

专题: 超冷原子分子物理

开边界条件下一维非互易跃迁费米哈伯德模型的基态性质*

尹相国^{1)2)3)†} 刘璐璐¹⁾²⁾

1) (山西大学, 理论物理研究所, 太原 030006)

2) (山西大学, 量子技术与器件国家重点实验室, 太原 030006)

3) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2026年2月11日收到; 2026年4月9日收到修改稿)

非厄米趋肤效应是非厄米系统中极具特色且备受关注的物理现象, 探索其与非厄米多体系统量子调控规律的内在关联, 对该领域的理论研究具有重要意义. 本文以一维开边界条件下的非互易跃迁费米哈伯德模型为研究体系, 采用 Bethe ansatz 方法求解对应方程, 获得系统精确解; 基于此精确解, 进一步计算系统基态的密度分布与动量分布, 实现了对多体体系中非厄米趋肤效应的系统性表征与分析. 研究发现, 粒子间相互作用与虚规范相位之间存在显著的竞争机制: 虚规范相位可显著增强非厄米趋肤效应, 而粒子间相互作用则对该效应具有抑制作用, 二者的协同作用共同决定了系统在实空间与动量空间中的分布演化特性. 本研究明确了相互作用与虚规范相位对趋肤效应的调控机理, 有利于加深对非厄米强关联多体系统趋肤效应的理解.

关键词: 哈伯德模型, Bethe ansatz 方法, 密度分布, 动量分布**DOI:** 10.7498/aps.75.20260238**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260238

1 引言

近年来, 非厄米系统的研究取得了显著进展^[1-8], 一系列物理现象相继被揭示, 包括丰富的非厄米拓扑分类^[9-16]、非厄米趋肤效应^[17-28]以及各类局域化行为^[29-32]等. 非厄米开放量子系统中一个尤为突出的现象是非厄米趋肤效应, 其核心特征是本征态在系统边界处的显著局域化^[17,33-37], 这一效应已成为非厄米物理诸多研究方向的重要基石^[3,38-41]. 随着研究的深入, 探究多体关联对非厄米趋肤效应的调控作用逐渐成为非厄米物理领域的重要方向.

典型的可积量子多体模型, 如 Lieb-Liniger 模型^[42,43]、Yang-Gaudin 模型^[44,45]以及费米哈伯德模型^[46]等, 它们的严格解为揭示多体系统的关联

效应提供了理论基础, 并在冷原子物理与凝聚态物理中得到广泛应用^[47]. 非厄米物理的兴起为可积多体系统的研究注入了新的活力, 研究者^[48-50]通过引入非互易跃迁、虚规范相位等非厄米项, 构建了一系列非厄米可积模型并进行严格求解, 为解析非厄米性与多体关联的耦合机制提供了关键途径. 潘磊等^[48]在含虚规范相位的一维相互作用玻色气体研究中发现, 非厄米趋肤效应在不同强度的相互作用下均显著存在; 陈澍等^[49]通过理论推导证实一维单向跃迁非厄米玻色-哈伯德模型的可积性, 并发现了非厄米趋肤效应在热力学极限下会被 Mott 绝缘相完全抑制的现象; Longhi^[50]针对含非互易跃迁的两粒子非厄米费米哈伯德模型, 求解了不同边界条件下的精确能谱. 对于多粒子系统的非互易跃迁费米哈伯德模型, 周期边界条件下的 Bethe

* 国家自然科学基金 (批准号: 12461160324) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202103021224033) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yinxianguo@sxu.edu.cn

ansatz 方程^[51]虽已被提出并求解, 但开边界条件下, 虚规范相位与粒子间相互作用强度对非厄米趋肤效应的具体影响尚未得到系统探索.

本文对一维开边界条件下的非互易跃迁费米哈伯德模型开展系统性研究, 通过求解 Bethe ansatz 方程, 得到系统的本征函数以及能量表达式, 进而计算得到粒子的空间密度分布与动量分布, 从而揭示虚规范相位与粒子间相互作用对非厄米趋肤效应的调控规律. 全文内容按照以下逻辑逐步展开: 第 2 节详细介绍了所研究系统的哈密顿量, 通过虚规范变换, 将非互易跃迁情形下的本征方程转化为互易跃迁情形下的本征方程, 并分别给出了理想费米气体体系与存在粒子间相互作用体系对应的波函数表达式; 第 3 节系统分析了密度分布和动量分布随系统参数的演化行为, 揭示了虚规范相位与相互作用耦合作用下的物理调控机制; 最后总结了本研究的核心结论.

2 模型及其精确解

2.1 模型

考虑一维开边界条件下具有非互易跃迁的费米哈伯德模型, 系统的哈密顿量可写成下面的形式:

$$H = -t \sum_{j=0}^L \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (e^{-h} c_{j,\sigma}^+ c_{j+1,\sigma} + e^h c_{j+1,\sigma}^+ c_{j,\sigma}) + U \sum_{j=0}^{L+1} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}, \quad (1)$$

其中, $L+2$ 是系统的格点数, $c_{j,\sigma}^+$ ($c_{j,\sigma}$) 表示在格点 j 处自旋为 σ 粒子的产生 (湮灭) 算符, $n_{j\sigma} = c_{j,\sigma}^+ c_{j,\sigma}$ 为格点 j 处自旋为 σ 的粒子数算符, 总粒子数 $N = \sum_{j,\sigma} \langle n_{j,\sigma} \rangle$ 的取值范围为 $0 < N \leq 2L$, 自旋向下的粒子数 $M = \sum_j \langle n_{j\downarrow} \rangle$ 的取值范围为 $0 < M \leq N/2$. te^{-h} 和 te^h 分别表示近邻格点间从 $j+1$ 到 j (向左)、从 j 到 $j+1$ (向右) 的跃迁强度. 当存在外电磁场时, 粒子 (电子) 跃迁强度为 $te^{i\theta}$, θ 为实数, 称为规范相位, 而在本文中, $i\theta = h$, h 是实数, θ 是纯虚数, 所以我们把 h 叫作虚规范相位. 当 $h \neq 0$ 时, 向右的跃迁强度 te^h 与向左的跃迁强度 te^{-h} 不同, 由此体现跃迁的非互易性, 进而使系统呈现非厄米性. U 代表同一格点上不同自旋粒子间的相互作用强度 (可分为排斥或吸引, 本文仅

考虑排斥相互作用, 即 $U > 0$). 需要说明的是, 当 $h = 0$ 时, 该模型退化为传统的互易跃迁哈伯德模型, 而当 $U = 0$ 时, 该模型简化成非互易跃迁理想费米气体模型.

2.2 波函数的虚规范变换

对于该模型, 当系统包含 N 个粒子时, 其本征态可表示为

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{x_i, \sigma_i\}} \psi(x_1 \sigma_1, \dots, x_N \sigma_N) c_{x_1, \sigma_1}^+ \cdots c_{x_N, \sigma_N}^+ |0\rangle, \quad (2)$$

其中, $x_i \in \{0, 1, \dots, L+1\}$ 为第 i 个粒子所处的格点位置, $\sigma_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ 为第 i 个粒子的自旋状态, $|0\rangle$ 为系统的真空态, $\sum_{\{x_i, \sigma_i\}}$ 是对 N 个粒子位置以及自旋组合的求和. 一次量子化的波函数满足下面的开边界条件:

$$\psi(0\sigma_1, \dots, x_N \sigma_N) = \psi(x_1 \sigma_1, \dots, (L+1)\sigma_N) = 0, \quad (3)$$

当粒子出现在边界格点 0 和 $L+1$ 处, 而非格点 L 处, 波函数取值为零. 将系统哈密顿量 (1) 式及 N 粒子本征态 (2) 式代入本征方程 $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$, 再结合费米算符的反对易关系 $\{c_{j,\sigma}, c_{l,\sigma'}^+\} = \delta_{jl}\delta_{\sigma\sigma'}$, 可以得到该系统的非厄米薛定谔方程:

$$\begin{aligned} E\psi(\{x_i, \sigma_i\}) &= -t \sum_{i=1}^N [e^{-h}\psi(\dots, (x_i+1)\sigma_i, \dots) \\ &\quad + e^h\psi(\dots, (x_i-1)\sigma_i, \dots)] \\ &\quad + U \sum_{i < j} \delta_{x_i, x_j} \delta_{\sigma_i, -\sigma_j} \psi(\{x_i, \sigma_i\}), \end{aligned} \quad (4)$$

