

基于 Kolmogorov-Arnold Networks 的 Grad-Shafranov 方程自由边界问题求解方法*

张津瑞¹⁾ 栾其斌²⁾ 丁思琪³⁾ 刘天源³⁾ 顾翔³⁾ 王正涵^{1)†}

1) (大连理工大学物理学院, 大连 116024)

2) (大连理工大学公共基础学院, 盘锦 124124)

3) (新奥科技发展有限公司, 廊坊 065991)

(2026 年 3 月 6 日收到; 2026 年 4 月 9 日收到修改稿)

等离子体平衡计算是磁约束核聚变理论研究、装置设计和实时控制的核心问题之一. 为克服 Grad-Shafranov 方程自由边界问题的迭代求解成本高、现有机器学习方法泛化能力弱的局限, 本文提出了基于 Kolmogorov-Arnold Networks 的快速求解方法. 基于 Shape Editor 自由边界求解模块构建拉丁超立方采样数据集, 并在模型中引入方程残差约束和等离子体电流约束. 模型还在损失函数中引入 B 样条基函数系数 L1 正则化项和熵正则化项, 并采取剪枝策略简化网络结构. 训练完成后通过符号回归将模型表达为显式数学形式, 磁通预测决定系数可达到 0.995342. 基于保持边界点一阶偏导数不变的线性外推方法, 本文将符号回归结果外推至训练样本空间外, 并通过比较外推的磁通分布和限制器边界的位置关系实现了 89.1% 的偏滤器与限制器位型判断准确率. 该求解方法单次计算时间由传统求解器的分钟级缩短至毫秒级, 且存储占用空间显著降低.

关键词: Grad-Shafranov 方程, Kolmogorov-Arnold Networks, 物理信息神经网络, 线性外推

DOI: 10.7498/aps.75.20260331

CSTR: 32037.14.aps.75.20260331

1 引言

在托卡马克装置中等离子体的力平衡状态由 Grad-Shafranov (G-S) 方程描述. 在求解其自由边界问题时, 等离子体的边界位置取决于空间的磁通分布, 但计算磁通分布所需要的等离子体电流分布又需要边界位置来确定. 这种磁通和电流密度之间的相互依赖关系增加了平衡计算的难度.

为攻克上述困难, 早期部分基于外部磁场测量和最小二乘拟合的研究奠定了平衡计算的基础^[1,2]. 随后, Lao 等^[3] 发展出基于 Picard 迭代的经典求解框架, 通过格林函数交替求解等离子体区的微分方程与外部场源区的积分方程, 从而成功解耦了

求解过程. 该方法在 EFIT 代码中得到完善^[4], 成为 DIII-D 和 ITER 等装置的标准工具, 并在全球范围内得到广泛应用. 然而, 随着现代托卡马克转向高参数模式, Picard 迭代的局限性日益凸显: 不仅在复杂平衡求解时可能收敛困难, 而且单次计算耗时通常在秒级, 难以满足实时控制的需求. 尽管后续研究在数值稳定性^[5] 和复杂物理模型扩展 (如等离子体流、复杂偏滤器位型等)^[6-9] 方面进行优化, 并尝试通过并行计算与自适应网格提升求解速度^[10-12], 但传统数值算法始终难以满足快速计算的需求. 近年来, 机器学习方法为磁约束核聚变研究开辟了新的研究范式, 在湍流输运预测^[13,14]、不稳定性分析^[15,16] 以及求解偏微分方程^[17,18] 等领域展现出显著的计算速度优势. 研究者利用物理信息

* 国家磁约束核聚变能发展研究专项 (批准号: 2022YFE03090000) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 12435014) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zzwang@dlut.edu.cn

神经网络^[19]、多任务网络^[20]、算子学习^[21]以及稀疏网格配置^[22]等方法,大幅缩减了模拟时间成本,成功将单次计算时间缩短至亚毫秒级^[23].然而,这些机器学习方法在训练数据范围外的泛化能力不足.当探索未经训练的参数区域时,模型往往无法正确识别等离子体平衡位型.考虑到 G-S 方程自由边界问题可能存在非唯一解的现象^[24],这一现象增加了外推的不确定性.

如何兼顾计算速度、泛化能力以及对未知位型的判别能力,成为了当前亟待突破的难题.为此,

本文提出一种基于 Kolmogorov-Arnold Networks (KAN) 的 G-S 方程自由边界问题求解方法.

2 研究方法

2.1 引入物理信息的 KAN

KAN 基于 Kolmogorov-Arnold 表示定理^[25], 即有界域上的多元连续函数 $f(\mathbf{x})$ 可精确表示为有限个一元连续函数的叠加与复合,具体表示为

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \Phi_q \left(\sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right), \quad (1)$$

其中 $\phi_{q,p}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. KAN 将这一思想推广到任意宽度和深度:

$$\text{KAN}(\mathbf{x}) = \sum_{i_{L-1}=1}^{n_{L-1}} \phi_{L-1,i_L,i_{L-1}} \left(\sum_{i_{L-2}=1}^{n_{L-2}} \dots \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \phi_{1,i_2,i_1} \left(\sum_{i_0=1}^{n_0} \phi_{0,i_1,i_0}(x_{i_0}) \right) \right) \dots \right), \quad (2)$$

其中 $\phi_{l,j,i}$ 表示 KAN 中第 l 层第 i 个节点和第 $l+1$ 层第 j 个节点之间的激活函数. 图 1 给出了 KAN 的具体网络结构. KAN 的核心特征是用可学习的单变量激活函数替代固定激活函数. 激活函数 $\phi(x)$ 由基础函数 $b(x)$ 和 B 样条函数组成:

$$\phi(x) = \omega_b b(x) + \omega_s \text{spline}(x) = \omega_b b(x) + \omega_s \sum_i c_i B_i(x), \quad (3)$$

其中 ω_b 和 ω_s 分别表示基础函数和 B 样条函数的权重系数; c_i 为可训练的样条基函数权重, 本文取基础函数 $b(x) = \text{silu}(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}$.

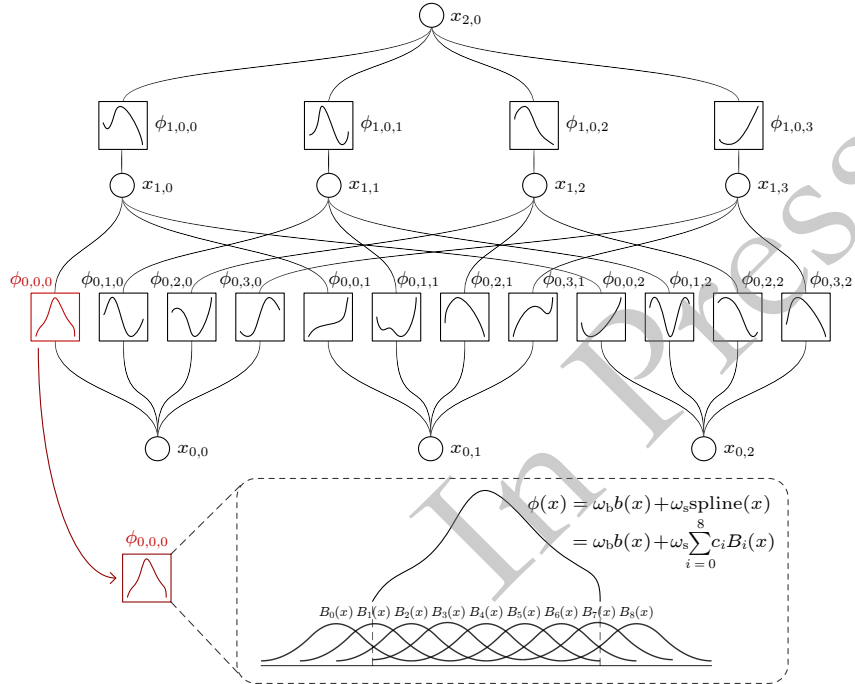


图 1 KAN 架构图解

Fig. 1. Illustration of the KAN architecture.

