 当  $\lambda$  的虚部大于 0, 涨落随时间指数增长, 稳态解动力学不稳定. 当  $\lambda$  为纯实数时, 涨落将绕着平衡态以  $|\lambda|$  为频率作周期性振荡. 若  $\lambda$  的实部非 0, 且虚部小于 0, 则对应阻尼振荡. 特别地,  $\lambda = 0$  对应零频软模, 通常对应于稳态的失稳边界或连续相变的临界点.

### 3 不同空间维度下无耗散体系的稳态超辐射相变

首先研究无耗散的情况下, 体系在不同维度下的稳态超辐射相变. 通过数值求解原子数方程 (6) 和稳态方程 (7), 图 1(a)—(c) 展示了不同维度中, 在给定的光场频率  $\omega_c$  下, 超辐射序参量  $\alpha$  随光与原子耦合强度  $g$  和塞曼场强度  $h$  的变化. 结果表明, 无论哪个维度, 光与原子耦合强度始终存在一

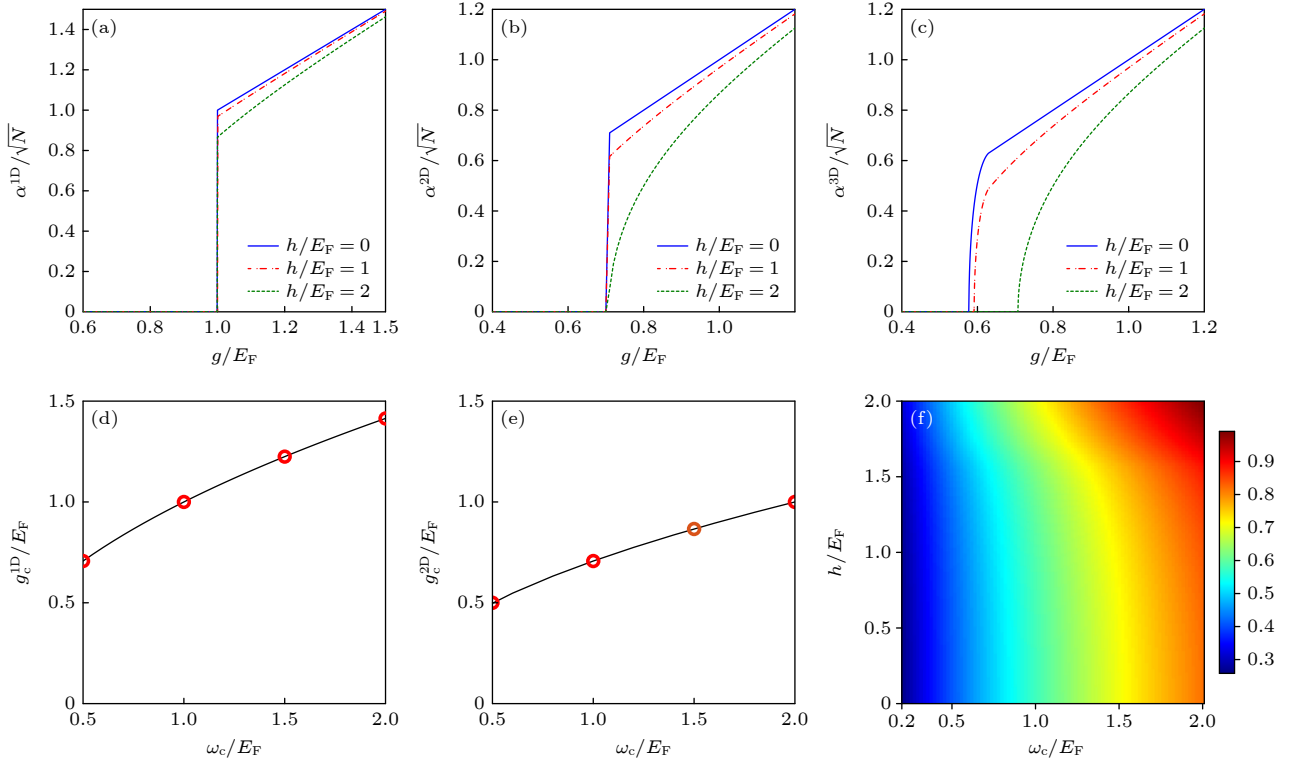


图 1 (a)–(c) 分别展示不同塞曼场强度下一维、二维和三维体系的超辐射序参量随耦合强度的变化, 其中  $\omega_c = E_F$ ; (d) 和 (e) 分别展示一维和二维体系中超辐射相变的临界耦合强度随腔场频率的变化, 其中黑色实线代表解析结果 (12) 和 (13), 红色圆圈代表数值求解方程 (6) 和 (7) 的结果; (f) 为三维体系的超辐射相变的临界耦合强度随塞曼场强度和腔场频率的变化

