

一种基于离散二阶忆阻器的 KT_z 神经元模型： 动力学分析与硬件实现*

王梦蛟[†] 廖雨舟

(湘潭大学自动化与电子信息学院, 湘潭 411105)

(2026 年 4 月 14 日收到; 2026 年 4 月 23 日收到修改稿)

相较于一阶忆阻器, 二阶忆阻器具有更优的生物拟态性. 基于此, 本文提出了一种基于离散二阶忆阻器的 KT_z 神经元模型. 该模型通过引入具有双内部状态变量的离散二阶忆阻器, 实现了对 KT_z 神经元自突触反馈机制与外部电磁调制效应的统一建模, 从而增强了模型对复杂神经元放电行为的表征能力. 通过平衡点分析、李雅普诺夫指数谱及分岔图等方法, 系统研究了模型的放电动力学行为. 结果表明, 该模型能够产生周期放电、准周期放电、混沌簇发放电以及超混沌放电等丰富的放电模式, 并展现出状态转迁和吸引子共存等复杂动力学现象. 进一步引入谱熵对模型复杂性进行评估, 并结合 NIST SP 800-22 测试对输出序列随机性进行验证, 结果表明, 该模型生成的混沌序列具有良好的复杂性与统计随机性. 最后, 基于 STM32F407 微控制器构建了数字硬件实现平台, 实现了模型的实时迭代与信号输出. 实验结果与数值仿真具有一致性, 验证了模型的可实现性.

关键词: 离散二阶忆阻器, 离散神经元, 放电模式, 硬件实现**DOI:** 10.7498/aps.75.20260520**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260520

1 引言

人脑是一个高度复杂的非线性动力系统, 内含数十亿个神经元, 并由数百亿个生物突触相互耦合形成庞大的神经网络, 从而实现感觉、学习、记忆及认知等高级功能^[1-3]. 神经元作为神经系统中信息处理与传递的基本单元, 主要通过膜电位的动态变化实现信息的编码与传输, 其放电行为具有显著的非线性动力学特征. 在外部刺激或离子浓度变化等因素作用下, 神经元能够产生尖峰、簇发、周期、准周期和混沌等多种放电模式, 这些多样化的动力学模式构成了神经信息处理的重要基础^[4].

为了揭示神经元放电活动的内在机理, 研究人

员基于电生理实验与电化学理论, 建立了多种数学模型以描述神经元的动力学特性. 经典的 Hodgkin-Huxley (HH) 模型首次实现了对动作电位产生机制的定量刻画, 并揭示了离子通道在神经元兴奋性形成中的关键作用^[5]. 在此基础上, FitzHugh-Nagumo(FHN) 模型^[6]、Hindmarsh-Rose(HR) 模型^[7]和 Hopfield 模型^[8]等连续神经元模型被相继提出, 用于刻画不同尺度下的神经动力学行为. 与此同时, 为满足大规模神经网络仿真对计算效率的需求, Rulkov 模型^[9]、Chialvo 模型^[10]、Izhikevich 模型^[11]和 Kinouchi-Tragtenberg(KT_z) 模型^[12]等离散神经元模型因结构简洁、计算代价较低而受到广泛关注. 近年来, 随着非线性科学、神经动力学和类脑计算研究的不断发展, 神经元系统复杂动力

* 湖南省自然科学基金 (批准号: 2025JJ50391)、湖南省教育厅科学研究基金 (批准号: 24A0124) 和国家自然科学基金 (批准号: 62071411) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: wangmj@xtu.edu.cn

学行为的研究已成为交叉学科领域的重要方向^[13-15]. 研究表明, 神经元系统不仅能够呈现丰富的动力学行为, 其演化过程还会受到电磁环境、突触调制等多种因素的共同影响, 从而进一步改变神经元群体的放电活动及信息处理方式^[16]. 因此, 构建能够综合反映多种生理调控机制并具有丰富动力学特性的神经元模型, 对于深入理解神经信息处理机制及推动类脑系统建模研究具有重要意义. 此外, 随着计算神经科学和神经元电路研究的不断深入, 神经元模型的研究已逐渐从单纯的动力学现象刻画拓展到物理机制解释与电路实现层面. 相关综述指出, 神经元建模过程中应综合考虑膜结构、电磁感应、离子通道特性、能量转换以及标度变换等因素, 从而建立具有明确物理背景的理论模型和等效神经元电路^[17,18]. 这一研究思路不仅有助于深化对神经元复杂放电行为形成机理的理解, 也为忆阻器耦合神经元模型的构建、复杂神经动力学分析及数字硬件实现提供了新的研究视角.

忆阻器是 Chua^[19] 于 1971 年从理论上预言的第四类基本电路元件, 用于描述电荷与磁通之间的非线性关系. 凭借其非线性、非易失性和可塑性等特征, 忆阻器在神经网络、信息安全、非线性电路以及混沌系统等领域展现出广泛的应用潜力^[20-23]. 此外, 忆阻器的电导状态能够随外部刺激动态变化, 这一特性与生物突触的可塑性行为具有高度相似性, 使其成为模拟生物突触的理想器件^[24-26]. 基于上述优势, 忆阻器被广泛引入神经元建模与神经网络研究中, 用于描述突触连接、自反馈调制以及外部电磁作用等机制. 例如, Li 等^[27] 将离散忆阻器引入 Rulkov 神经元模型, 实现了对神经元放电行为的有效调控; Zhou 等^[28] 基于离散忆阻器构建了忆阻 Chialvo 神经模型, 揭示了系统中混沌、超混沌及多稳态等复杂动力学现象; Zhang 等^[29] 提出了双忆阻增强的离散 Hopfield 神经元模型, 使系统产生极端多稳态和超混沌行为, 并拓展了其在随机数生成和图像加密中的应用; 王梦蛟等^[30] 设计了一种复合指数型局部有源忆阻器, 并将其作为忆阻突触耦合到 Hopfield 神经网络中, 研究结果表明该系统具有丰富的动力学行为, 包括多种分岔模式共存、对称与非对称吸引子共存、大范围混沌及簇发振荡等; Wang 等^[31] 构建了一种由忆阻突触耦合的异质神经网络模型, 实现了二维 Hindmarsh-Rose 神经元与三维 Hopfield 神经网络的耦合, 揭

示了系统丰富的稳定放电模式和多稳态行为.

现有忆阻神经元模型大多基于一阶忆阻器构建. 相较于一阶忆阻器, 二阶忆阻器由于具有两个内部状态变量, 因而具备更强的非线性表征能力和更丰富的动态响应特性, 在描述复杂神经调制机制方面展现出独特优势. 近年来, 二阶忆阻器在神经动力学建模中的应用逐渐增多^[32-34], 但相关研究仍相对有限, 特别是在离散二阶忆阻器与神经元模型的耦合以及多机制统一建模方面仍存在不足. 基于上述背景, 本文构建了一种新型离散二阶忆阻器模型, 用于描述突触耦合和外部电磁调制效应, 并将其与 KTz 神经元相耦合, 提出了离散二阶忆阻 KTz 神经元模型, 记为 SOM-KTz (second-order memristor coupled KTz neuron model). 随后, 系统分析了该模型的放电现象与复杂性特征, 并通过谱熵分析和 NIST 随机性测试验证了其输出序列的复杂性与统计随机性. 最后, 基于 STM32 微控制器实现了该模型的数字硬件验证.

本文其余部分安排如下: 第 2 节构建离散二阶忆阻器模型, 并将其引入 KTz 神经元模型中以构建系统模型, 同时进行平衡点分析; 第 3 节讨论参数变化对系统放电行为及复杂动力学特性的影响; 第 4 节结合随机性测试与硬件实验对模型数值结果进行验证; 第 5 节对全文进行总结.