本文在 KAN 损失函数中引入方程残差约束和等离子体电流约束^[26], 以确保模型符合物理规律, 同时采用剪枝策略简化模型结构并提升泛化能力. 具体的网络结构与训练策略参数见表 1. 剪枝前为了诱导网络结构的稀疏化, 损失函数中引入了带权重的 B 样条基函数系数 L1 正则化项和熵正则化项. 该过程可分为三个阶段: 预热期、增强期和稳定期. 预热期网络专注于学习数据特征, 增强期逐渐引入正则化项来促进网络稀疏化, 稳定期固定正则化项权重, 使网络在当前约束下充分训练. 随后执行剪枝操作, 将网络中神经元权重低于阈值的连接切除, 模型在剪枝后的保留网络结构上继续完成训练. 网络采用 Adam 优化器训练, 并采用了 MultiStepLR 学习率衰减策略.

表 1 网络结构与训练策略参数
Table 1. Network architecture and training strategy parameters.

类别	参数	设置值
网络结构	输入层节点数	14
	隐含层数	1
	隐含层节点数	10
	输出层节点数	2
B样条参数	样条节点区间数	2
	样条阶数	3
	样条函数输入归一化范围	$[-1, 1]$
训练策略	总迭代次数	1000
	剪枝前预热期	0—120
	剪枝前增强期	120—360
	剪枝前稳定期	360—600

2.2 符号回归与线性外推

为实现模型的显式表达, 本文选取了多项式函数、三角函数、指数函数、切比雪夫多项式函数等多种候选函数类型. 在此基础上, 对训练后模型的激活函数进行拟合, 利用最小二乘法优化函数参数, 并通过决定系数 R^2 评估激活函数的拟合优度.

机器学习模型通常仅能保证训练数据覆盖范围内的预测能力, 但难以保证在训练数据范围外的预测结果的可靠性. 为突破这一局限, 本文首先通过计算训练集的凸包^[27]来界定参数边界, 当输入参数向量 $\mathbf{x}$ 位于边界外时, 寻找原始参数空间中距离 $\mathbf{x}$ 最近的边界点 $\mathbf{x}_{\text{bnd}}$. 随后在边界点处采用一阶有限差分法计算 $\nabla\psi$, 并假设该梯度在边界外部局部保持不变. 最后基于一阶泰勒展开将函数线性外

推至目标参数位置, 得到外推后的 $\psi^{\text{ext}}(\mathbf{x})$:

$$\psi^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}_{\text{bnd}}) + (\nabla\psi)^{\top}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{bnd}}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{bnd}}). \quad (4)$$

本文将该方法模型拓展至训练样本空间外, 使用外推得到的磁通预测结果来分析该参数组合所对应的位型信息.

3 结果与讨论

3.1 构建数据集

Shape Editor(SE) 是一个基于 Matlab 开发的托卡马克建模与等离子体放电方案设计工具^[28]. SE 集成了电磁场计算、电路模型、平衡演化以及放电波形求解等核心功能, 并通过直观的图形用户界面, 实现了等离子体位形的高效编辑与精确模拟. 该求解器输出的通量与平衡计算结果已通过 SWEQU 和 EFIT 等主流平衡程序的交叉验证. SE 被用于设计 HL-3(原 HL-2 M) 装置的首次等离子体放电方案, 并实现了 ITER 和 CFETR 等大型装置的偏滤器位型验证. 本文利用 SE 求解器生成上下对称位型下的训练数据集, 输入参数包括比压 β_p 、等离子体电流 I_p 以及 10 个环向场线圈电流 $I_{\text{ex}1} \sim I_{\text{ex}10}$. 由于位型的对称性, 10 个线圈电流中仅有 5 个电流是独立的. 本文采用拉丁超立方采样方法在上述七维参数空间内生成了 40000 组输入参数组合. 每组参数均通过 SE 求解器在 129×129 空间网格上进行平衡计算, 计算网格覆盖了 EXL-50U 装置中 $0.4 \text{ m} \leq R \leq 1.2 \text{ m}$, $-0.6 \text{ m} \leq Z \leq 0.6 \text{ m}$ 的物理区域. 计算结果包含偏滤器位型(最外层闭合磁面与限制器未接触)平衡解和限制器位型(最外层闭合磁面与限制器接触)平衡解. 本文选取其中全部的 9292 组偏滤器位型数据构成本文的数据集. SE 求解器输入参数的统计信息见表 2.

12 个物理参数与空间坐标 (R, Z) 共同组成 KAN 的 14 个输入参数. 网络的输出为该坐标点的磁通 ψ 和环向电流密度 J_{ψ} . 由于 KAN 要求激活函数输入参数位于预设范围内, 本文采用最大最小值(min-max)归一化方法对所有输入参数进行了预处理.

3.2 结果与分析

本文采用了监督学习、半监督学习和剪枝策略下的半监督学习三种学习模式, 共同训练 G-S 方程的自由边界问题.

表 2 SE 求解器输入参数的统计信息
 Table 2. Statistical information of input parameters in SE.

	β_p	I_p/A	I_{ex1}/A	I_{ex2}/A	I_{ex3}/A	I_{ex4}/A
min	0.751	400002	1025.013	1035.112	4025.086	4065.236
max	0.849	599999	7084.806	7154.607	12204.761	12326.504
mean	0.8	500069.5241	4049.6743	4089.5725	8116.7203	8197.685
std	0.0283	57674.8662	1748.4576	1765.6838	2359.9229	2383.4633
	I_{ex5}/A	I_{ex6}/A	I_{ex7}/A	I_{ex8}/A	I_{ex9}/A	I_{ex10}/A
min	1525.112	1525.112	-5674.984	-5674.984	-8674.967	-8674.967
max	5474.982	5474.982	-3655.04	-3655.04	-7525.019	-7525.019
mean	3497.4696	3497.4696	-4666.8073	-4666.8073	-8099.0251	-8099.0251
std	1139.5596	1139.5596	582.6904	582.6904	332.1794	332.1794

采用监督学习方法训练 KAN, 记为 KAN-1. 监督学习中损失函数仅包含数据项:

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_\psi \mathcal{L}_\psi + \lambda_{J_\psi} \mathcal{L}_{J_\psi}, \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{N_\psi} \sum_{j=1}^{N_\psi} \left| \psi_{KAN}^{(j)} - \psi_{TRUE}^{(j)} \right|^2, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{J_\psi} = \frac{1}{N_{J_\psi}} \sum_{j=1}^{N_{J_\psi}} \left| J_{\psi_{KAN}}^{(j)} - J_{\psi_{TRUE}}^{(j)} \right|^2, \quad (7)$$

其中 λ_ψ 与 λ_{J_ψ} 分别代表磁通损失项和电流密度损失项的权重, 本文取 $\lambda_\psi = \lambda_{J_\psi} = 1$; ψ_{KAN} , ψ_{TRUE} 和 $J_{\psi_{KAN}}$, $J_{\psi_{TRUE}}$ 分别表示由 KAN 网络预测和 SE 求解器迭代得到的磁通和电流密度; N_ψ 与 N_{J_ψ} 均表示该批所有样本的空间剖面内的网格点数之和.

图 2 显示, 训练集损失函数与验证集损失函数均随模型训练同步下降, 并最终稳定收敛. 两者的曲线高度吻合, 说明模型在纯数据驱动模式下未出现过拟合现象. 图 3 展示了测试集上典型样本的预测结果. 从误差空间分布 (图 3(b)) 可以看出, 较大误差主要集中在线圈电流区域附近. 纯数据驱动的 KAN-1 已能实现较高的拟合精度, 但方程残差较大, 需要在训练中引入物理约束以增强模型的物理一致性.