Fig. 1. (a)–(c) show the dependence of the superradiant order parameter on the light-atom coupling strength in one-, two-, and three-dimensional systems, respectively, for different Zeeman-field strengths, where  $\omega_c = E_F$ ; (d) and (e) show the dependence of the critical coupling strength for the superradiant phase transition on the cavity frequency in the one- and two-dimensional systems, respectively, where the black solid lines represent the analytical results in Eqs. (12) and (13), and the red circles denote the numerical results obtained by solving Eqs. (6) and (7); (f) shows the dependence of the critical coupling strength for the superradiant phase transition in the three-dimensional system on the Zeeman-field strength and the cavity frequency.

临界值, 分别记为  $g_c^{1D}$ ,  $g_c^{2D}$  和  $g_c^{3D}$ . 当光与原子耦合强度小于临界值时, 序参量  $\alpha = 0$ , 体系处于正常态. 但当耦合强度超过临界值时, 序参量  $\alpha$  不为零, 并随着耦合强度增强而连续增长, 体系处于超辐射态. 特别地, 对于一维和二维体系, 图 1(a) 和图 1(b) 表明, 无论塞曼场强度取何值, 超辐射相变的临界耦合强度  $g_c^{1D}$  和  $g_c^{2D}$  始终保持不变, 与塞曼场强度无关. 而对于三维体系, 如图 1(c) 所示, 不同塞曼场取值下, 超辐射相变的临界耦合强度  $g_c^{3D}$  将发生变化, 说明  $g_c^{3D}$  与  $h$  有关.

超辐射相变的临界耦合强度展现出的典型特征, 可通过对正常态的线性稳定性分析进行定量计算. 对于正常态  $\alpha = 0$ ,  $\delta S_{\mathbf{k},z}$  不随时间变化, 设  $\delta\alpha(t) = ae^{-i\lambda t}$ ,  $\delta\alpha^*(t) = be^{-i\lambda t}$ ,  $\delta S_{\mathbf{k},x}(t) = s_{\mathbf{k},x}e^{-i\lambda t}$  和  $\delta S_{\mathbf{k},y}(t) = s_{\mathbf{k},y}e^{-i\lambda t}$ , 则线性化方程 (8) 为

$$\lambda a = \omega_c a + \frac{2g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{k},x}, \quad (9a)$$

$$\lambda b = -\omega_c b - \frac{2g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{k},x}, \quad (9b)$$

$$\lambda s_{\mathbf{k},x} = ih s_{\mathbf{k},y}, \quad (9c)$$

$$\lambda s_{\mathbf{k},y} = -ih s_{\mathbf{k},x} - i \frac{2g}{\sqrt{N}} (a + b) \tilde{S}_{\mathbf{k},z}. \quad (9d)$$

由于  $\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{S}_{\mathbf{k},z} = \frac{1}{4E_F^{d/2}} I_d^-(0)$ , 联立方程 (9c) 和 (9d) 求解  $s_{\mathbf{k},x}$ , 并将其代入 (9a) 式和 (9b) 式中, 可得关于  $a$  和  $b$  满足的齐次线性方程组:

$$\begin{pmatrix} \lambda - \omega_c + \chi(\lambda) & \chi(\lambda) \\ -\chi(\lambda) & \lambda + \omega_c - \chi(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

其中  $\chi(\lambda) = \frac{g^2 h}{(h^2 - \lambda^2) E_F^{d/2}} I_d^-(0)$ . 根据齐次线性方程组有非零解的条件, 即系数矩阵的行列式为零, 并结合超辐射相变临界点处  $\lambda = 0$ , 可导出不同维度下超辐射相变的临界耦合强度为

$$g_c^d = \sqrt{\frac{h\omega_c E_F^{d/2}}{2I_d^-(0)}}. \quad (11)$$

通过从正常态 ( $\alpha = 0$ ) 原子数方程 (6) 中解出化学势, 并获得  $I_d^-(0)$  的解, 最终可通过方程 (11) 确定超辐射相变点处的临界耦合强度  $g_c^d$ .