2 离散二阶忆阻耦合 KTz 神经元模型的构建

2.1 离散二阶忆阻模型

在忆阻神经元建模研究中, 现有工作大多集中于一阶忆阻器模型, 而针对二阶忆阻器的研究仍相对较少. 相较于一阶忆阻器, 二阶忆阻器由于具有更高维的内部状态变量, 因此更适合模拟复杂的神经元放电活动^[35]. 为此, 本文构建了一种二阶忆阻器模型, 其数学表达式为

$$\begin{cases} \dot{i} = [a \sin(s) + b \tanh(w)]u, \\ \dot{s} = A[s + \cos(Bw)]u, \\ \dot{w} = cu, \end{cases} \quad (1)$$

式中, u 和 i 分别表示忆阻器两端的电压与电流, s 与 w 为忆阻器的两个内部状态变量. 其中, 状态变量 s 用于描述忆阻器内部记忆状态的演化, 决定器件导通特性的动态变化; 状态变量 w 用于刻画

另一类内部调制效应, 其变化不仅影响忆阻器的瞬时响应, 还通过与 s 的耦合作用反映器件对历史输入的依赖特性. 参数 a, b, c, A 和 B 为忆阻器的控制参数, 其中 A 和 B 为引入的尺度参数, 分别用于调节状态演化强度以及保证三角函数项输入的无量纲性, 在后续数值分析与硬件实现中, 为便于讨论并保持模型形式简洁, 本文取 $A = 1$ 和 $B = 1$. 采用前向欧拉法对 (1) 式所示连续忆阻模型进行离散化, 可得

$$\begin{cases} i_n = [a \sin(s_n) + b \tanh(w_n)]u_n, \\ \Delta s_n = [s_n + \cos(w_n)]u_n \Delta\tau, \\ \Delta w_n = cu_n \Delta\tau. \end{cases} \quad (2)$$

相关研究表明, 由具有物理背景的连续忆阻系统出发, 通过离散化构造离散忆阻映射, 并尽可能保持其主要状态演化机制和耦合结构, 是论证离散模型物理可解释性的一种有效方式 [36]. 本文离散模型 (2) 由连续二阶忆阻模型经前向欧拉方法离散化后, 输入信号 u_n 仍驱动内部状态变量 s_n 和 w_n 发生演化, 内部状态又反过来调制端口电流 i_n , 因此该离散模型仍然保留了忆阻器的记忆效应、状态调制和反馈作用等基本物理特征. (2) 式中, $\Delta\tau$ 表示欧拉离散化中的时间步长, 它反映了连续模型到离散模型转换时的采样间隔. 作为离散化参数, $\Delta\tau$ 不仅影响状态变量的更新幅度, 而且会进一步影响系统平衡点附近的稳定性以及整体动力学行为, 本文后续将详细研究不同 $\Delta\tau$ 对动力学行为的影响. 为便于模型分析, 此处设 $\Delta\tau = 1$, 同时有 $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$, $\Delta w_n = w_{n+1} - w_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 由此可得该二阶忆阻器的离散数学模型为

$$\begin{cases} i_n = [a \sin(s_n) + b \tanh(w_n)]u_n, \\ s_{n+1} = [s_n + \cos(w_n)]u_n \Delta\tau + s_n, \\ w_{n+1} = cu_n \Delta\tau + w_n. \end{cases} \quad (3)$$

通过引入正弦信号 $A \sin(\omega_n)$ 作为忆阻器的输入激励, 可得到其电压-电流关系曲线. 当输入信号角频率固定为 $\omega = 0.3$ 时, 随着幅值 A 的增大, 磁滞回线所围成的面积逐渐增大, 如图 1(a) 所示. 当幅值固定为 $A = 0.3$ 时, 磁滞回线随输入信号角频率的变化情况如图 1(b) 所示, 由图可知, 随着频率的增大, 磁滞回线所围成的面积逐渐减小. 上述结果表明, 该离散二阶忆阻模型在不同输入条件下能够呈现出典型的夹点型磁滞回线特征, 且磁滞回线面积对输入信号的幅值和频率具有明显依赖关系, 反映出该模型具有典型忆阻器的基本动力学特性.

2.2 离散 KTz 神经元模型

KTz 离散神经元模型是一类典型的三维离散映射模型, 具有结构简洁、计算效率高等优点, 已被广泛应用于脉冲神经元动力学行为的研究, 尤其适用于尖峰放电、簇发放电等复杂放电模式的建模与分析 [37]. 该模型由两个快变量和一个慢变量组成, 通过不同时间尺度变量之间的耦合, 可产生丰富的动力学行为. 其数学表达式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \tanh\left(\frac{x_n - Ky_n + z_n + I}{T}\right), \\ y_{n+1} = x_n, \\ z_{n+1} = (1 - \delta)z_n - \varepsilon(x_n - x_R), \end{cases} \quad (4)$$

其中, x_n 表示时刻 n 神经元的膜电位, y_n 为恢复变量, z_n 表示缓慢变化的自适应电流; 参数 K 表示

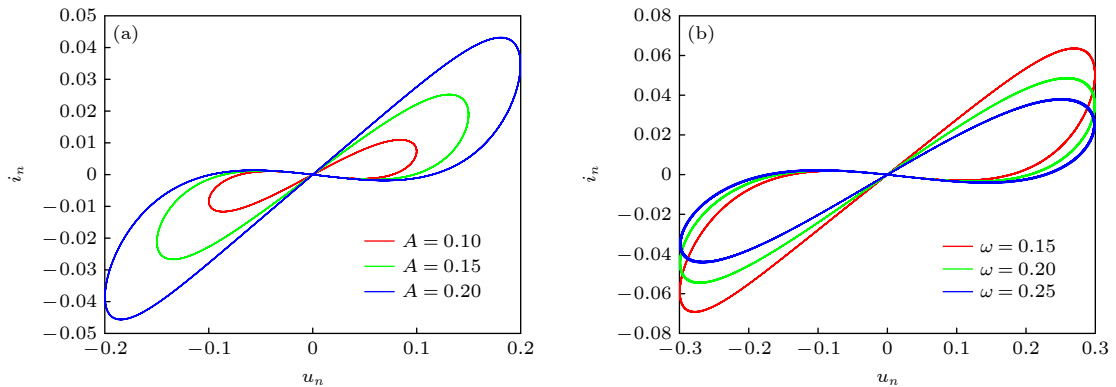


图 1 忆阻器的磁滞回线特性 (a) $\omega = 0.3$ 时不同幅值 $A = 0.1, 0.15, 0.2$; (b) $A = 0.3$ 时不同频率 $\omega = 0.15, 0.2, 0.25$

Fig. 1. Hysteresis loop characteristics of the memristor: (a) Different amplitudes $A = 0.1, 0.15, 0.2$ at $\omega = 0.3$; (b) different frequencies $\omega = 0.15, 0.2, 0.25$ at $A = 0.3$.

恢复变量对膜电位的耦合强度, T 为增益调节参数, δ 为慢变量的衰减系数, ε 表示膜电位对自适应电流的反馈强度, x_R 为参考膜电位, I 为外加电流. 上述参数共同决定了系统的放电行为和动力学特性.

在不同参数条件下, KTz 模型可呈现静息、周期振荡以及复杂放电等多种动力学行为. 图 2 给出了 KTz 神经元膜电位变量 x_n 的时间序列演化结果. 由图可知, 该模型能够较好地刻画多种典型的神经元放电模式. 鉴于 KTz 模型具有良好的动力学可塑性和离散实现优势, 本文将所构建的离散二阶忆阻器引入该模型中, 以研究二阶忆阻调制作用下 KTz 神经元系统的放电行为.

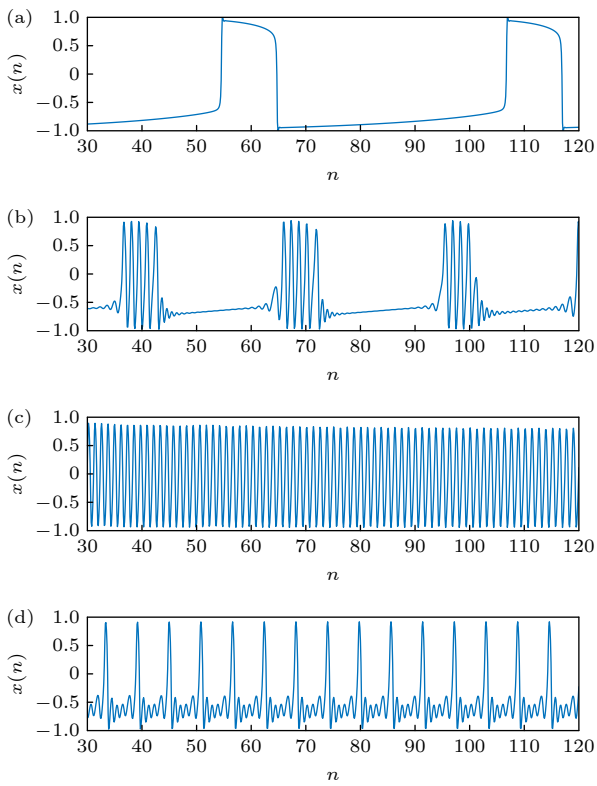


图 2 KTz 神经元放电模式 (a) 平台尖峰放电; (b) 簇发放电; (c) 快速尖峰放电; (d) 规则尖峰放电

Fig. 2. Discharge patterns of the KTz neuron: (a) Plateau spike firing; (b) bursting firing; (c) fast spike firing; (d) regular spike firing.