其中, 等号右边第一项是跃迁项, 具体为相邻格点对应的波函数与非互易跃迁强度的线性组合; 第二项是相互作用项, 当两粒子占据同一格点, 即 $x_i = x_j$ 时, δ_{x_i, x_j} 为 1, 否则为 0; 当两粒子自旋相反时, 即 $\sigma_i = -\sigma_j$ 时, $\delta_{\sigma_i, -\sigma_j}$ 为 1, 否则为 0. 只有当粒子满足两者的组合 $\delta_{x_i, x_j} \delta_{\sigma_i, -\sigma_j} = 1$ 时, 即占据同一格点且自旋相反时相互作用才存在. 由于直接求解非厄米薛定谔方程 (4) 式存在困难, 为简化问题, 本文引入如下虚规范变换:

$$\psi(\{x_i, \sigma_i\}) = \phi(\{x_i, \sigma_i\}) \exp\left(h \sum_{i=1}^N x_i\right), \quad (5)$$

其中, $\phi(\{x_i, \sigma_i\})$ 为变换后的波函数. 将虚规范变换 (5) 式代入开边界条件 (3) 式可得变换后的波函

数 $\phi(\{x_i, \sigma_i\})$ 在边界处仍为零, 依旧满足开边界条件. 为验证该变换的有效性, 将虚规范变换 (5) 式代入非厄米薛定谔方程 (4) 式, 下面首先分析非厄米薛定谔方程 (4) 式跃迁项中的第一部分——向左跃迁:

$$\begin{aligned} & e^{-h}\psi(\cdots, x_i + 1, \sigma_i, \cdots) \\ &= e^{-h}\phi(\cdots, x_i + 1, \sigma_i, \cdots) \\ & \quad \times \exp\left\{h\left[(x_i + 1) + \sum_{j \neq i} x_j\right]\right\} \\ &= \exp\left(h \sum_j x_j\right)\phi(\cdots, x_i + 1, \sigma_i, \cdots), \quad (6) \end{aligned}$$

采用相同的分析思路, 对跃迁项中的第二部分——向右跃迁进行化简:

$$\begin{aligned} & e^h\psi(\cdots, x_i - 1, \sigma_i, \cdots) \\ &= \exp\left(h \sum_j x_j\right)\phi(\cdots, x_i - 1, \sigma_i, \cdots). \quad (7) \end{aligned}$$

综合向左跃迁的化简结果 (6) 式与向右跃迁的化简结果 (7) 式, 可以发现, 虚规范变换可将跃迁项中的非互易强度 $e^{\pm h}$ 完全抵消, 而相互作用项因不涉及粒子格点位置的跃迁, 形式保持不变. 将粒子向左跃迁的化简结果 (6) 式与粒子向右跃迁的化简结果 (7) 式代入非厄米薛定谔方程 (4) 式中, 经整理得到该系统的厄米薛定谔方程:

$$\begin{aligned} & E\phi(\{x_i, \sigma_i\}) \\ &= -t \sum_{i=1}^N [\phi(\cdots, x_i + 1, \sigma_i, \cdots) \\ & \quad + \phi(\cdots, x_i - 1, \sigma_i, \cdots)] \\ & \quad + U \sum_{i < j} \delta_{x_i, x_j} \delta_{\sigma_i, -\sigma_j} \phi(\{x_i, \sigma_i\}). \quad (8) \end{aligned}$$

以上结果表明, 系统的非厄米性来源于系统的非互易性跃迁, 而通过引入虚规范变换 (5) 式, 可将非互易跃迁强度“吸收”到波函数的指数权重中, 使得系统的非互易性彻底消除, 因而通过厄米系统的理论框架计算波函数. 虚规范变换前后的波函数通过指数项 $\exp\left(h \sum_{i=1}^N x_i\right)$ 紧密关联, 当 $h > 0$ 时, 该指数项会使 $\psi(\{x_i, \sigma_i\})$ 在系统右侧区域的分布权重指数性放大, 从而使波函数在开边界条件下出现在右侧边界的聚集行为, 进而诱发非厄米趋肤效应. 在开边界条件下, 非厄米系统与厄米系统的能谱完全一致, 能谱全为实数且不依赖于虚规范相位 h . 为了方便计算, 引入参量 $u = U/4t$, 其中, U 是能量量纲, t 也是能量量纲, 所以, u 是一个无量

纲的数, u 的大小直接反映系统相互作用的强弱, 当 $u < 1$ 时, 系统为弱相互作用, 当 $u > 1$ 时, 系统为强相互作用.

2.3 理想费米气体

当系统粒子间无相互作用, 即相互作用强度为 $U = 0$ 时, 该模型退化为非互易跃迁理想费米气体模型. 对于该模型, 其单粒子波函数可以写为坐标空间函数与自旋空间函数的乘积形式:

$$\psi_n(x_i\sigma) = \psi_n(x_i)\chi(\sigma). \quad (9)$$

$\psi_n(x_i)$ 为坐标空间函数, 具体形式为

$$\psi_n(x_i) = \sqrt{\frac{2}{L+1}} \sin\left(\frac{n\pi}{L+1}x_i\right) \exp(hx_i), \quad (10)$$

其中, $\sqrt{\frac{2}{L+1}}$ 为归一化系数, n 为轨道量子数, 其取值为正整数 $1, 2, \dots, N$, $\sin\left(\frac{n\pi}{L+1}x_i\right)$ 为离散格点上的正弦驻波, $\exp(hx_i)$ 是由虚规范相位引入的指数项; $\chi(\sigma)$ 为自旋空间函数, $\sigma \in (\uparrow, \downarrow)$ 表示自旋状态. $\psi_n(x_i \uparrow)$ 表示格点 x_i 处自旋向上粒子的单粒子波函数, 类似地, $\psi_n(x_i \downarrow)$ 为格点 x_i 处自旋向下粒子的单粒子波函数.

费米子遵循泡利不相容原理, 其多粒子波函数需满足交换反对称性, 因此需采用斯莱特行列式的形式构造. 当 N 个粒子自旋全部向上时, 在基态下, 粒子占据能量最低的 N 个单粒子态, 此时, 波函数为

$$\begin{aligned} & \psi(x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, \cdots, x_N\sigma_N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_1(x_N \uparrow) \\ \psi_2(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_2(x_N \uparrow) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_N(x_N \uparrow) \end{vmatrix}, \quad (11) \end{aligned}$$

当体系包含 M 个自旋向下的粒子 ($M \leq N$), 对应 $N - M$ 个自旋向上的粒子时, 在基态下, M 个能量最低的单粒子态被自旋向下的粒子占据, 同时 $N - M$ 个能量最低的单粒子态被自旋向上的粒子占据, 此时, 波函数为

$$\begin{aligned} & \psi(x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, \cdots, x_N\sigma_N) = (1/\sqrt{N!}) \times \\ & \begin{vmatrix} \psi_1(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_1(x_N \uparrow) \\ \psi_1(x_1 \downarrow) & \cdots & \cdots & \psi_1(x_N \downarrow) \\ \psi_2(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_2(x_N \uparrow) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N-M}(x_1 \uparrow) & \cdots & \cdots & \psi_{N-M}(x_N \uparrow) \end{vmatrix}. \quad (12) \end{aligned}$$

2.4 Bethe ansatz 方法

本文采用代数 Bethe ansatz 方法求解该模型, 假设在 $x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_N}$ 区域波函数可以写成 $\psi(x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, \dots, x_N\sigma_N) =$

$$G \sum_{P, r_1, \dots, r_N} (-1)^P (-1)^Q A_{\sigma_{Q_1}, \dots, \sigma_{Q_N}}(r_1 k_{p_1}, \dots, r_N k_{p_N}) \times \exp \left(i \sum_j^N r_j k_{p_j} x_{Q_j} + h \sum_j^N x_{Q_j} + i \sum_j^N r_j \frac{\pi}{2} \right), \quad (13)$$

其中, G 是归一化系数, P 是对动量指标的排列, Q 是对坐标指标的排列, $(-1)^P$ 和 $(-1)^Q$ 分别为对应排列的奇偶符号 (奇排列取 -1 , 偶排列取 $+1$), $\sum_{P, r_1, \dots, r_N}$ 是对动量排列以及所有的 r_j 组合的求和. r_j 代表粒子的运动方向 ($r_j = +1$ 表示粒子向右运动, $r_j = -1$ 表示粒子向左移动), $A_{\sigma_{Q_1}, \dots, \sigma_{Q_N}}(r_1 k_{p_1}, \dots, r_N k_{p_N})$ 表示平面波的叠加系数.