将一维体系 ( $d = 1$ ), 在正常态 ( $\alpha = 0$ ) 时的原子数方程 (6) 两边同时乘以  $I_1^-(0)$ , 并利用  $I_1^+(0)I_1^-(0) = h$ , 可得  $I_1^-(0) = \frac{h}{2\sqrt{E_F}}$ , 则超辐射相变的临界耦合强度为

$$g_c^{1D} = \sqrt{\omega_c E_F}. \quad (12)$$

对于二维体系 ( $d = 2$ ), 由  $I_d^-(\alpha)$  的定义可得  $I_2^-(0) = h$ , 则超辐射相变的临界耦合强度为

$$g_c^{2D} = \sqrt{\frac{\omega_c E_F}{2}}. \quad (13)$$

由此可见, 对于一维和二维体系, 超辐射相变的临界耦合强度  $g_c^{1D}$  和  $g_c^{2D}$  均与塞曼场强度  $h$  无关, 说明低维费米体系超辐射临界耦合强度对磁场的鲁棒性, 超辐射相变的临界耦合强度完全由腔场频率  $\omega_c$  决定. 如图 1(d) 和图 1(e) 所示, 腔场频率越大, 超辐射临界耦合强度越大, 说明腔场频率抑制超辐射.

对于三维体系 ( $d = 3$ ), 由原子数方程 (6) 可得  $I_3^-(0) = h(h^2 + 12\mu^2)/(8E_F^{3/2})$ , 超辐射相变临界耦合强度在形式上可写作

$$g_c^{3D} = \sqrt{\frac{4\omega_c E_F^3}{h^2 + 12(\mu_c^{3D})^2}}, \quad (14)$$

其中超辐射相变临界点处的化学势  $\mu_c^{3D}$  可由原子数方程 (6) 解出. 如图 1(c) 所示, 与低维体系不同, 三维体系的超辐射相变临界耦合强度将依赖于  $h$ , 表明不同塞曼场强度下对应的超辐射相变的临界耦合强度不同. 图 1(f) 进一步给出了超辐射相变的临界耦合强度随腔场频率和塞曼场强度的变化, 对于固定的腔场频率, 超辐射相变的临界耦合强度随  $h$  的增大而增加, 反映塞曼场的存在将抑制超辐射相变, 说明可通过磁场有效调控超辐射相变.

#### 4 不同空间维度下耗散体系的非平衡稳态超辐射相变

在真实光腔实验中, 光子耗散不可避免, 因此体系应作为开放量子系统处理. 当存在耗散时, 系

统将不再处于热平衡态, 而是演化至非平衡稳态. 下面进一步讨论不同空间维度下耗散对超辐射相变临界行为的影响. 对于一维和二维体系, 图 2(a)–(e) 展示了超辐射序参量  $|\alpha|^2/N$  在不同  $h$  和不同  $\kappa$  取值下随耦合强度  $g$  的变化. 与无耗散情形类似, 无论塞曼场耦合强度取何值, 超辐射相变的临界耦合强度始终保持不变, 说明低维体系的超辐射转变临界耦合强度在耗散存在时也不依赖于塞曼场强度. 而对于固定塞曼场强度, 不同的腔场耗散对应的超辐射临界耦合强度的值不同, 它随着耗散的增加而增加, 说明耗散的存在会抑制超辐射相变, 体现了腔场耗散的引入总是倾向于破坏原子-光场的相干性. 对于三维体系, 如图 3 所示, 超辐射相变的临界耦合强度不仅依赖于腔场耗散, 而且还依赖于塞曼场强度.