2.3 离散二阶忆阻耦合 KTz 神经元模型

通过将二阶忆阻器引入 KTz 神经元模型, 实现二阶忆阻器与神经元之间的耦合. 在模型构造中, 将神经元膜电位变量 x_n 作为忆阻器的输入信号. 利用忆阻器的两个内部状态变量 s 和 w 分别表征神经元自反馈调制作用和外部电磁调制效应, 从

而构建一种新型离散二阶忆阻 KTz 神经元模型, 本文称其为 SOM-KTz 模型. 其离散数学表达式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \tanh\left(\frac{x_n - Ky_n + z_n + I}{T}\right) \\ \quad + e[a \sin(s_n) + b \tanh(w_n)]x_n, \\ y_{n+1} = x_n, \\ z_{n+1} = (1 - \delta)z_n - \varepsilon(x_n - x_R), \\ s_{n+1} = [s_n + \cos(w_n)]x_n \Delta\tau + s_n, \\ w_{n+1} = cx_n \Delta\tau + w_n, \end{cases} \quad (5)$$

其中, e 表示忆阻器与 KTz 神经元之间的耦合强度参数, s 和 w 为忆阻器的内部状态变量. 具体而言, s 用于表征神经元自反馈作用对系统演化的调制效应, 而 w 表征外部电磁场作用所诱导的调制效应.

通过引入离散二阶忆阻器, 所构建模型在传统 KTz 神经元动力学框架的基础上, 实现了对神经元自反馈调制与外部电磁作用的统一表征, 从而提升了系统对复杂神经动力学行为的表征能力. 该模型可用于分析自反馈调制和外部电磁作用共同影响下神经元的放电动力学行为, 其结构示意图如图 3 所示.

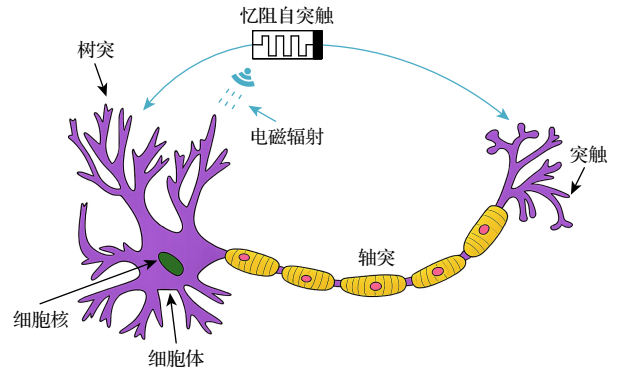


图 3 自反馈调制与外部电磁作用下的 KTz 神经元结构示意图

Fig. 3. Schematic of the KTz neuron under self-feedback modulation and external electromagnetic effect.

2.4 平衡点分析

本节对所提出的 SOM-KTz 模型的平衡点进行分析. 根据离散动力系统的定义, 当系统状态满足 $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = y_n$, $z_{n+1} = z_n$, $s_{n+1} = s_n$, $w_{n+1} = w_n$ 时, 系统处于平衡状态, 设此时不动点集为 $Q^* = (x^*, y^*, z^*, s^*, w^*)$. 令系统各状态变量满足上述条件, 可得 SOM-KTz 模型的平衡点方程如下:

$$\begin{cases} x^* = \tanh\left(\frac{x^* - Ky^* + z^* + I}{T}\right) + e[a \sin(s^*) + b \tanh(w^*)]x^*, & y^* = x^*, \\ z^* = (1 - \delta)z^* - \varepsilon(x^* - x_R), & s^* = [s^* + \cos(w^*)]x^* \Delta\tau + s^*, \quad w^* = cx^* \Delta\tau + w^*. \end{cases} \quad (6)$$

其对应的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} A & B & C & eax^* \cos(s^*) & ebx^* \operatorname{sech}^2(w^*) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \delta & 0 & 0 \\ s^* + \cos(w^*) \Delta\tau & 0 & 0 & 1 + x^* \Delta\tau & -x^* \Delta\tau \sin(w^*) \\ c \Delta\tau & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中, 矩阵中各元素 A , B 和 C 分别表示对变量 x , y 和 z 的偏导数, 具体表达式为

$$\begin{cases} A = \frac{1}{T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^* - Ky^* + z^* + I}{T}\right) + e[a \sin(s^*) + b \tanh(w^*)], \\ B = -\frac{K}{T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^* - Ky^* + z^* + I}{T}\right), \quad C = \frac{1}{T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^* - Ky^* + z^* + I}{T}\right). \end{cases} \quad (8)$$

由 (6) 式可知, 当 $x^* = 0$ 时, SOM-KTz 存在平衡点. 将 $x^* = 0$ 代入 (6) 式, 系统的不动点集可表示为 $Q^* = (0, 0, -I, s^*, w^*)$, 其中 s^* , w^* 可取任意值. 因此, 将平衡点 Q^* 代入 (7) 式, 可得 SOM-KTz 模型在该平衡点处的雅可比矩阵为

$$J(Q^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} + e[a \sin(s^*) + b \tanh(w^*)] & -\frac{K}{T} & \frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \delta & 0 & 0 \\ s^* + \cos(w^*) \Delta\tau & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c \Delta\tau & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

可以看出, 该雅可比矩阵具有块上三角结构, 因此其特征值可由各对角子块分别确定. 其中, 右下角 2×2 对角子块为单位矩阵, 对应的特征值为 $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$, 其余特征值由左上角 3×3 子块决定, 即

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} + e[a \sin(s^*) + b \tanh(w^*)] & -\frac{K}{T} & \frac{1}{T} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \delta \end{bmatrix}. \quad (10)$$

求解矩阵 J_1 的特征值, 可得到对应的特征方程为

$$\begin{aligned} T\lambda^3 - [T(1 - \delta + eG) + 1]\lambda^2 - [TeG(\delta - 1) \\ - K + \delta - \varepsilon - 1]\lambda + K(\delta - 1) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$G = a \sin(s^*) + b \tanh(w^*). \quad (12)$$

由上述分析可知, 系统平衡点的稳定性不仅与

参数 K , δ , ε , T , e , a , b 等有关, 还与内部状态变量 s 和 w 的取值密切相关. 此外, 需要指出的是, 离散步长 $\Delta\tau$ 由欧拉离散过程引入, 一般会显式影响离散系统的状态更新方程及其雅可比矩阵. 然而, 对于本文所得到的平衡点集 $Q^* = (0, 0, -I, s^*, w^*)$, 由于平衡条件强制 $x^* = 0$, 故对应特征值中不再显式含 $\Delta\tau$. 因此, $\Delta\tau$ 对该平衡点集的局部线性特征值没有直接影响, 但仍会影响系统远离平衡点集时的数值迭代过程及全局动力学行为. 为此, 在后续数值分析中仍需进一步考察不同 $\Delta\tau$ 取值对系统动力学行为的影响.

3 SOM-KTz 模型的动力学分析

3.1 离散步长 $\Delta\tau$ 的影响

由于本文模型由连续忆阻器方程经欧拉方法离散化得到, 因此离散步长 $\Delta\tau$ 将对系统状态更新

过程产生直接影响. 为分析离散步长对 SOM-KTz 模型动力学行为的影响, 当固定参数 $K = 0.6$, $I = 0$, $T = 0.35$, $\delta = 0.005$, $\varepsilon = 0.005$, $x_R = -0.5$, $a = 0.18$, $b = 0.03$, $c = 1$, $e = 3$ 时, 初始条件设为 $(x_0, y_0, z_0, s_0, w_0) = (0, 0, 0, 0.1, 0.1)$, $\Delta\tau$ 变化时系统的前 4 个李雅普诺夫指数和不同 $\Delta\tau$ 取值时的膜电位时间序列如图 4 所示. 由图 4(a) 可知, 当 $\Delta\tau$ 较小时, 系统状态演化相对平缓; 当 $\Delta\tau$ 增大时, 李雅普诺夫指数逐渐增大, 系统出现复杂振荡、混沌甚至超混沌行为. 图 4(b)–(d) 分别为 $\Delta\tau = 0.2, 0.5, 1$ 时膜电位的时间序列放电模式. 由图可知, 随着 $\Delta\tau$ 值的增加, 模型的放电模式从准周期放电演化为混沌放电, 说明 $\Delta\tau$ 不仅影响离散系统的稳定性, 还会对神经元放电模式产生调制作用. 综合模型表达的简洁性和动力学现象的丰富性, 本文后续分析均取 $\Delta\tau = 1$.