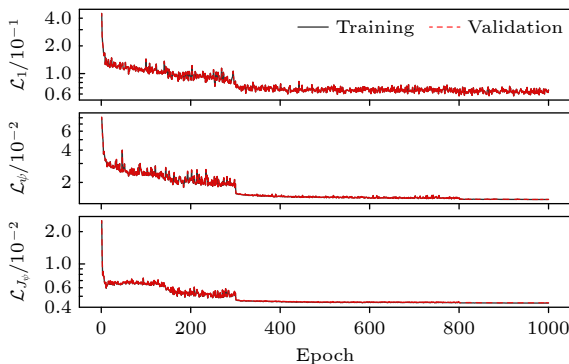


图 2 KAN-1 损失函数收敛曲线

Fig. 2. Convergence curves of loss functions in KAN-1.

在监督学习的基础上, 进一步引入方程残差约束和等离子体电流约束, 将该网络记为 KAN-2. 半监督学习的损失函数为

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_\psi \mathcal{L}_\psi + \lambda_{J_\psi} \mathcal{L}_{J_\psi} + \lambda_{PDE} \mathcal{L}_{PDE} + \lambda_{I_p} \mathcal{L}_{I_p}, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N_{PDE}} \sum_{j=1}^{N_{PDE}} \left| \frac{\partial^2 \psi_{KAN}^{(j)}}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{KAN}^{(j)}}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi_{KAN}^{(j)}}{\partial Z^2} + \mu_0 R J_{\psi_{KAN}}^{(j)} \right|^2, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{I_p} = \frac{1}{N_{I_p}} \sum_{j=1}^{N_{I_p}} \left| \sum_{\text{out of coils}} J_{\psi_{KAN}}^{(j)} \Delta R \Delta Z - I_p^{(j)} \right|^2, \quad (10)$$

其中 λ_{PDE} 与 λ_{I_p} 分别代表方程残差损失项和等离子体电流损失项的权重, 本文取 $\lambda_\psi = \lambda_{J_\psi} = \lambda_{I_p} = 1$, $\lambda_{PDE} = 0.1$; N_{PDE} 表示该批所有样本的空间剖面内的网格点数之和, N_{I_p} 表示该批的样本数 (每一个样本仅计算一个等离子体电流值); μ_0 表示真空磁导率; R 与 Z 表示网格坐标, ΔR 和 ΔZ 表示 R 方向和 Z 方向上的网格间距.

由于真空区域等离子体电流密度为零, 而极向场线圈区域电流集中在线圈内, 所以两者在空间交界处存在突变. 因此 KAN-2 输出的电流密度仅考虑等离子体电流密度. 假定线圈内的电流均匀, 则 (9) 式中的总电流密度除去等离子体电流密度剩下的部分由均匀分布的线圈电流得到.

图 4 表明, 半监督学习中, 总损失及各物理约束项在训练集与验证集上均保持同步下降并稳定收敛, 有效地避免了过拟合问题. 图 5 展示了测试集典型样本的预测结果. 与 KAN-1 相比, KAN-2 的磁通预测的平均绝对相对误差增至 1.058%, 较大误差仍主要分布在线圈区域, 而等离子体区域的方程残差显著降低, 预测结果更符合物理规律.

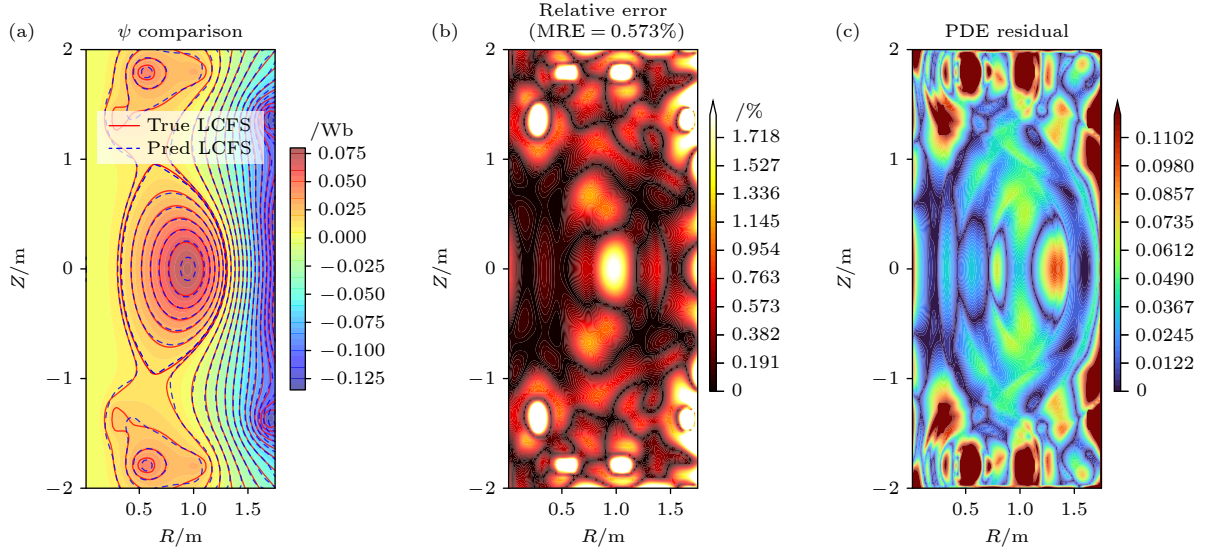


图 3 KAN-1 的预测结果 (a) 磁面对比; (b) 绝对相对误差分布; (c) 方程残差绝对值分布

Fig. 3. Prediction results in KAN-1: (a) Magnetic surface comparison; (b) absolute relative error distribution; (c) absolute PDE residual distribution.

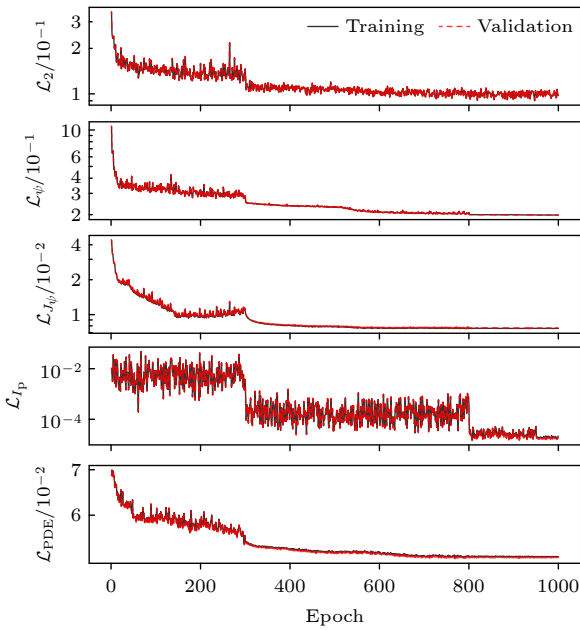


图 4 KAN-2 损失函数收敛曲线

Fig. 4. Convergence curves of loss functions in KAN-2.