在系统不存在两个粒子占据同一格点的情况下, 将波函数表达式 (13) 式代入该系统的本征方程 (4) 式中, 得到能量本征值为 $E = -2t \sum_{j=1}^N \cos(k_j)$ [52]. 当两粒子占据同一个格点时, 由本征方程可以得到准动量 k_i 和 k_j 交换位置后叠加系数满足的关系:

$$A_{\dots \sigma_j, \sigma_i \dots}(\dots, k_j, k_i \dots) = S_{ij}(k_i, k_j) A_{\dots \sigma_i, \sigma_j \dots}(\dots, k_i, k_j \dots), \quad (14)$$

其中, 两粒子散射矩阵为

$$S_{ij}(k_i, k_j) = \frac{\sin k_i - \sin k_j + i2uP_{ij}}{\sin k_i - \sin k_j + i2u}, \quad (15)$$

式中, P_{ij} 为自旋交换算符. 根据开边界条件 (3) 式, 可以得到最左侧和最右侧的准动量变为相反数后叠加系数满足

$$A_{\sigma_i, \dots}(-k_j, \dots) = s^L(k_j) A_{\sigma_i, \dots}(k_j, \dots), \quad (16)$$

$$A_{\dots, \sigma_i}(\dots, -k_j) = s^R(k_j) A_{\dots, \sigma_i}(\dots, k_j), \quad (17)$$

其中, $s^L(k_j) = 1$, $s^R(k_j) = e^{ik_j 2(L+1)}$. 通过 (15) 式、(16) 式和 (17) 式, 根据准动量 k_j 在最左侧和最右侧之间往返一周得到平面波叠加系数满足的自洽关系为

$$A_{\dots \sigma_j \dots}(\dots k_j \dots) = T_j A_{\dots \sigma_j \dots}(\dots k_j \dots), \quad (18)$$

其中, 转移矩阵为

$$T_j = S_j^-(k_j) R_j^-(k_j) R_j^+(k_j) S_j^+(k_j) e^{ik_j 2(L+1)}, \quad (19)$$

同时, 各个矩阵的定义为

$$S_j^+(k_j) = S_{jN}(k_j, k_N) \times \dots \times S_{j,j+1}(k_j, k_{j+1}), \quad (20)$$

$$S_j^-(k_j) = S_{j,j-1}(k_j, k_{j-1}) \times \dots \times S_{j1}(k_j, k_1), \quad (21)$$

$$R_j^-(k_j) = S_{1j}(k_1, -k_j) \times \dots \times S_{j-1,j}(k_{j-1}, -k_j), \quad (22)$$

$$R_j^+(k_j) = S_{j+1,j}(k_{j+1}, -k_j) \times \dots \times S_{Nj}(k_N, -k_j). \quad (23)$$

当 $j = 1$ 时, $S_j^- = R_j^- = I$, 当 $j = L$ 时, $S_j^+ = R_j^+ = I$. 通过代数 Bethe ansatz 方法, 求解转移矩阵的本征方程 (18) 式, 最终得到系统 Bethe ansatz 方程为 [52]

$$e^{2ik_j(L+1)} = \prod_{\beta=1}^M f(\sin k_j, \lambda_\beta, u),$$

$$\prod_{j=1}^N f(\lambda_\alpha, \sin k_j, u) = \prod_{\beta=1; \beta \neq \alpha}^M f(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, 2u), \quad (24)$$

其中, $f(x, y, c) = \frac{(x - y + ic)(x + y + ic)}{(x - y - ic)(x + y - ic)}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\alpha = 1, 2, \dots, M$. 值得注意的是, 该 Bethe ansatz 方程不包含虚规范相位 h , 而在周期边界条件下, Bethe ansatz 方程 [51] 包含虚规范相位 h . 当 k_j 取实数时, 对 (24) 式取对数得到实数空间的 Bethe ansatz 方程:

$$2(L+1)k_j = 2\pi I_j + \sum_{\beta=1}^M [\gamma(\sin k_j - \lambda_\beta) + \gamma(\sin k_j + \lambda_\beta)],$$

$$\sum_{\beta=1; \beta \neq \alpha}^M \left[\gamma \left(\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{2} \right) + \gamma \left(\frac{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}{2} \right) \right]$$

$$= 2\pi J_\alpha + \sum_{j=1}^N [\gamma(\lambda_\alpha - \eta_j) + \gamma(\lambda_\alpha + \eta_j)], \quad (25)$$

其中, $\gamma(x) = -2 \arctan(x/u)$. 通过数值求解以上方程, 可以确定任意相互作用强度下的准动量 k_j 与快度 λ . 例如当系统长度 $L = 10$, 总粒子数 $N = 3$, 自旋向下粒子数 $M = 1$, 基态对应的量子数 I_j 为 $\{1, 2, 3\}$, J_α 为 1 时, 分析计算不同相互作用强度下的准动量与快度, 结果如表 1 所列. 当相互作用强度 $u = 0$ 时, 系统的准动量为 $k_1 = k_2 = \pi/(L+1)$, $k_3 = 2\pi/(L+1)$, 表明两个自旋向上的粒子占据单粒子的基态和第一激发态, 自旋向下的粒子占据基

态; 随着相互作用强度 u 从 0 增加到 ∞ , k_1 先减小后增大恢复到 $\pi/(L+1)$, k_2 和 k_3 分别逐渐增大到 $2\pi/(L+1)$ 和 $3\pi/(L+1)$, λ 从 $\pi/(L+1)$ 逐渐增大到 ∞ ; 相互作用强度 $u = \infty$ 时的准动量, 对应着能量最低的三个单粒子态. 对于总粒子数为 N , 自旋向下粒子数为 M 的系统, 当相互作用 $u = 0$ 时, 准动量为 $k_{2i-1} = k_{2i} = i\pi/(L+1)$, $i = 1, \dots, M$ 和 $k_{2M+j} = (M+j)\pi/(L+1)$, $j=1, \dots, N-2M$, 表明自旋向上的粒子占据能量最低的 $N-M$ 个单粒子态, 自旋向下的粒子占据能量最低的 M 个单粒子态; 当相互作用强度 $u = \infty$ 时, 准动量为 $k_i = \pi i/(L+1)$, 表明系统占据能量最低的 N 个单粒子态; 当相互作用强度 u 从 0 增加到 ∞ , k_{2i-1} ($i = 1, \dots, M$) 先减小后增大, 其余的准动量和快度都是单调增加的.

表 1 不同相互作用强度 u 下的基态准动量 k_j 与快度 λ
Table 1. Ground-state quasi-momentum k_j and spin rapidity λ for different interaction strengths.

u	k_1	k_2	k_3	λ
0	1.00	1.00	2.00	0.99
0.1	0.78	1.35	2.15	1.07
1	0.89	1.79	2.70	2.39
10	0.99	1.97	2.96	20.26
100	1.00	2.00	3.00	202.16
∞	1.00	2.00	3.00	∞

注: 表中的准动量 k_j 和快度 λ 均经过无量纲化处理, 以 $\pi/(L+1)$ 为单位, 保留两位小数.

根据前面的系数关系以及 Bethe ansatz 方程, 该系统平面波叠加系数的表达式可以写成^[53]

$$A_{\sigma_{Q_1}, \dots, \sigma_{Q_N}}(r_1 k_{p_1}, \dots, r_N k_{p_N}) = \sum_{q, \epsilon_\alpha = \pm 1} S(\epsilon_{q_1} \lambda_{q_1}, \dots, \epsilon_{q_M} \lambda_{q_M}) \times \prod_{\alpha=1}^M F_{r_1 k_{p_1}, \dots, r_N k_{p_N}}(\epsilon_{q_\alpha} \lambda_{q_\alpha}; m_\alpha), \quad (26)$$

式中, m_α 是第 α 个自旋向下粒子在所有粒子排序中位置, 满足 $m_\alpha < m_{\alpha+1}$, λ_{q_α} 为对应自旋向下粒子的快度, q 表示对指标 $1, 2, \dots, M$ 的排列,

$$\rho_\sigma(x) = N_\sigma e^{2hx} \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N} \sum_{x_2, \dots, x_N} |\phi(x\sigma_1, x_2\sigma_2, \dots, x_N\sigma_N)|^2 e^{2h(x_2 + \dots + x_N)}, \quad (33)$$

与之对应的单体约化密度矩阵 (31) 式变为

$$\rho_\sigma(x, x') = N_\sigma e^{h(x+x')} \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N} \sum_{x_2, \dots, x_N} \phi^*(x\sigma_1, \dots, x_N\sigma_N) \phi(x'\sigma_1, \dots, x_N\sigma_N) e^{2h(x_2 + \dots + x_N)}. \quad (34)$$

$\sum_{q, \epsilon_\alpha = \pm 1}$ 是对快度 λ_{q_α} 的排列以及 ϵ_α 的求和. 平面波叠加系数 (26) 式中的函数 F 的具体表达式为

$$F_{k_1, \dots, k_N}(\lambda; m) = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\sin k_j - \lambda + iu}{\sin k_j - \lambda - iu} \frac{1}{\sin k_m - \lambda - iu}, \quad (27)$$

系数 S 需满足以下约束关系:

$$\frac{S(\dots, \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots)}{S(\dots, \lambda_\beta, \lambda_\alpha, \dots)} = \frac{\lambda_\beta - \lambda_\alpha + i2u}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha - i2u}, \quad (28)$$

$$S(\lambda_\alpha)/S(-\lambda_\alpha) = -1. \quad (29)$$

通过求解该系统的波函数, 进而可以求解系统的密度分布与动量分布, 最终实现对系统量子行为的分析.