3.2 耦合强度 e 的影响

在 SOM-KTz 模型中, 耦合强度 e 是表征忆阻器对神经元动力学调制作用的重要参数. 为系统分

析参数 e 对模型动力学行为的影响, 固定系统参数为 $(K, I, T, \delta, \varepsilon, x_R, a, b, c) = (0.6, 0, 0.35, 0.005, 0.005, -0.5, 0.18, 0.03, 1)$, 初始条件为 $(x_0, y_0, z_0, s_0, w_0) = (0, 0, 0, 0.1, 0.1)$, 在此参数设置下, 分析系统随耦合强度 e 变化时的李雅普诺夫指数谱和分岔图, 结果如图 5 所示. 其中, 图 5(a) 给出了当 $e \in (0, 3)$ 时系统的前 4 个李雅普诺夫指数, 图 5(b) 给出了状态变量 x_n 随耦合强度 e 变化的分岔图. 可以看出, 在其余参数保持不变的条件下, 随着耦合强度 e 的增大, 系统逐渐由有序振荡状态演化至混沌状态. 结合李雅普诺夫指数谱与分岔图可知, 在部分参数区间内, 系统表现出最大李雅普诺夫指数接近 0 且分岔点连续分布的特征, 这通常对应于准周期状态.

为进一步分析耦合强度 e 对神经元放电行为的影响, 图 6 给出了在三种典型耦合强度下系统的相图及对应的时间序列演化结果. 其中, 图 6(a)–(c) 为相图, 图 6(d)–(f) 为对应的时间序列放电模式. 由图 6 可见, 当 $e = 0.6$ 时, 相图呈现出规则且光滑的闭合结构, 对应时间序列表现为准周期放电

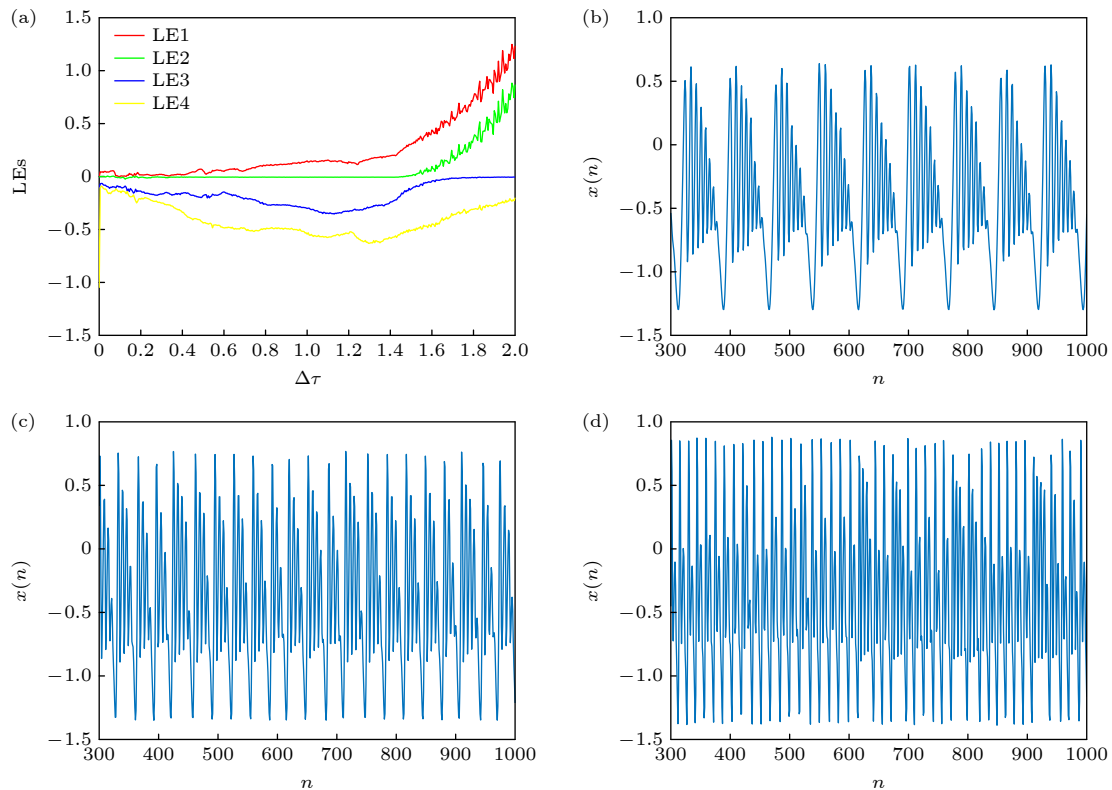


图 4 不同离散步长 $\Delta\tau$ 下 SOM-KTz 模型的动力学行为 (a) 李雅普诺夫指数谱; (b)–(d) 分别为 $\Delta\tau = 0.2, 0.5$ 和 1 时膜电位 x_n 的时间序列放电模式

Fig. 4. Dynamical behaviors of the SOM-KTz model under different discrete time steps $\Delta\tau$: (a) Lyapunov exponent spectrum; (b)–(d) time-series firing patterns of the membrane potential x_n at $\Delta\tau = 0.2, 0.5$, and 1 , respectively.

状态; 当 $e = 0.92$ 时, 相图结构逐渐增厚并出现多层缠绕, 轨迹分布趋于复杂, 对应时间序列出现幅值与周期的调制现象, 系统进入更复杂的准周期振荡状态; 当 $e = 3$ 时, 相图中的吸引子呈现出明显的弥散分布特征, 轨道结构复杂, 对应时间序列表现出明显的非周期性, 说明系统进入典型的混沌放电状态.

上述结果进一步表明, 耦合强度 e 的变化能够有效调控系统的动力学状态, 使其经历由规则放电到准周期放电再到混沌放电的演化过程. 由此可知, 参数 e 是调控 SOM-KTz 模型复杂动力学行为

的重要控制参数.

3.3 忆阻器内部参数 c 的影响

除耦合强度外, 忆阻器的内部参数同样对系统动力学特性具有重要作用. 本小节重点研究离散二阶忆阻器的内部控制参数 c 对耦合神经元系统放电行为的调制作用. 在所提出的模型中, 参数 c 决定了神经元膜电位 x_n 对忆阻器内部状态变量 w_n 演化的驱动强度. 因此, 参数 c 的变化将直接影响忆阻器对神经元动力学行为的调制效果. 为分析参数 c 的影响, 固定系统参数为 $(K, I, T, \delta, \varepsilon, x_R, a, b) =$

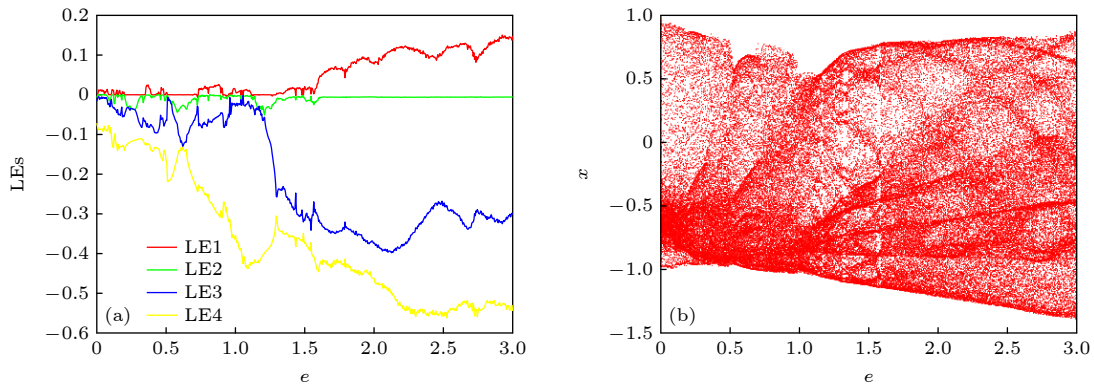


图 5 不同耦合强度 e 下 SOM-KTz 模型的动力学行为 (a) 李雅普诺夫指数谱; (b) 分岔图

Fig. 5. Dynamical behaviors of the SOM-KTz model under different coupling strengths e : (a) Lyapunov exponent spectrum; (b) bifurcation diagram.