为了剔除网络中的冗余连接,降低模型的复杂度,本文在半监督学习框架的基础上引入了剪枝策略,将该网络记为 KAN-3. 具体而言,在剪枝前的训练阶段,损失函数中引入 B 样条基函数系数的 L1 正则化项和熵正则化项:

$$\mathcal{L}_3 = \lambda_\psi \mathcal{L}_\psi + \lambda_{J_\psi} \mathcal{L}_{J_\psi} + \lambda_{\text{PDE}} \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \lambda_{I_p} \mathcal{L}_{I_p} + \lambda(t) \mathcal{L}_{\text{reg}}, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_{\text{reg}} = \lambda_{L1} \mathcal{L}_{L1} + \lambda_{\text{entropy}} \mathcal{L}_{\text{entropy}}, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_{L1} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{N_{\text{in}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{out}}} \left(\sum_{b=1}^{N_b} |c_{l,j,i,b}| \right), \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{\text{entropy}} = - \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{N_{\text{in}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{out}}} (p_{l,j,i} \log p_{l,j,i}), \quad (14)$$

$$p_{l,j,i} = \frac{\frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} |c_{l,j,i,b}|}{\sum_{i=1}^{N_{\text{in}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{out}}} \left(\frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} |c_{l,j,i,b}| \right)}, \quad (15)$$

其中 λ_{L1} 与 λ_{entropy} 分别代表 B 样条基函数系数的 L1 正则化项和熵正则化项的权重, 本文取 $\lambda_{L1} = \lambda_{\text{entropy}} = 1$; i, j, l 为网络连接索引, 代表了从第 l 层第 i 个神经元 (共 N_{in} 个) 到第 $l+1$ 层第 j 个神经元 (共 N_{out} 个) 的连接; $c_{l,j,i,b}$ 为该连接中的第 b 个 B 样条基函数系数 (共 N_b 个), $p_{l,j,i}$ 表示该连接在第 l 层到第 $l+1$ 层之间所有连接中的贡献比例. $\mathcal{L}_{L1}$ 旨在减少非必要的连接, 从整体上促进网络稀疏化; $\mathcal{L}_{\text{entropy}}$ 旨在促进层内权重分布趋向两极分化, 降低网络结构的复杂度. t 为迭代次数, 权重 $\lambda(t)$ 设置为

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 120 \\ \frac{0.001}{120}(t-120), & 120 \leq t < 240 \\ 0.001, & 240 \leq t < 600 \end{cases} \quad (16)$$

当 $t = 600$ 时, 网络将权重低于阈值的连接移除. 此后损失函数恢复为 (8) 式, 网络专注于优化

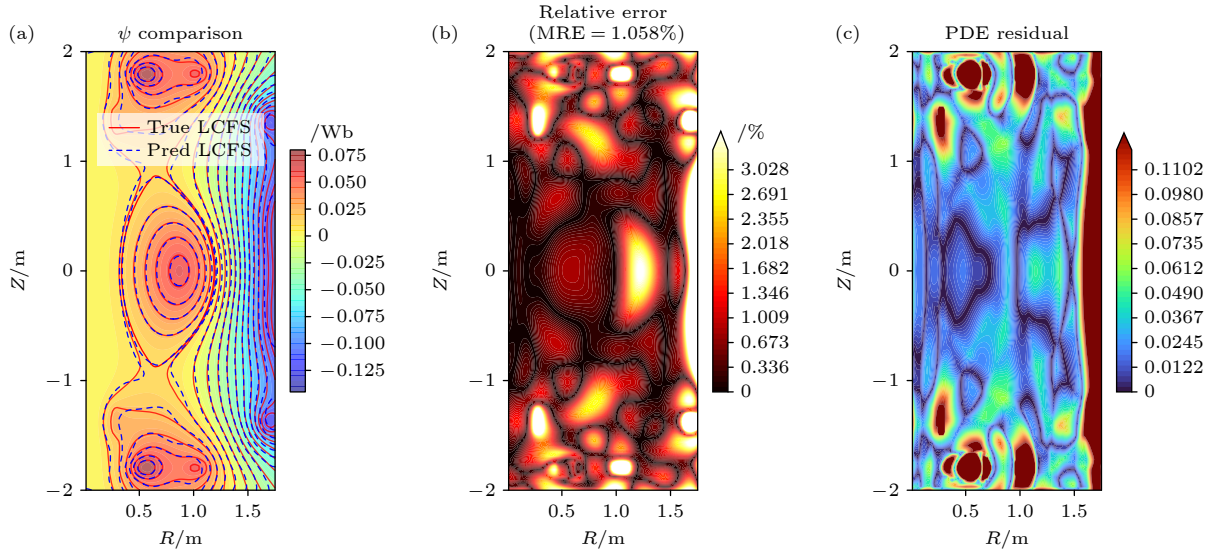


图 5 KAN-2 的预测结果 (a) 磁面对比; (b) 绝对相对误差分布; (c) 方程残差绝对值分布

Fig. 5. Prediction results in KAN-2: (a) Magnetic surface comparison; (b) absolute relative error distribution; (c) absolute PDE residual distribution.

剩余连接的拟合质量. 图 6 和图 7 分别展示了 KAN-3 在训练过程中各项损失的收敛曲线以及测试集典型样本的预测结果. 与 KAN-2 相比, KAN-3 的平均绝对相对误差略微上升, 整体预测质量仍保持在较高水平. 同时, 网络连接数减少了 27.5%, 这有利于后续利用符号回归将模型表达为数学表达式.

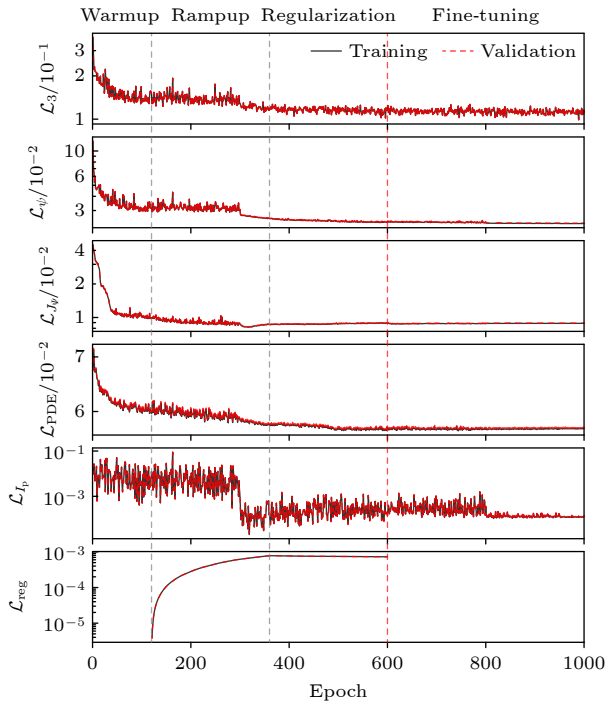


图 6 KAN-3 损失函数收敛曲线

Fig. 6. Convergence curves of loss functions in KAN-3.

训练完成后, 对网络中的激活函数做符号回归, 将得到的模型记为 KAN-SR. 所有神经元连接的解析表达结果见补充材料 (online). 表 3 则汇总了对网络连接拟合结果的统计信息.

表 3 对 KAN-3 网络连接的拟合结果和相关统计信息
Table 3. Fitting results and related statistical characteristics of KAN-3 network connections.

函数类型	连接数	占比/%	决定系数 R^2
无(被剪枝)	44	27.50	—
Silu	39	24.38	0.999999
4阶多项式	24	15.00	0.999998
3阶多项式	21	13.12	0.999997
6阶多项式	12	7.50	0.999979
15阶Chebyshev多项式	6	3.75	0.999929
Gaussian与多项式叠加	3	1.88	0.999917
Softplus	2	1.25	0.999998
8阶Chebyshev多项式	2	1.25	0.999979
10阶Chebyshev多项式	2	1.25	0.999967
Sigmoid	1	0.62	0.999993
Gaussian	1	0.62	0.999963
9阶Chebyshev多项式	1	0.62	0.999947
7阶Chebyshev多项式	1	0.62	0.999968
Tanh	1	0.62	0.999907

图 8 展示了测试集典型样本的磁通输出对比, 包含 SE 求解器、KAN-3 和 KAN-SR 的计算结果. 从图 8(a) 的磁通分布来看, 三种方法生成的磁面结构高度重合. 对比图 8(b) 和图 8(c) 可知, 误差