耗散体系的超辐射相变临界耦合强度所展现的典型特性, 仍可通过对正常态的线性稳定性分析进行定量说明. 当存在耗散时, 齐次线性方程组 (10) 变为

$$\begin{pmatrix} \lambda - \omega_c + i\kappa + \chi(\lambda) & \chi(\lambda) \\ -\chi(\lambda) & \lambda + \omega_c + i\kappa - \chi(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

因此, 超辐射相变的临界耦合强度为

$$g_c^d = \sqrt{\frac{h(\omega_c^2 + \kappa^2) E_F^{d/2}}{2\omega_c I_d^-(0)}}. \quad (16)$$

对于一维和二维体系, 由于  $I_1^-(0) = h/(2\sqrt{E_F})$  及  $I_2^-(0) = h$ , 则超辐射相变的临界耦合强度为

$$g_c^{1D} = \sqrt{\frac{(\omega_c^2 + \kappa^2) E_F}{\omega_c}}, \quad (17a)$$

$$g_c^{2D} = \sqrt{\frac{(\omega_c^2 + \kappa^2) E_F}{2\omega_c}}. \quad (17b)$$

方程 (17a) 和 (17b) 清晰地展示出, 低维体系超辐射相变的临界耦合强度与塞曼场无关, 完全由腔场耗散和频率决定 (见图 2(c) 和图 2(f)). 对于三维体系,  $I_3^-(0)$  与塞曼场强度不成正比关系, 无法将方程 (16) 分子的  $h$  抵消, 超辐射相变的临界耦合强度将与塞曼场强度有关. 如图 3(c) 所示,  $g_c^{3D}$  将随塞曼场强度和腔场耗散的增加而增加, 说明塞曼场和腔场衰减将共同抑制三维体系的超辐射相变.