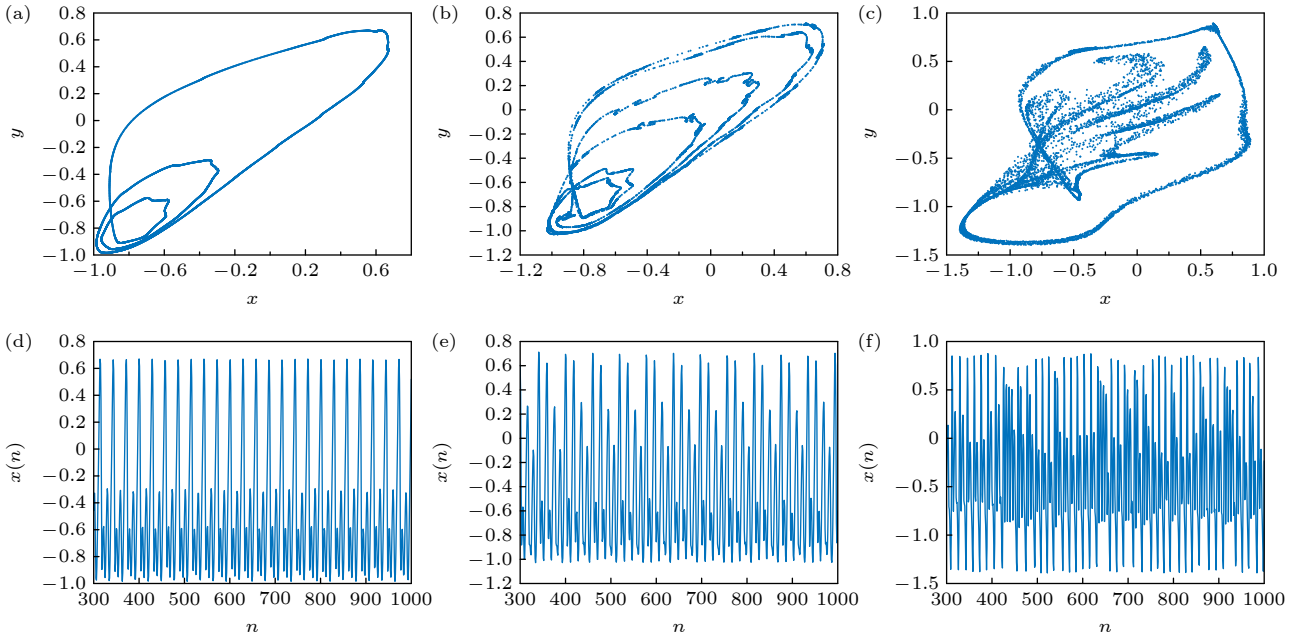


图 6 不同耦合强度 e 下 SOM-KTz 模型的相图与时间序列 (a)–(c) 分别为 $e = 0.6, 0.92, 3$ 时的相图; (d)–(f) 为对应膜电位 x_n 的时间序列放电模式

Fig. 6. Phase portraits and time series of the SOM-KTz model under different coupling strengths e : (a)–(c) Phase portraits at $e = 0.6, 0.92, 3$, respectively; (d)–(f) corresponding firing patterns of the membrane potential x_n in time series.

(0.6, 0, 0.35, 0.005, 0.005, -0.5, 0.18, 0.03), 并取耦合强度 $e = 3$. 当 $c \in (-3, 0)$ 时, 系统的前 4 个李雅普诺夫指数及分岔图如图 7 所示.

由图 7 可见, 随着忆阻器内部参数 c 的变化, 系统动力学行为呈现出复杂的演化过程. 当 c 取较小值时, 系统具有两个正李雅普诺夫指数, 对应超混沌状态; 随着 c 的增大, 在 $c \approx -1.3$ 附近, 系统由超混沌状态转变为混沌状态. 进一步地, 在 $c \in [-0.79, -0.67]$ 区间内, 系统出现多个周期窗口, 表现为周期性放电行为; 当 $c \in (-0.67, -0.27)$ 时, 系统再次进入混沌状态; 而在 $c \in (-0.2, -0.1)$ 区间

内, 系统主要呈现准周期振荡行为. 图 8 给出了典型参数 $c = -2.5, -1, -0.783, -0.2, -0.1, -0.02$ 时对应的相图. 其中, 图 8(a) 对应超混沌吸引子, 轨道结构复杂且呈现明显的弥散分布; 图 8(b) 为混沌吸引子, 轨道呈现不规则缠绕结构; 图 8(c) 表现为周期吸引子, 并收敛为多个离散点; 结合图 7(a) 与图 8(d), 当 $c = -0.2$ 时, 其吸引子表现为准周期并呈现光滑闭合曲线; 图 8(e) 与图 8(f) 为混沌吸引子, 表现出明显的非周期性分布特征.

为进一步验证忆阻参数 c 对神经元放电模式的调控能力, 对应于图 8 中的吸引子结构, 选取

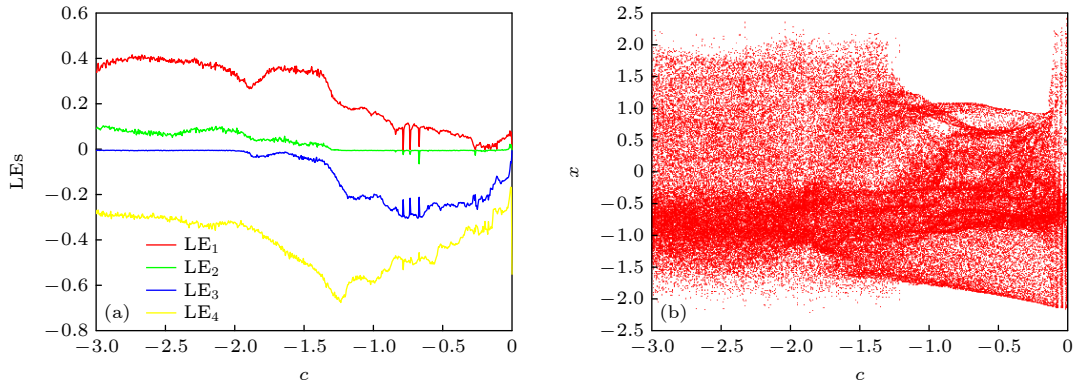


图 7 不同忆阻器控制参数 c 下 SOM-KTz 模型的动力学行为 (a) 李雅普诺夫指数谱; (b) 分岔图

Fig. 7. Dynamical behaviors of the SOM-KTz model under different memristor control parameters c : (a) Lyapunov exponent spectrum; (b) bifurcation diagram.

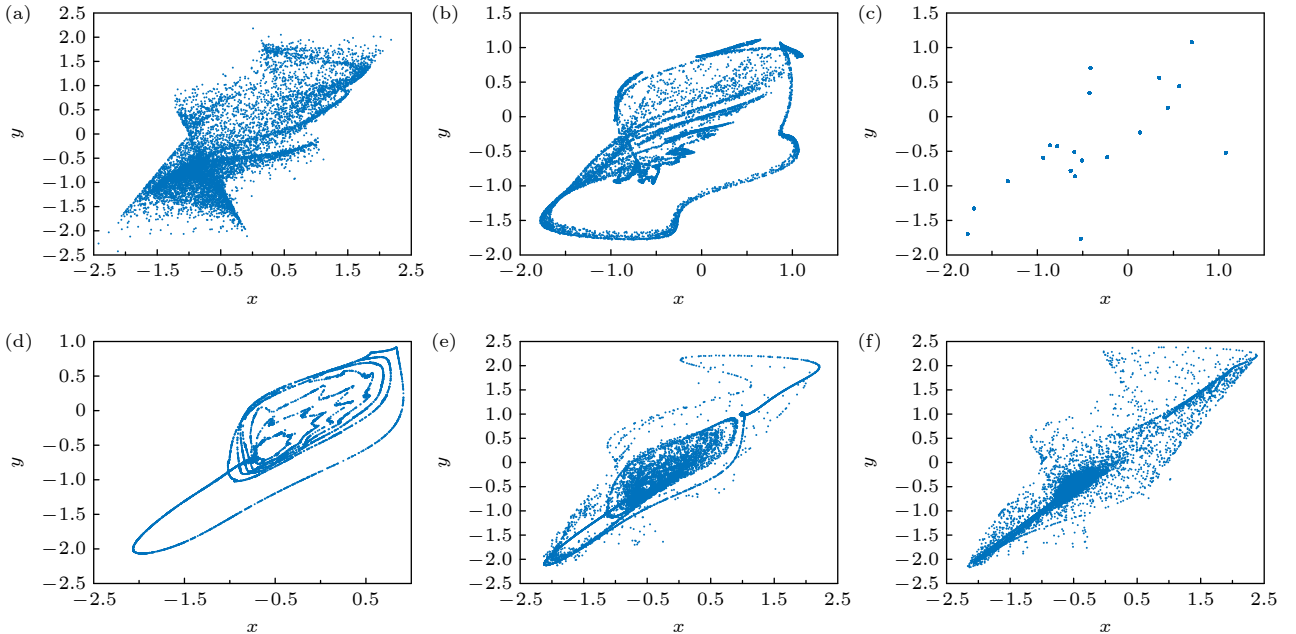


图 8 不同忆阻器控制参数 c 下 SOM-KTz 模型的相平面吸引子 (a)–(f) 分别对应 $c = -2.5, -1, -0.783, -0.2, -0.1$ 和 -0.02 时的吸引子结构

Fig. 8. Phase-plane attractors of the SOM-KTz model under different memristor control parameters c : (a)–(f) correspond to the attractor structures at $c = -2.5, -1, -0.783, -0.2, -0.1$, and -0.02 , respectively.