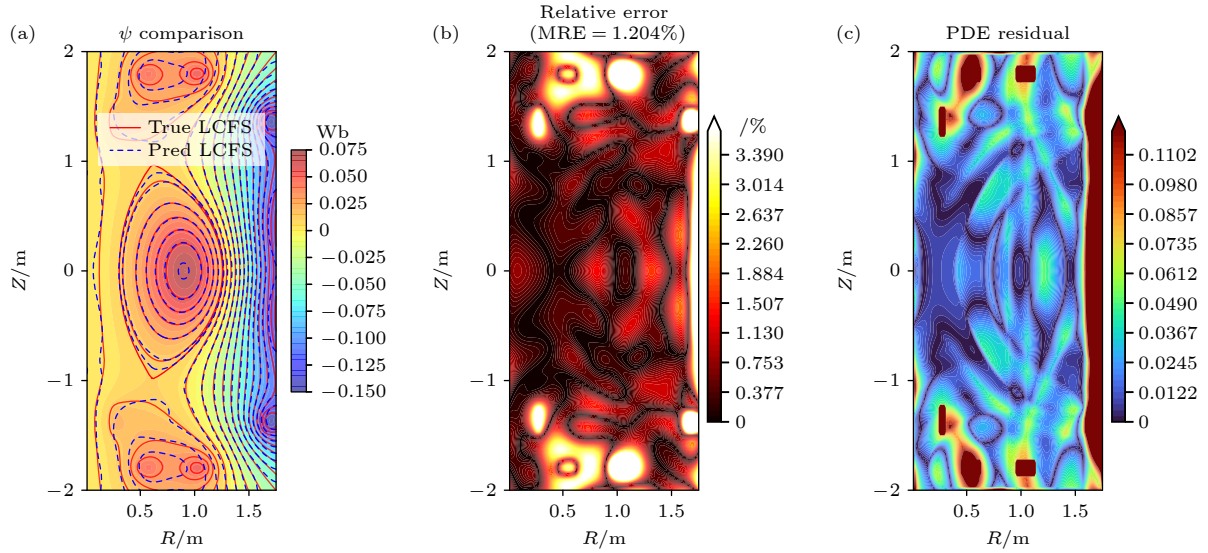


图7 KAN-3的预测结果 (a) 磁面对比; (b) 绝对相对误差分布; (c) 方程残差绝对值分布

Fig. 7. Prediction results in KAN-3: (a) Magnetic surface comparison; (b) absolute relative error distribution; (c) absolute PDE residual distribution.

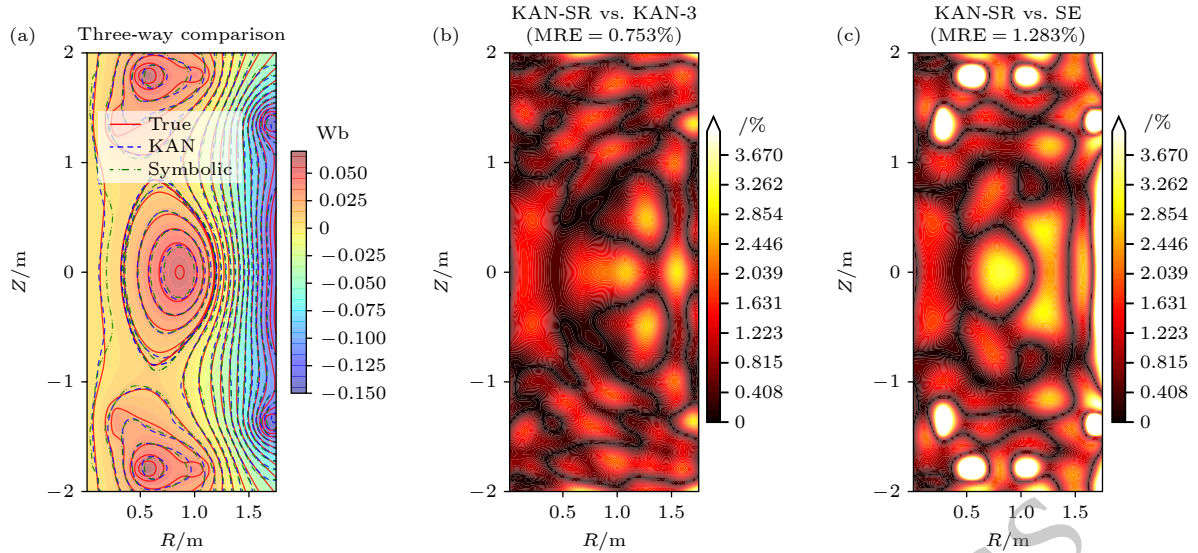


图8 KAN-SR与KAN-3、SE的磁通输出对比 (a) 磁面对比; (b) KAN-SR与KAN-3之间的绝对相对误差; (c) KAN-SR与SE之间的绝对相对误差

Fig. 8. Comparison of magnetic flux outputs among KAN-SR, KAN-3, and SE: (a) Magnetic surface comparison; (b) absolute relative error between KAN-SR and KAN-3; (c) absolute relative error between KAN-SR and SE.

主要分布在极向场线圈区域. 和 KAN-3 的预测误差相比, KAN-SR 的预测误差仅略微提升. 图 9 进一步统计了数值误差. 箱线图 9(a) 表明, KAN-3 的平均绝对相对误差为 1.022%; 最终 KAN-SR 的平均绝对相对误差上升至 1.347%. 图 9(b) 误差相关性分析显示, KAN-SR 在 KAN-3 基础上由符号回归引入的误差与 KAN-3 自身误差之间的相关系数仅为 0.1019. 这说明两种误差在统计上基本独立, 解析拟合并未放大原模型的误差. 此外, KAN-3

($R^2 \approx 0.995342$) 和 KAN-SR 均具备较高的拟合优度 ($R^2 \approx 0.993718$). 上述结果表明, KAN-SR 并没有放大 KAN-3 的原误差, 有效地保持了 KAN-3 的预测精度.

利用 (4) 式将 KAN-SR 的部分输入参数范围扩展至训练样本空间外, 外推的输入参数包括等离子体电流和 10 个线圈电流, 记外推得到的结果为 KAN-EXT. 根据 KAN-EXT 计算得到的外推磁通分布与限制器位置之间的关系判断位型. 需要说

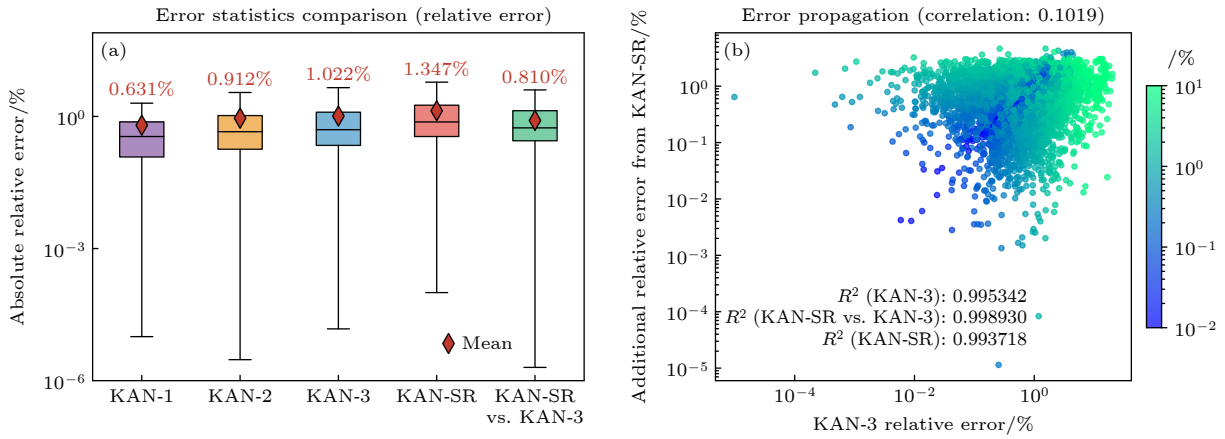


图9 不同方案的误差统计分析 (a) 各方案的绝对相对误差箱线图; (b) KAN-SR 与 KAN-3 误差分布及传播分析, 横轴为 KAN-3 绝对相对误差 (%), 纵轴表示 KAN-SR 相对于 KAN-3 增加的绝对相对误差 (%), 数据点的颜色代表 KAN-SR 绝对相对误差 (%)

Fig. 9. Statistical analysis of errors for different schemes: (a) Box plots of absolute relative errors for each scheme; (b) error distribution and propagation analysis between KAN-SR and KAN-3, where the horizontal axis represents the absolute relative error of KAN-3 (%), the vertical axis represents the additional absolute relative error of KAN-SR compared to KAN-3 (%), and the color of the data points indicates the absolute relative error of KAN-SR (%).