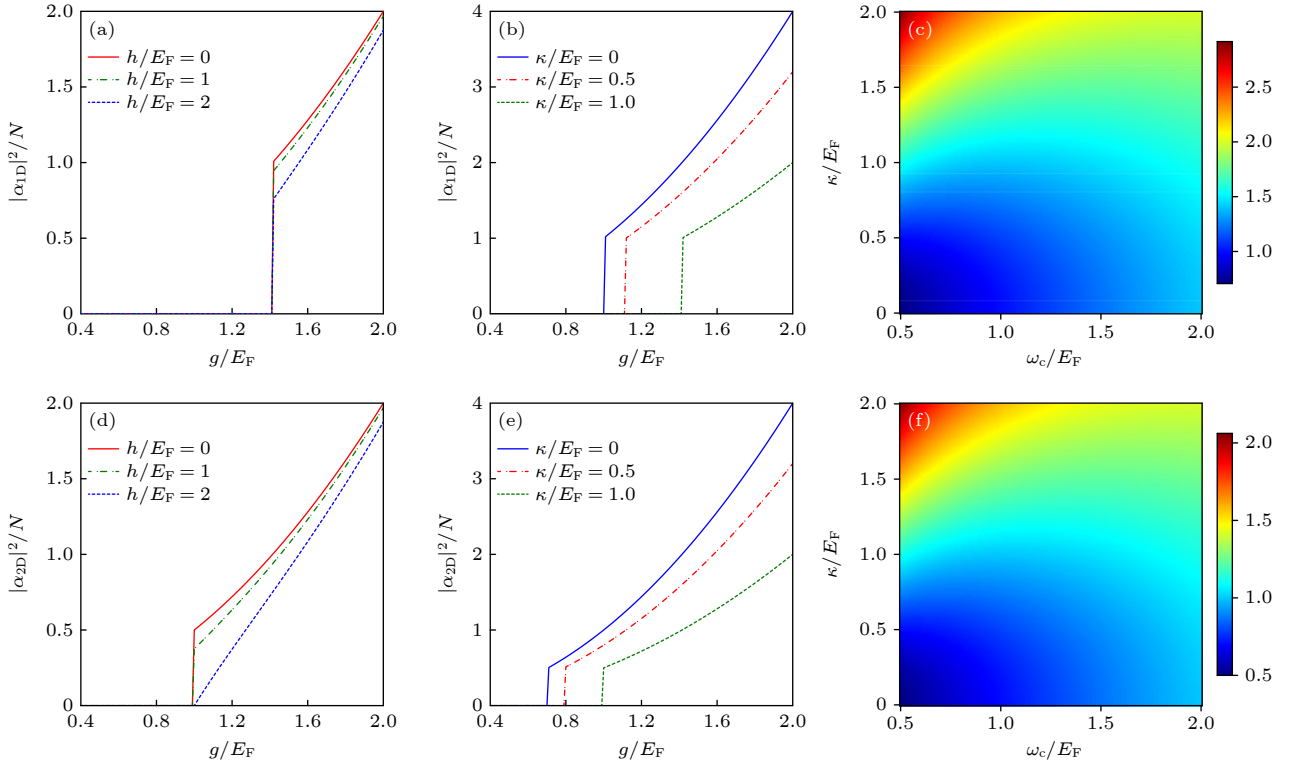


图 2 (a) 和 (b) 分别展示一维体系在不同塞曼场强度和不同腔场耗散下超辐射序参量随耦合强度的变化; (c) 为一维体系超辐射相变的临界耦合强度随腔场耗散和腔场频率的变化; (d) 和 (e) 分别展示二维体系在不同塞曼场强度和不同腔场耗散下超辐射序参量随耦合强度的变化; (f) 为二维体系超辐射相变的临界耦合强度随腔场耗散和腔场频率的变化. (a) 和 (d) 中的参数取值为  $\omega_c = E_F$  和  $\kappa = E_F$ , (b) 和 (e) 中的参数取值为  $\omega_c = E_F$  和  $h = E_F$

Fig. 2. (a) and (b) show the dependence of the superradiant order parameter on the coupling strength in the one-dimensional system for different Zeeman-field strengths and different cavity dissipation rates, respectively; (c) shows the dependence of the critical coupling strength for the superradiant phase transition in the one-dimensional system on the cavity dissipation rate and the cavity frequency; (d) and (e) show the dependence of the superradiant order parameter on the coupling strength in the two-dimensional system for different Zeeman-field strengths and different cavity dissipation rates, respectively; (f) shows the dependence of the critical coupling strength for the superradiant phase transition in the two-dimensional system on the cavity dissipation rate and the cavity frequency. In panels (a) and (d), the parameters are set to  $\omega_c = \kappa = E_F$ , while in panels (b) and (e), the parameters are set to  $\omega_c = h = E_F$ .

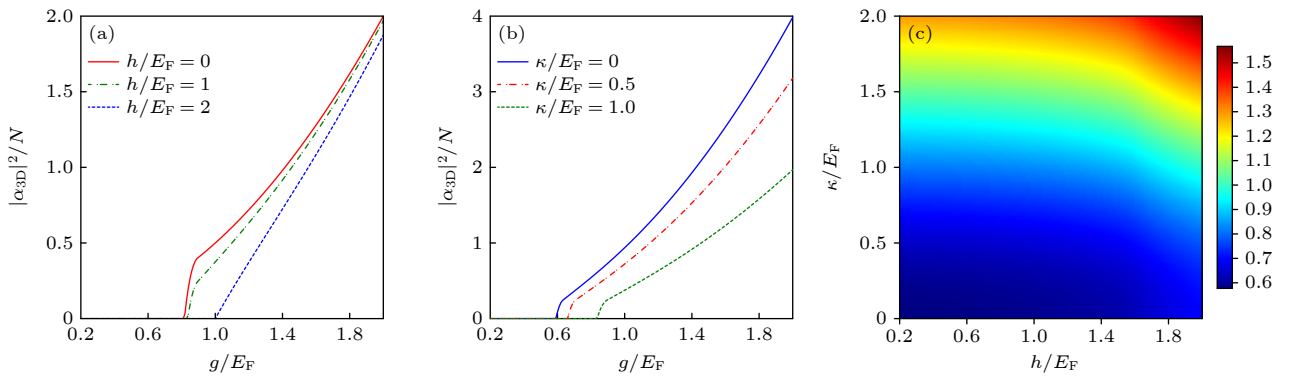


图 3 (a) 和 (b) 分别展示三维体系在不同塞曼场强度和不同腔场耗散下超辐射序参量随耦合强度的变化, (a) 和 (b) 中的参数分别为  $\omega_c = \kappa = E_F$  和  $\omega_c = h = E_F$ ; (c) 为三维体系超辐射相变的临界耦合强度随腔场耗散和塞曼场强度的变化, 其中参数  $\omega_c = E_F$

Fig. 3. (a) and (b) show the dependence of the superradiant order parameter on the coupling strength in the three-dimensional system for different Zeeman-field strengths and different cavity dissipation rates, respectively. In panel (a), the parameters are set to  $\omega_c = \kappa = E_F$ , while in panel (b), the parameters are set to  $\omega_c = h = E_F$ . (c) shows the dependence of the critical coupling strength for the superradiant phase transition in the three-dimensional system on the cavity dissipation rate and the Zeeman-field strength, with  $\omega_c = E_F$ .