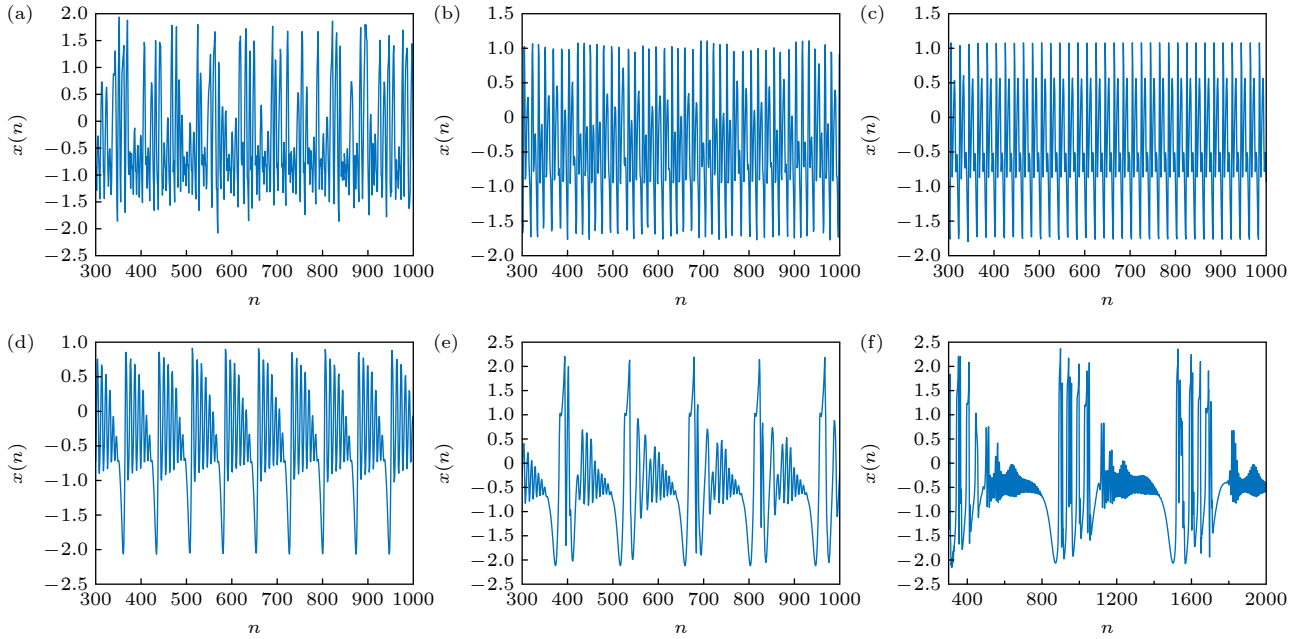


图9 不同忆阻器控制参数 c 下 SOM-KTz 模型的时间序列 (a)–(f) 分别对应 $c = -2.5, -1, -0.783, -0.2, -0.1$ 和 -0.02 时膜电位 x_n 的时间序列放电模式

Fig. 9. Time series of the SOM-KTz model under different memristor control parameters c : (a)–(f) correspond to the firing patterns of the membrane potential x_n in time series at $c = -2.5, -1, -0.783, -0.2, -0.1$, and -0.02 , respectively.

6 个典型参数 c 值进行分析. 其膜电位时间序列放电模式如图 9 所示. 可以看出, 不同参数 c 对应不同类型的神经元放电行为. 当 $c = -2.5$ 时, 系统呈现超混沌放电, 如图 9(a) 所示, 此时前两个李雅普诺夫指数为 $LE_1 = 0.41$, $LE_2 = 0.1$; 当 $c = -1$ 时, 系统表现为混沌放电, 如图 9(b) 所示, 对应 $LE_1 = 0.16$, $LE_2 \approx 0$; 当 $c = -0.783$ 时, 系统呈现周期放电, 如图 9(c) 所示; 当 $c = -0.2$ 时, 系统表现为准周期放电, 如图 9(d) 所示; 当 $c = -0.1$ 和 $c = -0.02$ 时, 系统分别呈现两种不同特征的混沌簇发放电模式, 如图 9(e) 和图 9(f) 所示.

综上, 忆阻器控制参数 c 能够对 SOM-KTz 模型的放电模式进行调控, 使系统呈现超混沌、混沌、准周期和周期等不同动力学状态, 并对应产生多样化的放电模式, 这表明参数 c 是影响系统复杂动力学行为的重要内部调制参数.

3.4 吸引子共存

参数固定 $K=0.9$, $I=0.04$, $T=0.4$, $\delta=0.08$, $\varepsilon=0.004$, $x_R=-0.8$, $a=0.18$, $b=0.03$, $c=1$ 的条件下, 系统在较大耦合强度 e 区间内呈现出明显的吸引子共存现象. 为揭示该现象对初始条件的依赖性, 选取两组不同初始值 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 和

$(-0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5)$ 分别以红色和蓝色进行标识, 所得结果如图 10 所示. 由图 10(a) 可见, 在较宽参数区间内, 系统的分岔结构对初始条件具有明显依赖性, 表明系统存在显著的多稳态特征. 进一步地, 图 10(b)–(d) 给出了相同参数条件下不同类型吸引子的共存情形, 例如, 当 $e = 1.5$ 时, 系统呈现周期-6 吸引子与准周期吸引子的共存; 当 $e = 3.2$ 时, 系统表现为周期-5 吸引子与周期-4 吸引子的共存; 当 $e = 3.5$ 时, 系统则呈现混沌吸引子与周期-4 吸引子的共存状态.

为进一步说明不同共存吸引子对应的放电模式, 图 11 给出了相应参数条件下的膜电位时间序列. 由图可知, 不同吸引子对应的时间序列在周期结构和波形特征上存在明显差异, 说明系统在相同参数条件下表现出显著的初始条件依赖性.

上述结果表明, 在较大耦合强度 e 区间内, 系统可呈现丰富的复杂动力学行为, 不仅能够产生混沌放电, 还会出现不同周期、准周期与混沌放电之间的共存现象. 该吸引子共存行为及其对初始条件的显著依赖性表明, 二阶忆阻反馈机制在调控神经元放电模式选择和多稳态形成过程中起着重要作用.