明, 由 SE 计算得到的训练集仅包含偏滤器位型情况, 即最外层闭合磁面未接触限制器. 因此使用 KAN-EXT 计算得到的磁通分布代表存在限制器下的偏滤器位型预测结果. 如果该磁通的最外层闭合磁面在限制器所限制的空间外, 则判断该组参数所对应的等离子体位型为限制器位型; 如果最外层闭合磁面在限制器所限制的空间内, 则判断其为偏滤器位型.

本文在训练数据范围外生成 1000 组测试样本, 这些样本通过 SE 计算获得真实位型标签, 其中偏滤器位型占 27.7%, 限制器位型占 72.3%. 图 10 展示了采用 KAN-EXT 计算磁通分布后的位型判断结果. 图 10(a) 的评价指标表明, 在训练数据范围外使用 KAN-EXT 预测得到的磁通分布能实现较高的位型判断准确率, 整体准确率达到 89.1%. 其中, 召回率高达 98.9%, 表明该方法几乎能够识别出测试集中的所有偏滤器样本; 特异度达到 85.3%, 说明对大部分限制器位型也能做出正确判断. 值得注意的是, 72.1% 的精确率反映出外推策略在参数边界外判断位型时, 外推公式更倾向于将少部分限制器位型误判为偏滤器位型. 图 10(c) 为通过 KAN-EXT 计算磁通分布判断为限制器位型的结果示例.

为探究部分限制器位型被误判的原因, 本文分析了误判样本的参数特征. 图 11 给出了样本点参数到参数边界的归一化欧几里得距离. 结果表明, 发生误判的限制器样本普遍更靠近边界 (平均距离

约为 0.64), 而正确识别的样本则分布在相对边界较远的区域 (平均距离约为 0.87). 造成这一现象的主要原因在于: 本文训练数据集的磁通分布特点是最外层闭合磁面比较接近限制器的位置, 因此在使用 KAN-EXT 时要求更精准的磁通分布预测, 此时一阶线性外推的精度不足以准确分辨这种临界的位置关系. 而随着外推距离的增加, 输入参数逐渐远离参数边界. 尽管磁通分布的预测精度降低, 但仅需判断该磁通对应的最外层闭合磁面是否超出限制器位置, 因此位型判断反而展现出更高的准确率.

为了验证 KAN 求解 G-S 方程的优势, 本节引入了 MLP 模型作为参考. 本文设置了两个 MLP 参照网络: MLP-1 的参数规模与 KAN-2 基本一致; MLP-2 则在此基础上进一步增加了隐含层数与节点数. 网络的具体参数信息和训练信息见表 4.

表 4 KAN 与 MLP 模型的网络参数及训练信息对比
Table 4. Comparison of network parameters and training information between KAN and MLP models.

	KAN-2	MLP-1	MLP-2
输入节点数	14	14	14
隐含层数	1	3	5
隐含层节点数	10	17	30
输出节点数	2	2	2
可训练网络参数个数	960	903	4232
磁通预测平均绝对 相对误差 / %	1.027	5.151	4.589
平均单次训练时长 / s	109.962	81.661	91.586
GPU 平均占用显存 / GB	7.491587	1.237615	1.732327

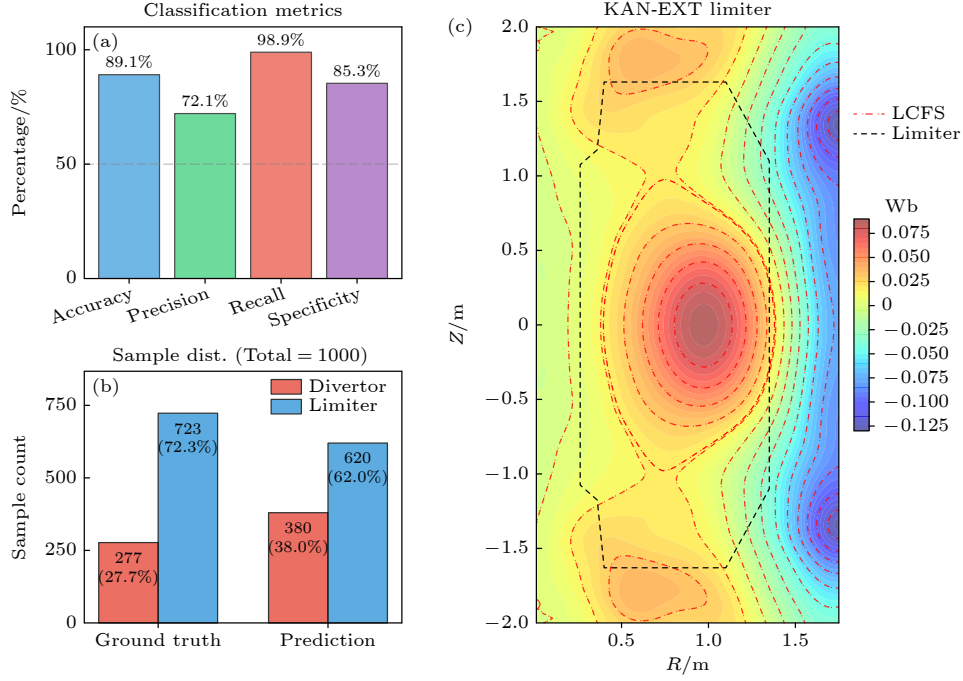


图 10 采用线性外推方法计算磁通分布后的位型判断结果 (a) 判断指标: 以偏滤器为目标正类, 分别展示了模型在外推样本上的整体准确率 (Accuracy)、精确率 (Precision, 即预测为偏滤器的样本中真实偏滤器所占的比例)、召回率 (Recall, 即真实偏滤器被正确识别的比例) 以及特异度 (Specificity, 即真实限制器被正确识别的比例); (b) 样本分布; (c) 正确识别限制器位型的样本示例

Fig. 10. Configuration classification results of the linear extrapolation strategy. (a) Classification metrics: setting the divertor as the positive class, this panel evaluates the model's accuracy, precision, recall (true positive rate for divertors), and specificity (true negative rate for limiters) on extrapolated samples; (b) sample distribution; (c) a typical example of a correctly identified limiter configuration via linear extrapolation.

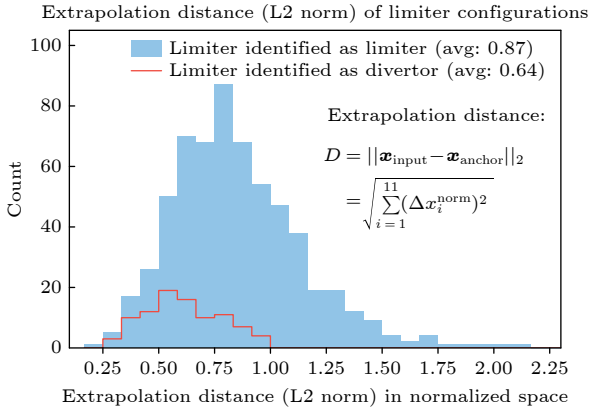


图 11 限制器位型对应的输入参数到参数边界的外推距离分布统计, 图中 $\mathbf{x}_{\text{input}}$ 与 $\mathbf{x}_{\text{anchor}}$ 分别代表 11 维的归一化输入参数向量以及距离最近的边界点参数向量, 包含 10 个线圈电流与 1 个等离子体电流; Δx_i^{norm} 表示上述两组参数中第 i 个维度的归一化差值

Fig. 11. Statistical distribution of extrapolation distances from input parameters to parameter boundaries for the limiter configuration. In the figure, $\mathbf{x}_{\text{input}}$ and $\mathbf{x}_{\text{anchor}}$ represent the 11-dimensional normalized input parameter vector and the nearest boundary point parameter vector, respectively, comprising 10 coil currents and 1 plasma current; Δx_i^{norm} denotes the normalized difference in the i -th dimension between these two sets of parameters.