## 5 结 论

本文以耦合于单模光腔的超冷自旋 1/2 均匀无相互作用费米气体为研究对象, 基于推广的 Dicke 模型哈密顿量和 Lindblad 主方程, 在平均场近似下推导了描述体系零温超辐射动力学行为的运动方程. 结果表明, 超辐射序参量的演化方程与表征原子自旋进动的 Bloch 方程相互耦合: 一方面, 光子的超辐射可等效为外磁场, 从而驱动原子平均自旋矢量的进动; 另一方面, 原子平均自旋矢量的演化又反过来影响光场超辐射的动力学过程. 在此基础上, 通过求解运动方程的稳态解并结合线性稳定性分析, 得到了超辐射相变临界耦合强度的解析表达式, 并系统分析了腔场频率、腔场耗散以及塞曼场对超辐射相变的影响. 研究发现, 腔场频率和腔场耗散均会抑制超辐射的产生; 同时, 塞曼场的作用表现出显著的维度依赖性: 在一维和二维体系中, 超辐射相变的临界耦合强度与塞曼场无关, 而在三维体系中, 临界耦合强度随塞曼场增强而单调增大. 上述结果为实验上通过调控空间维度、塞曼场和腔场耗散实现超辐射相变的可控调节提供了理论依据.

## 参考文献

- [1] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [2] Hepp K, Lieb E H 1973 *Ann. Phys.* **76** 360
- [3] Wang Y K, Hioe F T 1973 *Phys. Rev. A* **7** 831
- [4] Emary C, Brandes T 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 044101
- [5] Kirton P, Roses M M, Keeling J, Dalla Torre E G 2019 *Adv. Quantum Technol.* **2** 1800043
- [6] Mekhov I B, Ritsch H 2012 *J. Phys. B* **45** 102001
- [7] Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553
- [8] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [9] Nagy D, K'onya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [10] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402
- [11] Mottl R, Brennecke F, Baumann K, Landig R, Donner T, Esslinger T 2012 *Science* **336** 1570
- [12] Léonard J, Morales A, Zupancic P, Esslinger T, Donner T 2017 *Nature* **543** 87
- [13] Léonard J, Morales A, Zupancic P, Donner T, Esslinger T 2017 *Science* **358** 1415
- [14] Shi T T, Wang L J, Wang J K, Zhang W 2020 *Acta Phys. Sinica* **69** 016701 (in Chinese) [施婷婷, 汪六九, 王璟琨, 张威 2020 物理学报 **69** 016701]
- [15] Zhiqiang Z, Lee C H, Kumar R, Arnold K J, Masson S J, Parkins A S, Wilkowski D 2017 *Optica* **4** 424
- [16] Landini M, Dogra N, Kroeger K, Hruby L, Donner T, Esslinger T 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 223602
- [17] Mivehvar F, Ostermann S, Piazza F, Ritsch H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 123601
- [18] Deng Y, Cheng J, Jing H, Yi S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143007
- [19] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143002
- [20] Piazza F, Strack P 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143003
- [21] Chen Y, Yu Z, Zhai H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143004
- [22] Yu D, Pan L, Chen X, Zhang P 2018 *Front. Phys.* **13** 136701
- [23] Roux K, Konishi H, Helson V, Brantut J 2020 *Nat. Commun.* **11** 2974
- [24] Zhang X, Chen Y, Wu Z, Wang J, Fan J, Deng S, Wu H 2021 *Science* **373** 1359
- [25] Bloch I, Dalibard J, Zwirger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [26] Martiyanov K, Makhlov V, Turlapov A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 030404
- [27] Levinsen J, Parish M M 2015 *Annu. Rev. Cold At. Mol.* **3** 1
- [28] Dimer F, Estienne B, Parkins A S, Carmichael H J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013804
- [29] Bhaseen M J, Mayoh J, Simons B D, Keeling J 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013817
- [30] Dogra N, Landini M, Kroeger K, Hruby L, Donner T, Esslinger T 2019 *Science* **366** 1496
- [31] Kirton P, Keeling J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 123602