2.5 密度分布与动量分布的表达式

自旋为 σ 的粒子密度分布函数表达式为

$$\rho_\sigma(x) = N_\sigma \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N} \sum_{x_2, \dots, x_N} |\psi(x\sigma, x_2\sigma_2, \dots, x_N\sigma_N)|^2, \quad (30)$$

这里 N_σ 表示自旋为 σ 的粒子数, $\sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N}$ 和 \sum_{x_2, \dots, x_N} 分别是对除第一个粒子外其他 $N-1$ 个粒子的自旋以及坐标的求和, 通过计算该等式得到粒子在位置 x 处每个自旋的概率密度. 单粒子约化密度矩阵的表达式为

$$\rho_\sigma(x, x') = N_\sigma \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N} \sum_{x_2, \dots, x_N} \psi^*(x\sigma_1, \dots, x_N\sigma_N) \times \psi(x'\sigma_1, \dots, x_N\sigma_N), \quad (31)$$

与单体约化密度矩阵 (31) 式对应的粒子动量分布函数表达式为

$$n_\sigma(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=1}^L \sum_{x'=1}^L \rho_\sigma(x, x') e^{-ik(x-x')}. \quad (32)$$

(30)–(32) 式可以看成连续空间的积分形式离散化的结果^[54].

当引入虚规范变换 (5) 式后, 密度分布 (30) 式变为

可见密度分布和单体约化密度矩阵都出现了虚规范相位的指数依赖项, 分别为 e^{2hx} 和 $e^{h(x+x')}$, 说明了粒子在边界处的聚集或衰减行为.

当虚规范相位 h 取虚数 $h = i\theta$ 时, 系统的跃迁强度为 $te^{i\theta}$ (向右), $te^{-i\theta}$ (向左), 此时, 哈密顿量 (1) 式变为厄米哈密顿量. 当引入规范变换后, 系统的密度分布不受 θ 的影响, 对应的单体约化密度矩阵 (31) 式则变为

$$\rho_{\sigma}(x, x') = \tilde{\rho}_{\sigma}(x, x') e^{-i\theta(x-x')}, \quad (35)$$

其中, $\tilde{\rho}_{\sigma}(x, x')$ 是虚规范相位 $h = 0$ 时系统的单体约化密度矩阵. 与单体约化密度矩阵 (35) 式对应的粒子动量分布函数 (32) 式变为

$$n_{\sigma}(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=1}^L \sum_{x'=1}^L \tilde{\rho}_{\sigma}(x, x') e^{-i(k+\theta)(x-x')}. \quad (36)$$

可见, 与 $\theta = 0$ 时的动量分布相比较, 系统的动量分布整体平移了 $-\theta$.

3 数值结果与分析

本节围绕相互作用进行数值对比分析: 首先以非互易无相互作用的费米气体为研究对象, 对该系

统进行密度分布与动量分布的数值分析, 探究虚规范相位对系统的单一调控效应; 在此基础上, 引入粒子间相互作用, 进一步探究相互作用与虚规范相位对体系的协同调控作用.

3.1 理想气体的分布特性

本节考虑无相互作用且自旋全向上时的非互易理想费米气体系统, 当粒子数为 N 时, 密度分布 (30) 式变为

$$\rho(x) = N \sum_{x_2, \dots, x_N} |\psi(x \uparrow, x_2 \uparrow, \dots, x_N \uparrow)|^2. \quad (37)$$

(37) 式不考虑自旋求和, 表示为粒子在格点 x 处的密度分布, 其结果如图 1(a) 所示. 在粒子数 $N = 3$ 的情况下, 当不存在虚规范相位 (即 $h = 0$) 时, 密度分布呈现出 3 个高度相近、形态对称的特征峰, 整体分布相对平缓. 随着虚规范相位的增大, 粒子逐渐向边界区域聚集, 原本对称分布的 3 个特征峰随之向边界偏移, 各峰的相对高度出现明显差异, 整体密度分布由平缓转为在边界附近显著聚集的形态; 当虚规范相位非常大时, 例如当 $h = 4$ 时, 粒子完全占据最右侧的 3 个格点, 系统达到饱和状态, 不随虚规范相位发生变化. 如图 1(c) 所示,

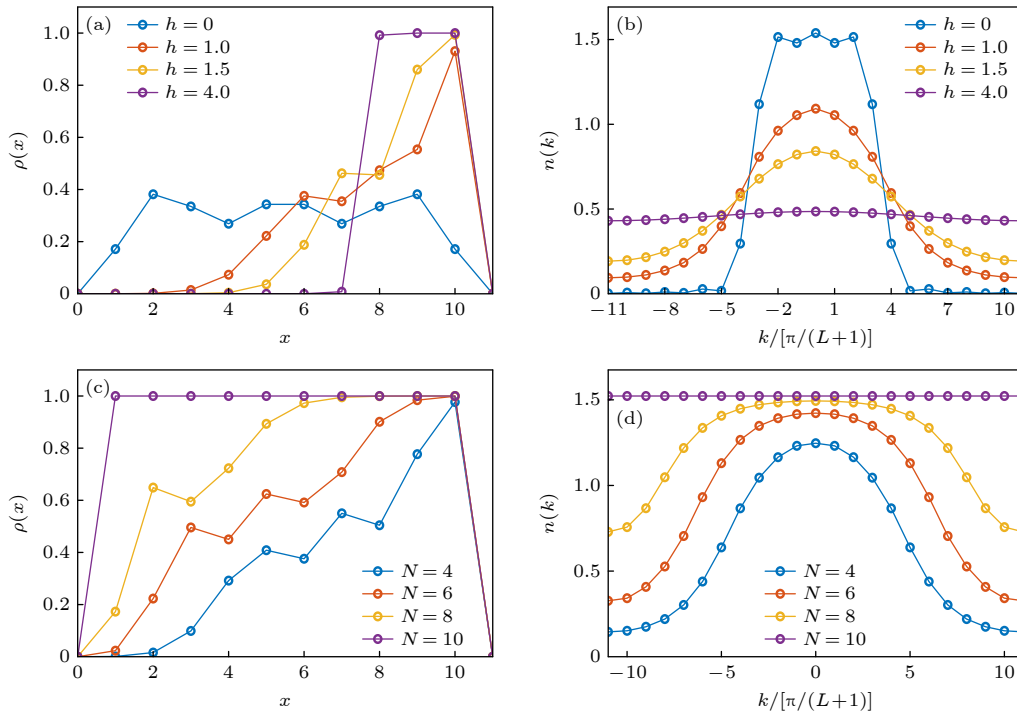


图 1 当 $N = 3$ 时, 不同虚规范相位下理想费米气体的密度分布 (a) 和动量分布 (b). 当 $h = 1$ 时, 不同粒子数下理想费米气体的密度分布 (c) 和动量分布 (d). 系统长度 $L = 10$

Fig. 1. Density distribution (a) and momentum distribution (b) of the ideal Fermi gas under different imaginary gauge phases when $N = 3$. Density distribution (c) and momentum distribution (d) of the ideal Fermi gas with different particle numbers when $h = 1$. System length $L = 10$.

当 $h = 1$ 时, 系统的密度分布随粒子数的不同呈现出不同的变化趋势. 当粒子数远小于格点数时, 密度分布呈现明显的不均匀性, 粒子倾向于聚集在边界附近; 当粒子数等于格点数时, 由于泡利不相容原理, 每个格点被一个粒子占据, 粒子的空间运动被完全限制, 与无虚规范相位的情况相同, 导致非厄米趋肤效应被完全抑制.

动量分布为 (32) 式, 其中相应的单体约化密度矩阵 (31) 式变为

$$\rho(x, x') = N \sum_{x_2, \dots, x_N} \psi^*(x \uparrow, \dots, x_N \uparrow) \times \psi(x' \uparrow, \dots, x_N \uparrow). \quad (38)$$

动量分布结果如图 1(b) 所示, 在粒子数 $N = 3$ 的情况下, 当虚规范相位不存在 (即 $h = 0$) 时, 波函数由 3 个不同的单粒子态等权叠加, 因此动量空间呈现 3 个可分辨且彼此分立的峰, 且关于 $k = 0$ 严格对称. 随着虚规范相位的出现和增大, 动量分布 3 个分立的峰开始融合成一个主峰结构. 主峰的高度不断下降, 半高宽逐渐增加, 粒子在动量空间的分布范围不断增加; 当虚规范相位非常大时, 例如当 $h = 4$ 时, 粒子在动量空间均匀分布. 当单个粒子占据一个格点时, 对应的动量分布为均匀分布, 其值为 $1/2\pi$, 而 N 粒子系统的动量分布为各个单粒子动量分布之和, 其值为 $N/2\pi$.