图 12 和图 13 分别展示了三种网络在训练过程中各项损失的收敛曲线以及测试集典型样本的预测结果对比. 在可训练网络参数个数相近的条件下, MLP-1 的整体预测误差 (5.151%) 高于 KAN-2 (1.027%), 且 MLP-1 的误差集中分布在等离子体边界外侧及极向场线圈附近等磁通梯度变化较大的区域. 网络更加复杂的 MLP-2 也未取得理想的预测结果, 其平均误差仅降至 4.589%. 因为 KAN 中的可学习 B 样条激活函数比 MLP 中固定的激活函数更具灵活性, 所以处理空间中数值差异较大的复杂磁通分布时, 激活函数的自由度的引入使得 KAN 能够达到更好的拟合效果. 在计算资源消耗方面, KAN 的单步训练耗时更长, 且 GPU 显存占用率明显高于 MLP 方法. 因此 KAN 虽然要求较高的计算成本, 但是能以较小的网络结构实现更好的训练结果.

表 5 对比了 SE, KAN-2 和 KAN-SR 三种方法的计算性能. SE 作为复杂的迭代求解器, 主要基于 CPU 进行计算, 而本文方法则主要利用 GPU 计算. 尽管测试所用的硬件环境与计算架构不同, 但计算耗时与存储占用上的巨大差异, 足以说明不

同算法的性能区别. 测试结果显示, 相比于 SE 分钟级的耗时, KAN-2 与 KAN-SR 的单次求解时间均缩短至毫秒级 (分别为 6.54 ms 和 12.32 ms), 且内存与显存的占用大幅降低. 综上, 三种方法在实际应用中各有侧重: SE 计算精度最高且有完整的物理计算功能, 但计算速度慢; KAN-2 在训练数据覆盖的参数范围内能提供高精度的快速预测; KAN-SR 虽然定量精度有所下降, 但便于在训练参数空间外判断位型.

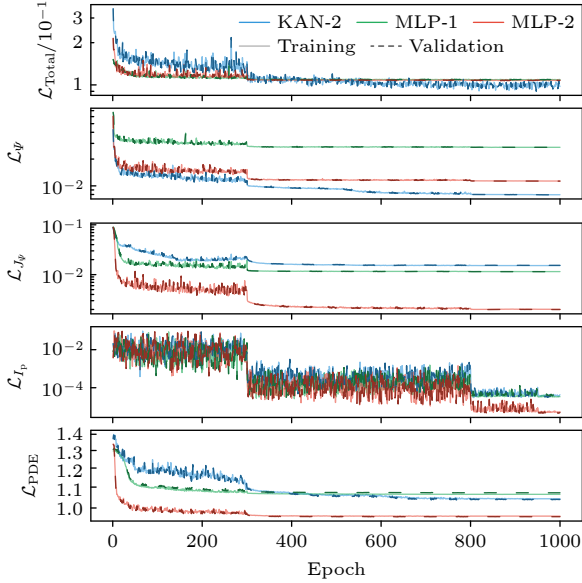


图 12 KAN-2, MLP-1 和 MLP2 损失函数收敛曲线对比
Fig. 12. Comparison of loss function convergence curves for KAN-2, MLP-1, and MLP-2.

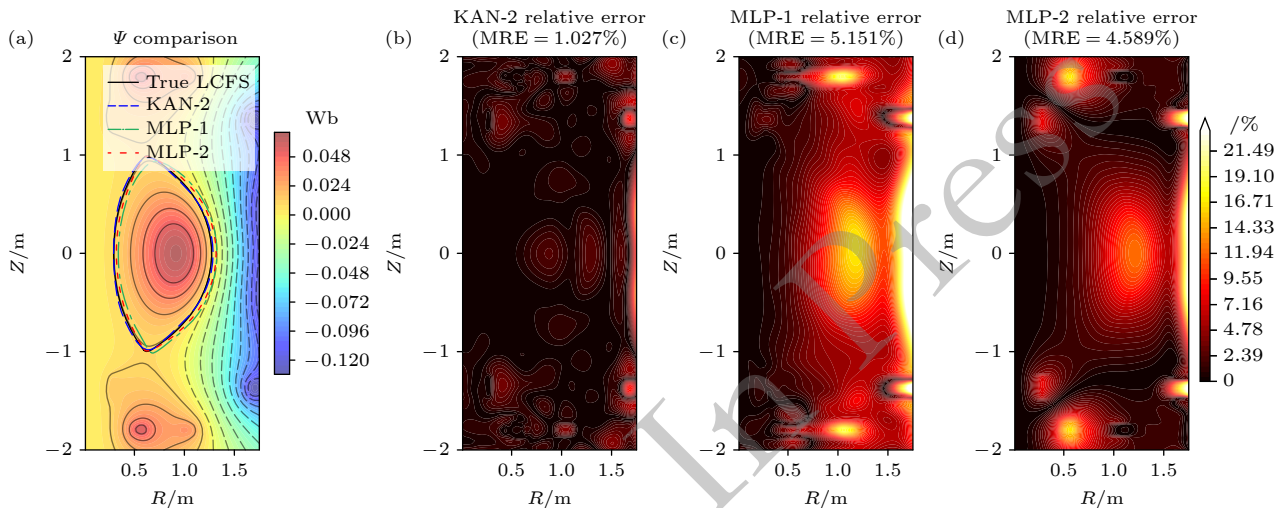


图 13 KAN 与 MLP 模型预测结果对比 (a) 磁通预测结果与最外层闭合磁面对比; (b)–(d) 分别表示 KAN-2, MLP-1 和 MLP-2 磁通输出的绝对相对误差分布.

Fig. 13. Comparison of prediction results between KAN and MLP models: (a) Comparison of magnetic flux (ψ) contours and the last closed flux surface (LCFS); (b)–(d) the absolute relative error distributions of the magnetic flux outputs for KAN-2, MLP-1, and MLP-2, respectively.

表 5 SE, KAN-2, KAN-SR 的性能对比

Table 5. Performance comparison among SE, semi-supervised learning, and the analytical formula.

计算方法	SE	KAN-2	KAN-SR
平均耗时/ms	72200	6.54	12.32
CPU内存峰值/KB	6317240.3	197.4	84.4
GPU显存峰值/MB	1460.38	39.01	10.25
实现功能	完整计算	偏滤器 位型计算	偏滤器位型计算 及位型判断

注: SE采用Intel Xeon Silver 4210 R CPU和NVIDIA RTX A5000 GPU; 半监督学习和解析公式采用Intel Xeon Gold 6530 CPU和NVIDIA GeForce RTX 5090 GPU.

4 结 论

针对 G-S 方程自由边界问题计算成本高、现有的人工智能方法外推能力弱的挑战, 本文基于 SE 求解器采用拉丁超立方采样方法构建数据集, 系统地研究了基于 KAN 的快速求解方法. 该方法通过监督学习、半监督学习和结合剪枝策略的半监督学习, 实现了高效可靠的自由边界 G-S 方程平衡计算. 监督学习方案验证了 KAN 网络的拟合能力; 半监督学习方案通过引入方程残差约束和电流约束, 使模型的方程残差有效降低; 引入剪枝策略有效简化了网络结构, 有助于模型通过符号回归表达为显式形式. 在此基础上本文基于保持边界点一阶偏导数不变的线性外推方法, 并根据外推后的磁通分布判断等离子体位型, 在超出训练数据范围的

测试样本上取得了 89.5% 的位型判断准确率. 相比于传统迭代求解器, 快速求解方法在计算耗时和存储占用方面均实现了大幅缩减. 与现有神经网络模型方法相比, KAN 能够更有效地拟合空间中数值差异较大的复杂磁通分布. 不过当前方法仍依赖数据驱动, 未能实现纯物理驱动的平衡计算. 为此, 未来计划在模型中引入完整的格林函数约束, 提升模型的泛化能力. 同时, 后续工作考虑把该方法扩展至限制器、雪花偏滤器位型, 从而适用于不同特殊位型的平衡求解, 以及实现完全自洽的平衡计算, 为磁约束核聚变领域提供更加高效可靠的计算工具.