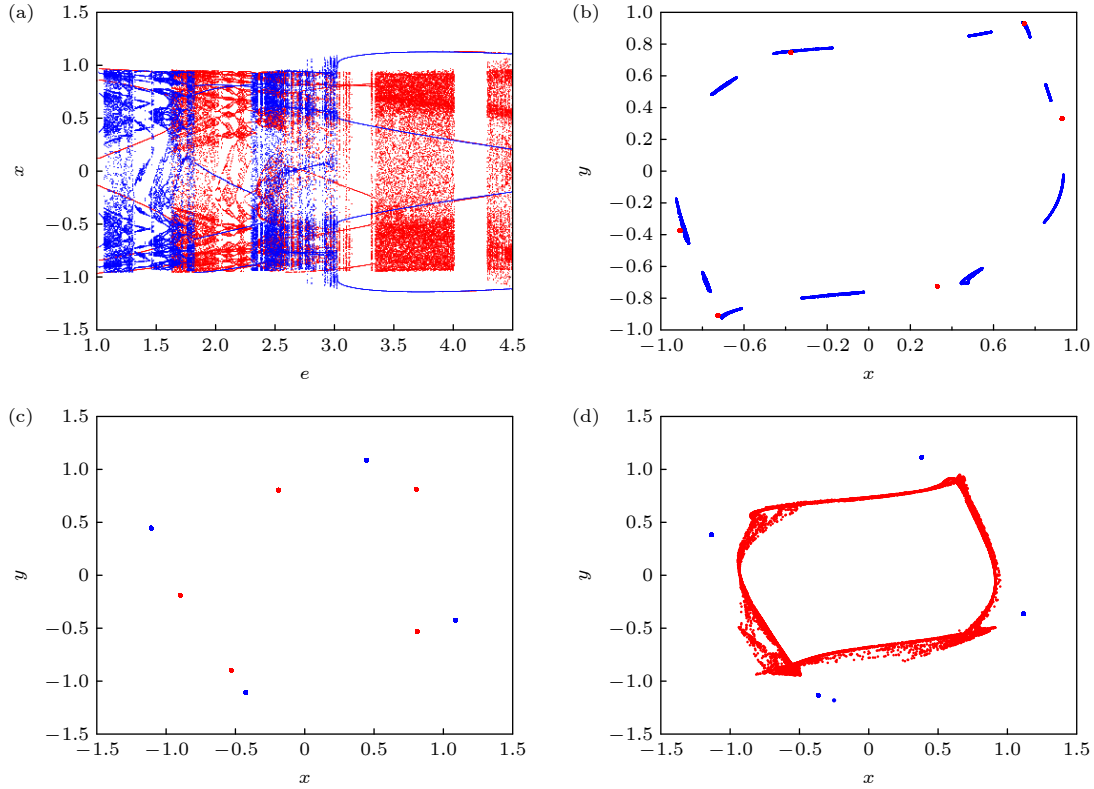


图 10 吸引子共存现象分岔图及相图 (a) 不同初始条件下参数 e 变化的分岔图; (b) 当 $e = 1.5$ 时周期-6 吸引子与准周期吸引子共存; (c) 当 $e = 3.2$ 时周期-5 吸引子与周期-4 吸引子共存; (d) 当 $e = 3.5$ 时混沌吸引子与周期-4 吸引子共存

Fig. 10. Bifurcation diagram and phase portraits of coexisting attractors: (a) Bifurcation diagram versus parameter e under different initial conditions; (b) coexistence of a period-6 attractor and a quasiperiodic attractor at $e = 1.5$; (c) coexistence of a period-5 attractor and a period-4 attractor at $e = 3.2$; (d) coexistence of a chaotic attractor and a period-4 attractor at $e = 3.5$.

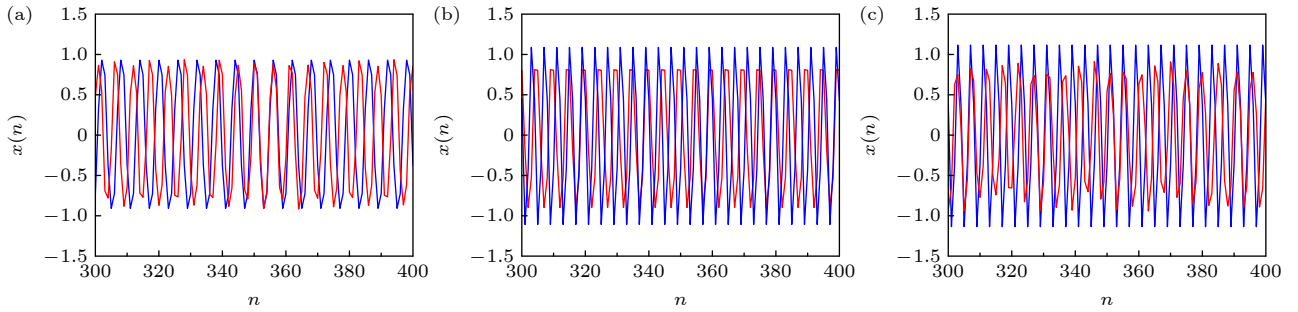


图 11 不同参数条件下膜电位 x_n 的共存放电行为 (a) $e = 1.5$ 时周期与准周期放电行为共存; (b) $e = 3.2$ 时周期放电行为共存; (c) $e = 3.5$ 时混沌与周期放电共存

Fig. 11. Coexisting firing behaviors of the membrane potential x_n under different parameter conditions: (a) Coexistence of periodic and quasiperiodic firing behaviors at $e = 1.5$; (b) coexistence of periodic firing behaviors at $e = 3.2$; (c) coexistence of chaotic and periodic firing behaviors at $e = 3.5$.

3.5 状态转迁

状态转迁是指在系统参数和初始条件保持不变的情况下, 系统轨道在长时间演化过程中由一种动力学状态自发转变为另一种动力学状态. 通常, 这种现象被视为一种特殊的放电模式. 本小节通过研究 SOM-KTz 模型, 发现当初始值固定为 $(x_0, y_0,$

$z_0, s_0, w_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 时, 系统可呈现两种不同类型的状态转迁现象, 如图 12 所示.

首先, 固定参数 $K = 0.6$, $I = 0$, $T = 0.25$, $\delta = 0.001$, $\varepsilon = 0.001$, $x_R = -0.5$, $a = 0.3$, $b = 0.2$, $c = 0.3$, $e = -2$. 此时, SOM-KTz 模型表现出由准周期态到超混沌态的状态转迁. 其对应的放电模式和吸引子转变如图 12(a) 所示.

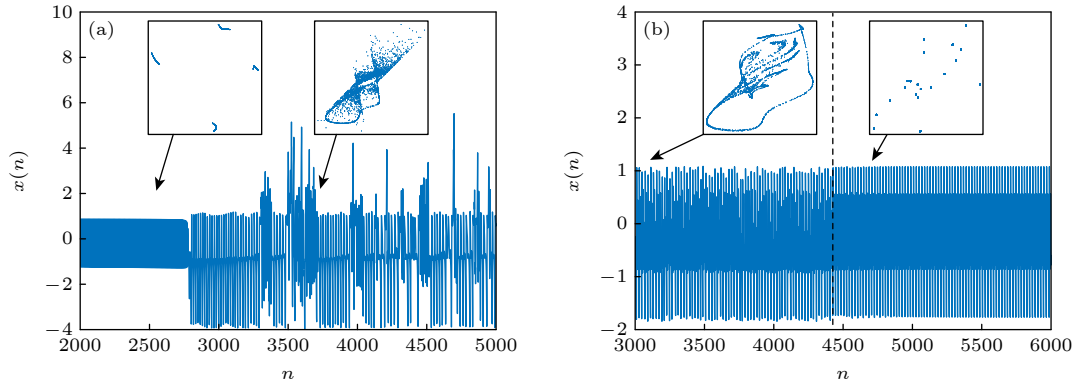


图 12 SOM-KTz 模型的状态转迁行为 (a) 由准周期振荡向超混沌状态转迁; (b) 由混沌状态向周期状态转迁

Fig. 12. State transition behaviors of the SOM-KTz model: (a) Transition from quasiperiodic oscillation to hyperchaotic state; (b) transition from chaotic state to periodic state.

进一步地, 取参数 $K = 0.6$, $I = 0$, $T = 0.35$, $\delta = 0.005$, $\varepsilon = 0.005$, $x_R = -0.5$, $a = 0.18$, $b = 0.03$, $c = -0.783$, $e = 3$. 此时, SOM-KTz 模型表现出由混沌态到周期态的状态转迁. 对应的放电模式和吸引子转变如图 12(b) 所示.

图 12 中主图给出了膜电位变量 x_n 的时间序列演化过程, 插图则展示了状态转迁前后对应的吸引子结构. 由图可见, 在参数和初始条件保持不变时, 系统仍可随演化时间推进发生明显的动力学状态切换, 表明 SOM-KTz 模型具有复杂的非平稳动力学特征. 该现象为研究神经元系统中时变放电行为和复杂动力学演化提供了参考.

3.6 复杂性分析

为从频域角度定量评估所提出的 SOM-KTz 模型的动力学复杂性及输出序列的随机性特征, 本文引入谱熵作为评价指标. 谱熵基于快速傅里叶变换与 Shannon 信息熵, 通过刻画离散时间序列功率谱能量分布的均匀程度来反映系统输出的复杂程度. 图 13 给出了不同参数条件下模型的谱熵分布结果. 由图 13(a) 和图 13(b) 可知, 在较大参数范围内, 系统谱熵保持在较高水平, 仅在局部区域出现较低值. 图 13(c) 和图 13(d) 所示三维谱熵分布进一步表明, 模型输出在大部分参数区间内均具有较高复杂性. 特别地, 当谱熵接近于 1 时, 说明序列功率谱分布较为均匀, 系统输出表现出更强的不规则性和类随机特征. 由此可见, SOM-KTz 模型能够在较宽参数范围内产生高复杂度混沌序列, 在信息安全等应用场景中具有一定的潜在应用价值.