图 1(d) 展示了 $h = 1$ 时, 系统的动量分布在第一布里渊区 $[-\pi, \pi]$ 内随粒子数变化的演化规律. 在粒子数远小于格点数时, 粒子集中于布里渊区中心的低动量区, 并在 $k = 0$ 附近形成明显峰值. 随着粒子数目的增加, 动量分布开始显著展宽, 曲线逐渐平坦. 当粒子数等于格点数时, 系统在动量空间呈现均匀化分布, 高度为 $N/2\pi$, 与无虚规范相位的情况完全相同. 这种现象与实空间中粒子均匀分布在每个晶格位置的特性相互对应, 系统的非厄米趋肤效应被完全抑制.

3.2 存在相互作用情况下的密度分布

本节考虑有相互作用且存在一个自旋翻转的非互易费米体系. 由 (30) 式可得自旋向上粒子在格点 x 处的密度分布为

$$\rho_{\uparrow}(x) = N_{\uparrow} \sum_{x_1, x_3, \dots, x_N} |\psi(x_1 \downarrow, x \uparrow, x_3 \uparrow, \dots, x_N \uparrow)|^2. \quad (39)$$

如图 2(a) 所示, 在自旋向上粒子数为 2 时, 在

弱相互作用情形下, 体系的密度分布与两粒子理想费米气体的密度分布相似. 当不存在虚规范相位 (即 $h = 0$) 时, 两个自旋向上粒子的密度分布呈现出典型的对称双峰结构, 中心区域存在明显的凹陷, 反映了费米子由于泡利不相容原理导致的空间排斥效应; 随着虚规范相位的逐渐增大, 密度分布向右偏移, 对称性被破坏, 左侧密度减弱, 几乎趋近于零, 右侧密度不断增强. 当 $h = 3.5$ 时, 两个自旋向上的粒子几乎局域于系统右侧的格点处, 此时, 非厄米趋肤效应达到饱和状态. 对于强相互作用的情况, 如图 2(b) 所示, 当不存在虚规范相位 (即 $h = 0$) 时, 排斥作用导致中心区域凹陷范围变大, 两个粒子因自旋向下粒子给予的巨大的排斥作用而被迫保持较大间距, 密度分布在双峰之间呈现高度均匀的平台结构. 随着虚规范相位的增加, 密度分布同样呈现向右偏移的趋势. 相互作用导致其向边界局域的速度显著减慢, 表明强相互作用有效抑制了非厄米趋肤效应. 随着虚规范相位的进一步增大, 例如从 $h = 3.5$ 到 $h = 9.5$, 一个粒子占据格点 L 的同时, 另一个粒子主要从占据格点 $L - 2$ 逐渐变为 $L - 2$ 和 $L - 1$ 共同占据, 最后到占据 $L - 1$ 格点. 与弱相互作用对比, 这表明相互作用的增强显著抑制了虚规范相位对系统空间分布的影响, 体现了系统内相互作用强度与虚规范相位之间的相互制约关系.

由 (30) 式可得自旋向下粒子在格点 x 处的密度分布为

$$\rho_{\downarrow}(x) = N_{\downarrow} \sum_{x_2, \dots, x_N} |\psi(x \downarrow, x_2 \uparrow, \dots, x_N \uparrow)|^2. \quad (40)$$

在弱相互作用情形下, 如图 2(c) 所示, 体系的密度分布与单粒子基态的密度分布相近. 密度分布呈现出 $\frac{2}{L+1} \sin^2\left(\frac{\pi}{L+1}x\right) \exp(2hx)$ 的结构. 当虚规范相位不存在 (即 $h = 0$) 时, 该密度分布整体呈对称的单峰结构, 整体变化较为平缓, 随着虚规范相位的增加, 密度分布向右侧偏移, 左侧位置的密度几乎趋近于零, 右侧位置的密度不断增大, 增强了密度分布的不对称性. 当 $h = 3.5$ 时, 自旋向下的粒子完全局域于系统最右侧格点, 这表明在较大虚规范相位下, 系统已进入高度局域化的状态. 对于强相互作用的情况, 如图 2(d) 所示, 当虚规范相位不存在 (即 $h = 0$) 时, 位于两侧自旋向上的粒子, 迫使自旋向下的粒子向中间靠拢, 使得粒子形成的

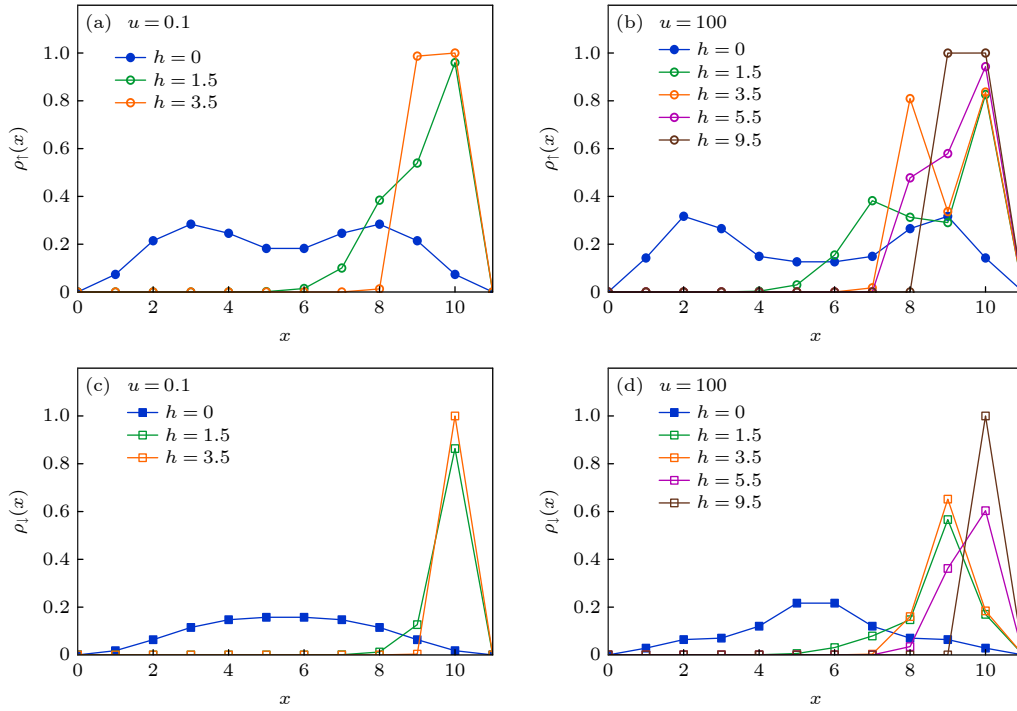


图2 在相互作用强度为(a) $u = 0.1$ 和(b) $u = 100$ 时不同虚规范相位下自旋向上粒子的基态密度分布. 在相互作用强度为(c) $u = 0.1$ 和(d) $u = 100$ 时不同虚规范相位下自旋向下粒子的基态密度分布. 粒子数 $N = 3$, 系统长度 $L = 10$

Fig. 2. Ground-state density distribution functions of spin-up particles under different imaginary gauge phases with interaction strengths of (a) $u = 0.1$ and (b) $u = 100$. Ground-state density distribution functions of spin-down particles under different imaginary gauge phases with interaction strengths of (c) $u = 0.1$ and (d) $u = 100$. The particle number is $N = 3$ and the system length is $L = 10$.

密度分布单峰结构愈发明显. 随着虚规范相位的增大, 密度分布整体不断向右偏移. 随着虚规范相位的进一步增大, 例如 $h = 3.5$ 到 $h = 9.5$, 粒子主要从占据格点 $L - 1$ 逐渐变为 $L - 1$ 和 L 共同占据, 最后到占据 L 格点. 即使粒子间有非常强的相互作用, 强大的虚规范相位仍然可以使不同自旋的两个粒子共同占据第 L 个格点.

为了定性地表征虚规范相位对密度分布的影响程度, 这里定义了平均位置的偏差:

$$\delta\langle x \rangle = \frac{1}{N_\sigma} \sum_{x=1}^L x [\rho_\sigma(x) - \rho_{\sigma,0}(x)], \quad (41)$$

其中, N_σ 是自旋为 σ 的粒子数, $\rho_{\sigma,0}$ 为不存在虚规范相位 (即 $h = 0$) 时格点 x 处粒子的密度分布. 该偏差表示引入虚规范相位后, 系统密度分布整体向某一方向移动的程度. 当 $\delta\langle x \rangle > 0$ 时, 密度整体向右 (正方向) 聚集, 当 $\delta\langle x \rangle < 0$ 时, 密度整体向左 (负方向) 聚集. 该系统自旋向上粒子的平均位置偏差结果如图 3(a) 所示, 对于所有的相互作用强度, 平均位置的偏差均为正值, 表明该系统密度整体向右聚集. 在同一相互作用强度下, 平均偏差随着虚

规范相位的增大, 先不断增大后趋向于稳定的值, 达到饱和状态. 在同一虚规范相位下, 随着相互作用的逐渐增大, 偏差呈现逐渐减小的趋势. 在虚规范相位较小时, 平均位置偏差在 $u = 100$ 时与 3 个粒子的理想费米气体的情况几乎相同. 该系统自旋向下粒子的平均位置偏差结果如图 3(b) 所示, 随虚规范相位与相互作用强度的变化规律与自旋向上粒子的情况相同. 综合来看, 虚规范相位和相互作用之间存在竞争机制: 虚规范相位驱动系统偏移, 而强相互作用则通过粒子间相互作用抑制这种偏移效应.