SPECIAL TOPIC—Ultracold atomic and molecular physics

# Superradiant phase transition of Fermi gases in an optical cavity in different spatial dimensions<sup>\*</sup>

WEN Lin<sup>1)</sup> HUANG Yihan<sup>1)</sup> QIU Xu<sup>1)†</sup> YANG Mingyue<sup>2)‡</sup>1) (*College of Physics and Optoelectronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)2) (*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048, China*)

( Received 2 February 2026; revised manuscript received 12 March 2026 )

## Abstract

We investigate the zero-temperature superradiant phase transition of an ultracold uniform noninteracting spin-1/2 Fermi gas coupled to a single-mode optical cavity. Starting from a generalized Dicke-model Hamiltonian and incorporating cavity photon loss through the Lindblad master equation, within the mean-field approximation, we derive the equations of motion for the superradiant order parameter and the average atomic spin vector at zero-temperature, and show that the superradiant order parameter is self-consistently coupled to a Bloch-type equation describing the spin precession of the fermionic atoms. This coupled dynamics reveals a transparent physical picture: Through the light-atom coupling, the superradiant order parameter serves as an effective external magnetic field that drives the precession of the average atomic spin vector, while the precession of the average atomic spin vector, in turn, feeds back on the dynamics of the photon superradiance. Based on the steady-state solutions of equations of motion together with a linear stability analysis of the normal state, and by expressing the thermodynamic quantities in terms of the density of states of a  $d$ -dimensional uniform noninteracting Fermi gas, we obtain the analytical expressions for the critical light-atom coupling strength of the superradiant transition in different spatial dimensions, and systematically analyze how the critical light-atom coupling strength depends on the cavity frequency, cavity dissipation, and Zeeman field. Our results show that both the cavity frequency and cavity dissipation increase the critical light-atom coupling strength and therefore suppress the emergence of the superradiant phase. In contrast, the role of Zeeman field is strongly dimension dependent. In one- and two-dimensional systems, the critical light-atom coupling strength is found to be completely independent of the Zeeman field. In the three-dimensional case, the critical light-atom coupling strength increases monotonically with the Zeeman field. These results provide a theoretical basis for experimentally controlling the superradiant phase transition by tuning the spatial dimensionality, Zeeman field, cavity frequency, and cavity dissipation.

**Keywords:** Fermi gas, superradiance, optical cavity

**DOI:** [10.7498/aps.75.20260194](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260194)

**CSTR:** [32037.14.aps.75.20260194](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260194)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175027, 11875010), the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant No. CSTB2025NSCQ-GPX1010), and the Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission, China (Grant No. KJQN202500531).

† Corresponding author. E-mail: [xuqiu@cqu.edu.cn](mailto:xuqiu@cqu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [2220601001@cnu.edu.cn](mailto:2220601001@cnu.edu.cn)

光腔中不同空间维度下费米气体的超辐射相变

文林 黄焱寒 邱旭 杨明月

**Superradiant phase transition of Fermi gases in an optical cavity in different spatial dimensions**

WEN Lin HUANG Yihan QIU Xu YANG Mingyue

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 080301 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260194

CSTR: 32037.14.aps.75.20260194

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260194>

当期内容 View table of contents: <https://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

分子团簇在扫描隧道显微镜针尖与衬底形成的不同腔中的超辐射研究

Superradiance study of molecular clusters in different cavities formed by scanning tunneling microscope tip and substrate

物理学报. 2025, 74(7): 076102 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241720>

由超辐射引起的迁移率边和重返局域化

Mobility edges and reentrant localization induced by superradiance

物理学报. 2022, 71(11): 113702 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212246>

基于双原子超-亚辐射态选择性驱动的空间定向关联辐射

Spatially oriented correlated emission based on selective drive of diatomic superradiance states

物理学报. 2024, 73(14): 144202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240521>

旋转声学黑洞的超辐射与霍金辐射数值研究

Numerical study of superradiance and Hawking radiation from rotating acoustic black hole

物理学报. 2025, 74(15): 150401 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250582>

双模光机械腔中冷原子的量子相变和超辐射相塌缩

Quantum phase transitions and superradiation phase collapse of cold atoms in a two-mode photomechanical cavity

物理学报. 2024, 73(24): 240301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241103>

耦合光机械腔中的量子相变

Quantum phase transitions in coupled optomechanical cavities

物理学报. 2025, 74(10): 100202 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250046>