参考文献

- [1] Luxon J L, Brown B B 1982 *Nucl. Fusion* **22** 813
- [2] Swain D W, Neilson G H 1982 *Nucl. Fusion* **22** 1015
- [3] Lao L L, St. John H, Stambaugh R D, Kellman A G, Pfeiffer W 1985 *Nucl. Fusion* **25** 1611
- [4] Lao L L, St John H E, Peng Q, Ferron J R, Strait E J, Taylor T S, Meyer W H, Zhang C, You K I 2005 *Fusion Sci. Technol.* **48** 968
- [5] Bettini P, Cavinato M, Portone A 2009 *Nucl. Fusion* **49** 015001
- [6] Honda M 2010 *Comput. Phys. Commun.* **181** 1490
- [7] Jeon Y M 2015 *J. Korean Phys. Soc.* **67** 843
- [8] F-Torija Daza G, Reynolds-Barredo J M, Sanchez R, Loarte A, Huijsmans G 2022 *Nucl. Fusion* **62** 126044
- [9] Daza G F T, Reynolds-Barredo J, Sanchez R, Loarte A, Tribaldos V 2024 *Nucl. Fusion* **64** 086012
- [10] Liu S, Tang Q, Tang X Z 2021 *SIAM J. Sci. Comput.* **43** B1198
- [11] Hansen C, Stewart I G, Burgess D, Pharr M, Guizzo S, Logak F, Nelson A O, Paz-Soldan C 2024 *Comput. Phys. Commun.* **298** 109111
- [12] Farmakalides A, Nikiforakis N, Millmore S, Romanelli M, Buxton P F 2025 *AIP Adv.* **15** 095128
- [13] Li H, Wang L, Fu Y L, Wang Z X, Wang T B, Li J Q 2025 *Nucl. Fusion* **65** 016015
- [14] Li H, Li J Q, Fu Y L, Wang Z X, Jiang M 2022 *Nucl. Fusion* **62** 036014
- [15] Zhao Y F, Liu Y Q, Wang S, Hao G Z, Wang Z X, Yang Z Y, Li B, Li J X, Chen H T, Xu M, Duan X R 2022 *Plasma Phys. Controlled Fusion* **64** 045010
- [16] Xu J, Luan Q, Li H, Chen Y, Wang Z 2024 *Phys. Plasmas* **31** 122113
- [17] Zhang Z Y, Wang Q W 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 188701 (in Chinese) [张照阳, 王青旺 2025 物理学报 **74** 188701]
- [18] Wang Y D, Chen J X, Li B 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 160201 (in Chinese) [王宇铎, 陈嘉鑫, 李彪 2025 物理学报 **74** 160201]
- [19] Wang Z, Song X, Rafiq T, Schuster E 2024 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **52** 4147
- [20] Zheng G H, Liu S F, Xie H S, Gu X, Chen Z Y, Lun X C, Liu Y, Li J, Guo D, Tao R Y, Zhao H Y, Zhang Y P, Sun T T, Xu Y N, Hu Y J, Yang Z Y 2025 *Nucl. Fusion* **65** 106008
- [21] Ding S, Zhang Z, Shi G, Li X, Gu X, Xu Y, Xie H S, Zhao H, Shi Y, Liu T 2025 *arXiv: 2511.19114 [physics. plasmp-h]*
- [22] Elman H C, Liang J, Sánchez-Vizuet T 2022 *J. Comput. Phys.* **448** 110699
- [23] Agnello A, Amorisco N C, Keats A, Holt G K, Buchanan J, Pamela S, Vincent C, McArdle G 2024 *Phys. Plasmas* **31** 043901
- [24] Pentland K, Amorisco N C, Farrell P E, Ham C J 2025 *Nucl. Fusion* **65** 086053
- [25] Liu Z, Wang Y, Vaidya S, Ruehle F, Halverson J, Soljacic M, Hou T Y, Tegmark M 2024 *arXiv: 2404.19756 [cs. LG]*
- [26] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E 2019 *J. Comput. Phys.* **378** 686
- [27] Netzeva T I, Worth A P, Aldenberg T, Benigni R, Cronin M T D, Gramatica P, Jaworska J S, Kahn S, Klopman G, Marchant C A, Myatt G, Nikolova-Jeliazkova N, Patlewicz G Y, Perkins R, Roberts D W, Schultz T W, Stanton D T, Sandt J J M v d, Tong W, Veith G, Yang C 2005 *Altern. Lab. Anim.* **33** 155
- [28] Song X M, Li J X, Leuer J A, Zhang J H 2019 *Fusion Eng. Des.* **147** 111254

A solution method for the free-boundary Grad-Shafranov equation based on Kolmogorov-Arnold Networks^{*}

ZHANG Jinrui¹⁾ LUAN Qibin²⁾ DING Siqi³⁾ LIU Tianyuan³⁾
GU Xiang³⁾ WANG Zhengxiong^{1)†}

¹⁾ (School of Physics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

²⁾ (School of General Education, Dalian University of Technology, Panjin 124124, China)

³⁾ (ENN Science and Technology Development Co., Ltd., Langfang 065991, China)

(Received 6 March 2026; revised manuscript received 9 April 2026)

Abstract

The computation of plasma equilibrium is essential for theoretical research, physical design, and real-time control of magnetic confinement fusion devices. To overcome the significant computational burdens of traditional iteration-based Grad-Shafranov (G-S) solvers and the inherent extrapolation limitations of existing “black-box” data-driven models, this work proposes an explicit, highly efficient, and physics-consistent numerical solver based on the Kolmogorov-Arnold Networks (KAN). Using the free-boundary module of Shape Editor (SE), a high-quality dataset comprising 9292 valid divertor configurations is constructed in a seven-dimensional parameter space via Latin Hypercube Sampling. To ensure physical consistency, a semi-supervised learning framework is developed by embedding G-S equation residuals and plasma current conservation constraints into the loss function. To address the spatial discontinuity of current density at coil boundaries, poloidal field coil currents are superimposed as known source terms rather than being directly predicted. Furthermore, a pruning method utilizing L1 regularization and entropy across all KAN layers is employed to sparsify the network, enabling the transformation of the trained model into explicit analytical expressions via symbolic regression. The symbolic model achieves a high determination coefficient (R^2) of 0.9953 for magnetic flux prediction, and error correlation analysis confirms the numerical stability of the symbolic extraction. A comparative analysis with traditional multilayer perceptrons further demonstrates the superiority of the KAN architecture in terms of accuracy and interpretability. Based on a linear extrapolation method utilizing first-order gradient continuity, the model’s input parameter range is extended beyond the training space. This extrapolated magnetic flux distribution enables the identification of plasma configurations through its positional relationship with the limiter. Validation on 1000 out-of-distribution test samples yields an overall classification accuracy of 89.1% in distinguishing between divertor and limiter configurations, with a divertor recall rate of 98.9%. A detailed analysis of the misclassified samples reveals the underlying factors affecting extrapolation performance and further delineates the boundary of the model’s applicability. Finally, performance benchmarks indicate that the proposed solver reduces single-step computation time from tens of seconds to the millisecond level, with a memory footprint of approximately 10.25 MB. This work provides an efficient and interpretable tool for rapid parameter scans and operational window analysis in tokamaks.

Keywords: Grad-Shafranov equation, Kolmogorov-Arnold Networks, physics-informed neural networks, linear extrapolation

DOI: [10.7498/aps.75.20260331](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260331)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260331](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260331)

^{*} Project supported by the National MCF Energy R&D Program of China (Grant No. 2022YFE03090000) and the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12435014).

[†] Corresponding author. E-mail: zxwang@dlut.edu.cn