3.3 存在相互作用情况下的动量分布

本节考虑有相互作用且存在一个自旋翻转的非互易费米体系的动量分布. 由 (31) 式得到自旋向上粒子的单体约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} & \rho_\uparrow(x, x') \\ &= N_\uparrow \sum_{x_1, x_3, \dots, x_N} \psi^*(x_1 \downarrow, x \uparrow, x_3 \uparrow, \dots, x_N \uparrow) \\ & \quad \times \psi(x_1 \downarrow, x' \uparrow, x_3 \uparrow, \dots, x_N \uparrow), \end{aligned} \quad (42)$$

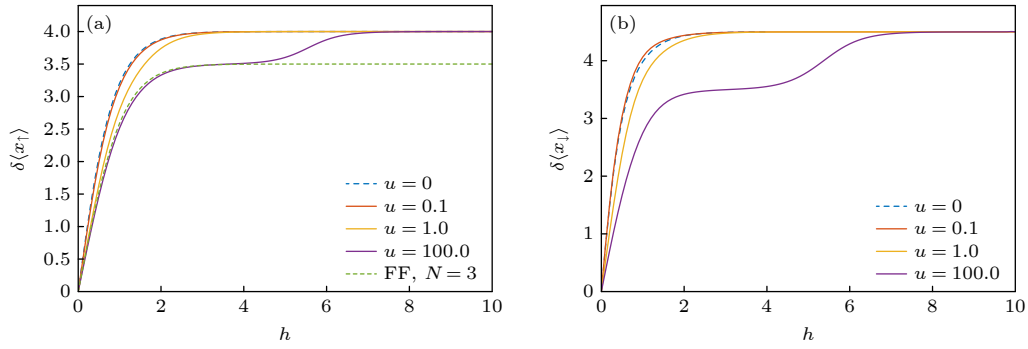


图 3 不同相互作用强度下自旋向上粒子 (a) 和自旋向下粒子 (b) 的平均位置偏差 $\delta\langle x \rangle$ 随虚规范相位 h 的变化. 粒子数 $N = 3$, 系统长度 $L = 10$

Fig. 3. The deviation of mean position $\delta\langle x \rangle$ of (a) spin-up and (b) spin-down particles as a function of h for different interaction strengths. Here, the particle number $N = 3$, the system length $L = 10$.

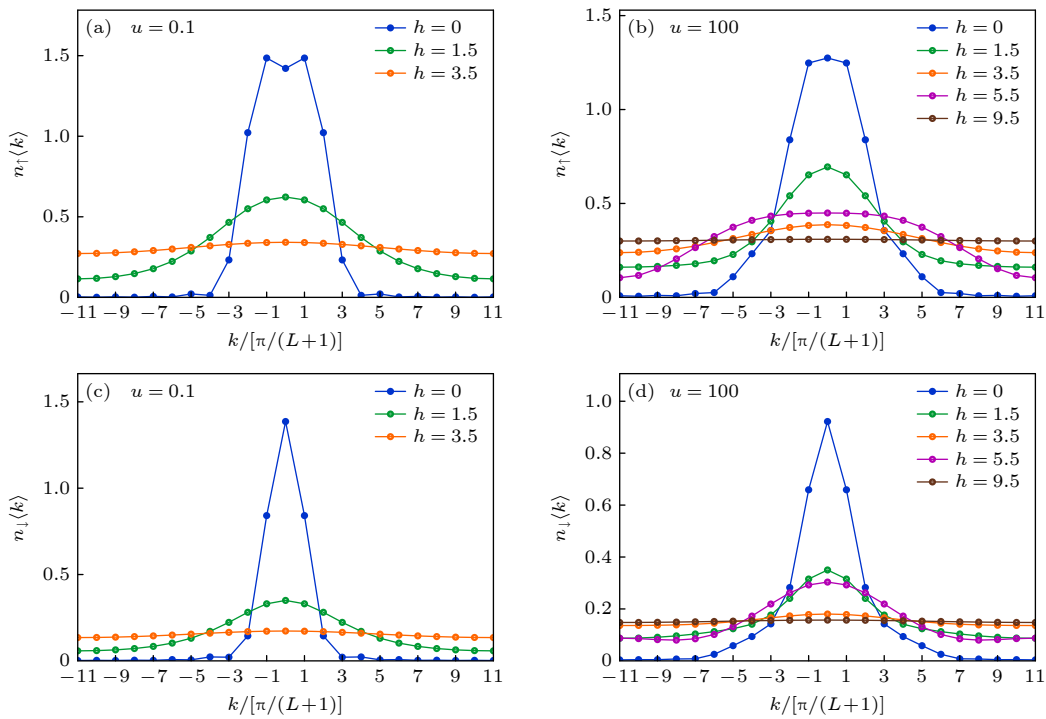


图 4 在相互作用强度为 (a) $u = 0.1$ 和 (b) $u = 100$ 时不同虚规范相位下自旋向上粒子的基态动量分布. 在相互作用强度为 (c) $u = 0.1$ 和 (d) $u = 100$ 时不同虚规范相位下自旋向下粒子的基态动量分布. 粒子数 $N = 3$, 系统长度 $L = 10$

Fig. 4. Ground-state momentum distribution functions of spin-up particles under different imaginary gauge phases with interaction strengths of (a) $u = 0.1$ and (b) $u = 100$. Ground-state momentum distribution functions of spin-down particles under different imaginary gauge phases with interaction strengths of (c) $u = 0.1$ and (d) $u = 100$. The particle number is $N = 3$ and the system length is $L = 10$.

进而根据 (32) 式得到相应的动量分布. 在弱相互作用情形下, 如图 4(a) 所示, 两个自旋向上粒子的动量分布与两粒子理想费米气体的动量分布行为相似. 当不存在虚规范相位 (即 $h = 0$) 时, 在 $k = 0$ 处存在明显的凹陷, 而在 $k = \pm\pi/(L+1)$ 的位置分别形成明显的峰, 整体呈现典型的“M”型对称双峰结构. 随着虚规范相位 h 的增大, 两侧的峰值逐渐消失, 形成单峰结构. 这一过程表明, 虚规范相位

的增大会驱动动量分布由对称双峰向单峰结构转变. 当 $h = 3.5$ 时, 单峰结构进一步展宽, 整体在空间内趋于均匀分布, 高度为 $1/\pi$. 在强相互作用下, 如图 4(b) 所示, 当不存在虚规范相位场 (即 $h = 0$) 时, 动量分布的形态与弱相互作用情形已明显不同. 此时的分布不是双峰结构, 而是一个对称的单峰. 相较于弱相互作用, 其峰的半高宽明显增加. 随着虚规范相位 h 的增大, 动量分布的两翼向高动

量区域扩展, 高动量态的占据概率显著提升, 在此过程中, 峰值高度的相对变化幅度明显小于弱相互作用的情形. 随着虚规范相位的进一步增大, 例如 $h = 3.5$ 到 $h = 9.5$, 动量分布的峰值先升高后降低, 最终在空间内均匀分布.

由 (31) 式得到自旋向下粒子的单体约化密度矩阵为

$$\rho_{\downarrow}(x, x') = N_{\downarrow} \sum_{x_2, \dots, x_N} \psi^*(x_{\downarrow}, \dots, x_N \uparrow) \times \psi(x'_{\downarrow}, \dots, x_N \uparrow), \quad (43)$$

进而根据 (32) 式得到相应的动量分布. 在弱相互作用情况下, 如图 4(c) 所示, 体系的动量分布与单粒子的基态动量分布相似. 当不存在虚规范相位场 (即 $h = 0$) 时, 粒子的动量分布在 $k = 0$ 呈现对称的单峰结构. 随着虚规范相位场 h 的增大, 动量分布峰值高度不断降低, 半高宽持续展宽. 当 $h = 3.5$ 时, 由于虚规范相位影响, 系统的动量分布在空间内完全展宽, 均匀分布, 覆盖第一布里渊区. 在强相互作用下, 如图 4(d) 所示, 当不存在虚规范相位场 (即 $h = 0$) 时, 动量分布峰值高度有所降低, 半高宽有所增大. 随着虚规范相位场 h 的增大, 动量分布峰值先下降后上升, 最后下降到稳定值 $1/2\pi$, 与自旋向上粒子的动量分布情况类似.

为了定性地表征虚规范相位对动量分布的影响程度, 这里定义了平均动量的偏差:

$$\delta \overline{k_{\sigma}^2} = \overline{k_{\sigma}^2} - \overline{k_{\sigma, h=0}^2}, \quad (44)$$

其中, 动量二阶矩为

$$\overline{k_{\sigma}^2} = \sum_{j=-(L+1)}^{L+1} k_j^2 n_{\sigma}(k_j) \Delta k, \quad (45)$$

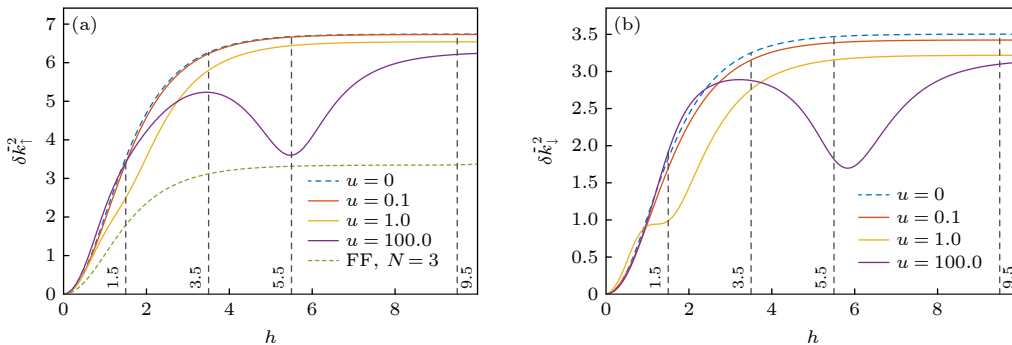


图 5 不同相互作用强度下自旋向上粒子 (a) 和自旋向下粒子 (b) 的动量偏差 $\delta \overline{k^2}$ 随虚规范相位 h 的变化. 垂直虚线处虚规范相位取值与图 2 和图 4 中的取值相对应. 粒子数 $N = 3$, 系统长度 $L = 10$

Fig. 5. The momentum deviation $\delta \overline{k^2}$ of spin-up particles (a) and spin-down particles (b) as a function of h for different interaction strengths. The value of the imaginary gauge phases at the vertical dashed line corresponds to those adopted in Fig. 2 and Fig. 4. The particle number $N = 3$, the system length $L = 10$.

式中, $\Delta k = \frac{\pi}{L+1}$ 为开边界条件下动量空间的离散间隔, $\overline{k_{\sigma, h=0}^2}$ 是虚规范相位为 0 时的动量二阶矩. 该偏差反映了引入虚规范相位后系统动量分布展宽的变化, 用来表现虚规范相位对动量分布形态的影响程度. 该系统的自旋向上粒子的平均动量偏差结果如图 5(a) 所示, 可以看出, 随着虚规范相位的增大, 弱相互作用时的平均动量偏差先增加后趋向饱和, 而强相互作用时的平均动量偏差先增加后减小, 最后增大到一个稳定值. 例如, 相互作用强度 $u = 100$, 虚规范相位 $h = 5.5$ 时, 偏差值位于谷底的位置, 和自旋向上的一个粒子处于 $L - 2$ 和 $L - 1$ 两个格点共同占据的情况相对应. 通过计算 (44) 式以及 (45) 式, 可以得到该系统下自旋向下粒子的平均动量偏差, 结果如图 5(b) 所示, 随虚规范相位与相互作用强度的变化规律与自旋向上粒子的情况相同.

3.4 一般情况讨论

虽然本文的系统是多粒子系统, 但是非厄米趋肤效应的起因与单粒子类似. 当 $h > 0$ 时, 向右的跃迁强度 te^h 大于向左的跃迁强度 te^{-h} , 使得粒子在右侧区域的权重被指数放大, 在开边界条件下在右侧边界聚集, 表现出非厄米趋肤效应; 当 $h < 0$ 时, 向左的跃迁强度 te^{-h} 大于向右的跃迁强度 te^h , 粒子在左侧边界聚集. 在数学上, 非厄米趋肤效应可以通过非正交本征态与边界约束的共同作用予以解释. 由于非互易隧穿导致哈密顿量不满足厄米性, 其本征态不再具有标准正交性, 而表现为左右本征态构成的双正交集, 对应的波矢扩展至复平面, 使得本征波函数沿晶格方向呈现指数型增长或

衰减. 开边界条件在边界处阻挡了粒子的运动, 进而导致所有本征态均集中于体系一端, 形成粒子在边界处显著聚集的趋肤效应.

对于理想费米气体, 在有限尺寸且无虚规范相位的情况下, 基态密度分布呈现的峰个数与粒子数 N 相等. 当 $N = L/2$ 时, 粒子在空间均匀分布, 每个格点均为半占据; 当 $N \leq L$ 时, 它们的动量分布则主要局限在 $-N\pi/(L+1)$ 至 $N\pi/(L+1)$ 的费米海范围内, 值约为 $L/2\pi$. 当虚规范相位较强时, 粒子占据最右侧的 N 个格点, 动量分布在布里渊区 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布, 值为 $N/2\pi$.

对于弱相互作用的两分量费米气体, 各分量的密度分布与动量分布行为与理想费米气体类似. 而对于强相互作用的两分量费米气体, 无虚规范相位时, 当 $N \leq L$ 时, 强排斥相互作用使得粒子相互排开, 无法占据同一格点; 对于弱虚规范相位, 虽然所有的粒子都会向右聚集, 但是强排斥仍可以使两个粒子不能占用一个格点; 但是比较大的虚规范相位可以一定程度上克服排斥作用, 使粒子发生较大的重叠概率. 当 $L < N \leq 2L$ 时, 部分格点出现占据概率大于 1 的情形. 在强虚规范相位下, 系统出现饱和行为, 与弱相互作用情形相似: 自旋向上粒子聚集于最右侧的 $N - M$ 个格点, 自旋向下粒子聚集于最右侧的 M 个格点; 动量在布里渊区 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布, 自旋向上与向下粒子的动量分布值分别为 $(N - M)/2\pi$ 与 $M/2\pi$. 此外, 总粒子数 N 与自旋向下粒子数 M 的奇偶性对上述结论无影响.

在系统粒子数不变, 系统尺寸增加至原来的 2 倍的情况下, 当虚规范相位 $h = 0$ 时, 由于格点数量的增加, 密度分布的形状没有发生改变, 宽度变为原来的 2 倍, 高度降为原来的 $1/2$. 当虚规范相位足够大时, 粒子聚集在最右侧, 与原来相同规范相位的密度分布相同, 与系统的尺寸无关; 动量分布方面, 当虚规范相位 $h = 0$ 时, 由于格点数量的增加, 动量分布的形状没有发生改变, 高度变为原来的 2 倍, 费米动量 $\pi N/L$ 变为原来的 $1/2$, 动量分布的半高宽变为原来的 $1/2$. 当虚规范相位足够大时, 在动量空间的第一布里渊区均匀分布, 高度为 $N_\sigma/2\pi$, 与原来相同规范相位的动量分布相同, 与系统的尺寸无关.

在热力学极限下, 即 $L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ 时, 同时保持粒子数密度 $n = N/L$ 与自旋向下粒子数密度 M/L 固定. 此时, 密度分布可视为空间中的连续

分布, 动量分布亦趋于光滑. 当粒子数密度远小于 1 且虚规范相位较小时, 密度分布与动量分布均与相应的连续模型 (如一维无限深势阱) 结果类似. 当粒子数密度为 1 且排斥相互作用极强时, 系统进入莫特绝缘态, 每个格点恰好被一个粒子占据; 在此情况下, 弱虚规范相位不足以改变该状态, 仅当虚规范相位足够强时, 才能驱动粒子向右聚集. 当粒子数密度为 2 且自旋向下粒子数密度为 1 时, 每个格点同时被两个不同自旋的粒子占据, 此时虚规范相位无法改变这一占据构型.

4 结 论

本文以一维开边界条件下的非互易跃迁费米哈伯德模型为研究对象, 通过求解 Bethe ansatz 方程获得了体系的严格解, 系统揭示了虚规范相位与粒子间相互作用对非厄米趋肤效应的调控机制. 在非互易理想费米气体体系中, 当粒子数小于格点数时, 随着虚规范相位的增大, 密度分布逐渐向边界聚集, 而动量分布则由分立峰逐渐融合为单峰并显著展宽; 当粒子数等于格点数时, 密度分布和动量分布都呈现均匀分布, 不受虚规范相位的影响, 非厄米趋肤效应被完全抑制. 引入粒子间相互作用后, 系统的行为由相互作用强度与虚规范相位共同调控, 二者之间存在竞争机制. 在弱相互作用区间, 虚规范相位起主要影响, 系统呈现明显的非厄米趋肤效应; 随着相互作用的增加, 抑制了虚规范相位的调控效果, 具体表现为密度分布趋于空间均匀化, 动量分布的展宽逐渐饱和化, 边界局域化特征显著减弱. 但是非常强的虚规范相位仍然可以克服粒子间非常强的排斥相互作用, 使不同自旋的两个粒子共同占据最右边的格点. 本研究给出了粒子间相互作用与虚规范相位对趋肤效应和动量分布的调控规律, 为非厄米强关联多体系统的理论构建与量子调控提供了重要理论依据.

参考文献

- [1] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [2] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [3] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [4] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [5] Ren C C, Yin X G 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 160501 (in Chinese) [任翠翠, 尹相国 2023 物理学报 **72** 160501]
- [6] Chen L M, Zhou Y, Chen S A, Ye P 2024 *Chin. Phys. Lett.*

- 41 127302
- [7] Cao Y, Cao J 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 080202
- [8] Li Y, Lu J, Wang C, Jiang J H 2025 *Chin. Phys. Lett.* **42** 047303
- [9] Pan J, Zhou L 2025 *Chin. Phys. Lett.* **42** 090706
- [10] Gong Z P, Ashida Y, Kawabata K, Takasan K, Higashikawa S, Ueda M 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031079
- [11] Liu C H, Jiang H, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **99** 125103
- [12] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015
- [13] Zhou H Y, Lee J Y 2019 *Phys. Rev. B* **99** 235112
- [14] Liu C H, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 144106
- [15] Liu C H, Hu H, Chen S 2022 *Phys. Rev. B* **105** 214305
- [16] Song F, Yao S Y, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 246801
- [17] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [18] Shen R Z, Chan W J, Lee C H 2025 *Phys. Rev. B* **111**, 045420
- [19] Lee C H, Thomale R 2019 *Phys. Rev. B* **99** 201103
- [20] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
- [21] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [22] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
- [23] Li L, Lee C H, Gong J 2021 *Commun. Phys.* **4** 42
- [24] Wang Y, Zhang X Y, Yang Z S, Wu C J 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 036501
- [25] Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230307 (in Chinese) [胡愈敏, 宋飞, 汪忠 2021 物理学报 **70** 230307]
- [26] Yang X, Liu M J, Hou J H, Li T Y, Wang S M 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 144205 (in Chinese) [杨星, 刘梦蛟, 侯佳浩, 李添悦, 王湫明 2025 物理学报 **74** 144205]
- [27] Wang Y A, Li L 2025 *Chin. Phys. Lett.* **42** 037301
- [28] Liu J L, Pang T F, Yang X S, Wang Z L 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 227402 (in Chinese) [刘佳林, 庞婷芳, 杨晓森, 王征令 2022 物理学报 **71** 227402]
- [29] Yokomizo K, Murakami S 2021 *Phys. Rev. B* **104** 165117
- [30] Guo C X, Wang X L, Hu H P, Chen S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 134121
- [31] Li B, Wang H R, Song F, Wang Z 2023 *Phys. Rev. B* **108** L161409
- [32] Molignini P, Arandes O, Bergholtz E J 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 033058
- [33] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [34] Ghatak A, Brandenbourger M, Van Wezel J, Coulais C 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **117** 29561
- [35] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
- [36] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, Abdelghany M, Kiessling T, Molenkamp L, Lee C, Szameit A, Greiter M, Thomale R 2020 *Nat. Phys.* **16** 747
- [37] Weidemann S, Kremer M, Helbig T, Hofmann T, Stegmaier A, Greiter M, Thomale R, Szameit A 2020 *Science* **368** 311
- [38] Zhang T, Zhang T, Lu M H, Chen Y F 2022 *Adv. Phys. X* **7** 2109431
- [39] Ding K, Fang C, Ma G 2022 *Nat. Rev. Phys.* **4** 745
- [40] Lin R, Tai T, Li L, Lee C H 2023 *Front. Phys.* **18** 53605
- [41] Okuma N, Sato M 2023 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **14** 83
- [42] Lieb E H, Limiger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605
- [43] Lieb E H 1963 *Phys. Rev.* **130** 1616
- [44] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312
- [45] Gaudin M 1967 *Phys. Lett. A* **24** 55
- [46] Lieb E H, Wu F Y 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 1445
- [47] Guan X W, Batchelor M T, Lee C 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1633
- [48] Mao L, Hao Y, Pan L 2023 *Phys. Rev. A* **107** 043315
- [49] Zheng M, Qiao Y, Wang Y, et al 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 086502
- [50] Longhi S 2023 *Ann. Phys.* **535** 2300291
- [51] Fukui T, Kawakami N 1998 *Phys. Rev. B* **58** 16051
- [52] Asakawa H, Suzuki M 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 225
- [53] Woynarovich F 1985 *Phys. Lett. A* **108** 401 (in Chinese)
- [54] Yin X G, Yu H R, Hao Y J, Zhang Y B 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 020302 (in Chinese) [尹相国, 于海如, 郝亚江, 张云波 2024 物理学报 **73** 020302]

SPECIAL TOPIC—Ultracold atomic and molecular physics

Ground-state properties of the one-dimensional nonreciprocal hopping Fermi-Hubbard model under open boundary conditions*

YIN Xiangguo^{1)2)3)†} LIU Lulu¹⁾²⁾

1) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 11 February 2026; revised manuscript received 9 April 2026)

Abstract

The non-Hermitian skin effect is a distinctive physical phenomenon that has attracted considerable attention in non-Hermitian systems. Investigating its inherent connection with the quantum control of non-Hermitian many-body systems is of significant theoretical importance. In this paper, we study a one-dimensional Fermi-Hubbard model with non-reciprocal hopping under open boundary conditions. By solving the corresponding Bethe ansatz equations, we obtain the exact solution of the system. On this basis, we further calculate the ground-state density distribution and momentum distribution, thereby achieving a systematic analysis of the non-Hermitian skin effect in a many-body system. Our results reveal a notable competition mechanism between interparticle interactions and the imaginary gauge phases. By adjusting the strength of interactions and the magnitude of the imaginary gauge field, the intensity of the non-Hermitian skin effect can be effectively modulated. The imaginary gauge field enhances this effect, whereas interactions exhibit a certain inhibitory influence. Together, they govern the evolution of the system's distribution in both real space and momentum space. Specifically, in the strongly repulsive regime at a particle density of one, the system exhibits a Mott insulating state, wherein each lattice site is singly occupied. Under these conditions, only a sufficiently strong imaginary gauge phase can induce a rightward accumulation of particles at the boundary. Conversely, for a filling configuration characterized by a total particle density of two and a spin down density of one, the sites are doubly occupied by particles of opposite spin. In this latter case, the occupation structure remains unaffected by the presence of the imaginary gauge phase. This study elucidates the regulatory mechanisms of interactions and non-Hermitian coupling on the skin effect, providing an important foundation for the study of non-Hermitian strongly correlated many-body systems.

Keywords: Hubbard model, Bethe ansatz method, density distribution, momentum distribution

DOI: [10.7498/aps.75.20260238](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260238)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260238](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260238)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12461160324) and the Research Foundation for Basic Research of Shanxi Province, China (Grant No. 202103021224033).

† Corresponding author. E-mail: yinxianguo@sxu.edu.cn



开边界条件下—维非互易跃迁费米哈伯德模型的基态性质

尹相国 刘璐璐

Ground–state properties of the one–dimensional nonreciprocal hopping Fermi–Hubbard model under open boundary conditions

YIN Xiangguo LIU Lulu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 110309 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260238

CSTR: 32037.14.aps.75.20260238

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260238>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

—维接触排斥相互作用单自旋翻转费米气体的基态和淬火动力学性质

Properties of ground state and quench dynamics of one–dimensional contact repulsive single–spin flipped Fermi gases

物理学报. 2024, 73(2): 020302 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231425>

基于哈伯德模型的超冷原子量子模拟研究进展

Recent research progress of ultracold–atom quantum simulation of Fermi–Hubbard model

物理学报. 2025, 74(1): 017101 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241595>

高超声速模型尾迹电子密度二维分布反演方法

Inversion method of two–dimensional distribution of electron density in hypersonic model wake

物理学报. 2022, 71(11): 115202 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212345>

铜基二轨道哈伯德模型中自旋条纹序与超导电性相互关系的量子蒙特卡罗研究

Quantum Monte Carlo study of interplay between spin stripe order and superconductivity in copper based two–orbital Hubbard model

物理学报. 2026, 75(6): 115202 <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251362>

非互易 Aubry–André 模型的经典电路模拟

Electrical circuit simulation of nonreciprocal Aubry–André models

物理学报. 2022, 71(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220219>

核内高动量分布对韧致辐射光子产生的影响

Influence of high–momentum distribution within nucleus on production of bremsstrahlung photons

物理学报. 2025, 74(13): 132502 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250239>