4 NIST 测试及硬件实现

4.1 NIST 测试

NIST SP 800-22 是一种被广泛认可的伪随机数序列统计测试标准, 用于检验序列是否具备满足信息安全应用要求的统计随机性. 该测试套件包含 15 类随机性检验, 是目前国际上评估伪随机数发生器随机性能的重要标准之一. 在本研究中, 基于所提出的 SOM-KTz 模型生成混沌序列. 系统初始条件设为 $(x_0, y_0, z_0, s_0, w_0) = (0, 0, 0, 0.1, 0.1)$, 参数取值为 $(K, I, T, \delta, \varepsilon, x_R, a, b, c, e) = (0.6, 0, 0.35, 0.005, 0.005, -0.5, 0.18, 0.03, 1, 3)$, 在此条件下生成神经元膜电位序列 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$. 选取神经元膜电位变量 x_n 的离散序列, 并依据 IEEE 754 浮点数标准将每个样本表示为 32 位二进制数据, 记为 $X_B(n)$. 随后, 从每个 32 位数据中提取第 25 至第 32 位比特, 构成伪随机序列, 其数学表达式为

$$P_i = (X_B(n))_{25:32}. \quad (13)$$

为评估所生成的伪随机序列的随机性, 将该序列输入 NIST 测试套件进行检验. 根据 NIST 标准, 各项统计检验以 P 值作为判定依据. 当 $P \geq 0.01$ 且通过率满足相应标准要求时, 可认为该序列通过相应的随机性检验. 在具体测试中, 生成的伪随机二进制序列总长度为 10^6 bit, 并按照 NIST 测试要求划分为 100 组样本进行统计检验. 表 1 中给出的 P 值和通过率均基于上述测试设置得到, 其中通过率表示通过对应随机性检验的样本数占总测试样本数的比例. 具体的 15 项测试结果如表 1 所列.

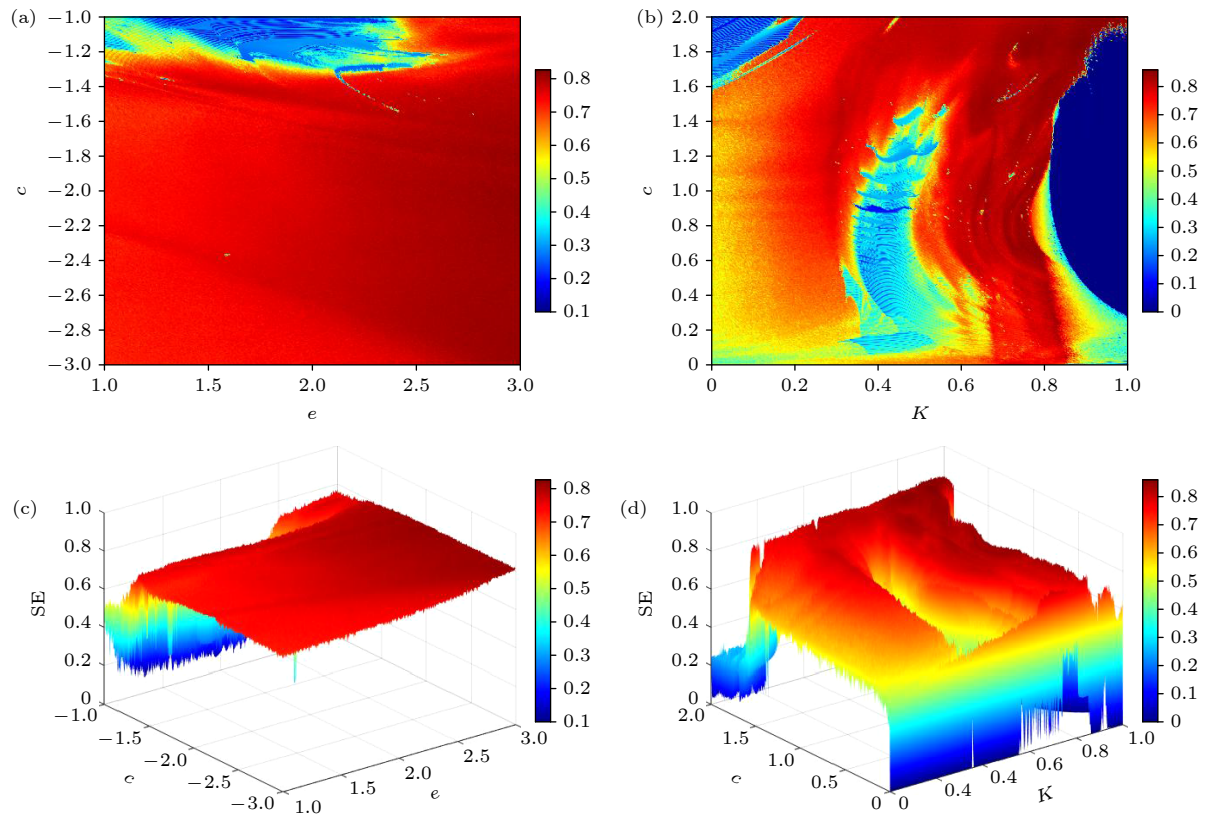


图 13 SOM-KTz 模型的谱熵分布 (a) e - c 平面谱熵分布图; (b) K - c 平面谱熵分布图; (c)–(d) 为对应的三维谱熵分布图
Fig. 13. Spectral entropy distributions of the SOM-KTz model: (a) Spectral entropy distribution on the e - c plane; (b) spectral entropy distribution on the K - c plane; (c)–(d) corresponding three-dimensional spectral entropy distributions.

表 1 NIST 测试			
Table 1. Results of the NIST tests.			
编号	测试项	P 值	通过率
01	频率	0.0966	1.00
02	块内频率	0.2248	1.00
03	累计和(F)	0.0146	1.00
	累计和(R)	0.7399	1.00
04	游程	0.2368	1.00
05	最长游程	0.0669	0.99
06	二元矩阵秩	0.6993	0.98
07	离散傅里叶变换	0.5141	1.00
08	非重叠模块匹配*	0.7598	0.96
09	重叠模块匹配	0.6579	1.00
10	通用统计	0.2248	1.00
11	近似熵	0.2622	1.00
12	随机游程*	0.7231	0.97
13	随机游程频数*	0.4220	0.97
14	序列(1st)	0.7399	1.00
	序列(2nd)	0.5341	1.00
15	线性复杂度	0.0712	1.00

注: 非重叠模块匹配、随机游程和随机游程频数分别包含 148, 8, 18 个子测试, 报告中展示其最差结果.

4.2 硬件实现

为验证 SOM-KTz 模型在实际电路中的可实现性及其动力学行为的实验可验证性, 本文搭建了一套基于 STM32 微控制器的数字硬件实验平台. 在硬件配置方面, 平台核心控制器采用 STM32 F407ZGT6 微控制器, 其主频为 168 MHz, 具备较强的浮点运算能力, 能够满足离散模型实时迭代计算的需求. 数模转换部分采用 AD5689 双通道数模转换器, 该器件具有 16 位分辨率, 可实现两个状态变量的同步模拟电压输出. 实验过程中, 微控制器按照预设模型参数和初始条件完成状态变量更新, 通过 SPI 接口将迭代结果传输至 AD5689,

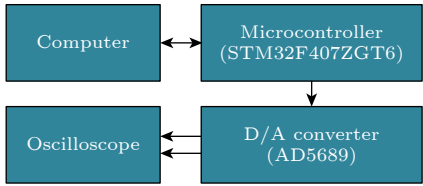


图 14 基于微控制器的硬件实验平台的系统框图
Fig. 14. System block diagram of the microcontroller-based hardware experimental platform.

再经示波器对双通道输出信号进行实时观测与采集. 上述硬件配置能够较好支持 SOM-KTz 模型的数字实现与动力学特征重构. 图 14 展示了所设计硬件平台的系统框图, 图 15 给出了实际搭建的硬件实验平台的实物图.

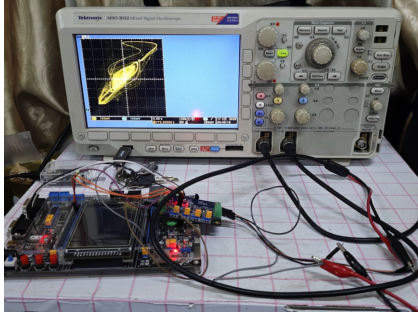


图 15 基于微控制器的硬件平台实物图
Fig. 15. Photograph of the microcontroller-based hardware platform.

图 16 给出了示波器采集到的系统吸引子相图. 选取图 8(b)、图 8(d) 和图 8(e) 中对应的典型吸引子, 在硬件实现平台上进行实验测量, 所得结果分别如图 16(a)–(f) 所示. 对比可见, 硬件实验所得吸引子相图与数值仿真结果在整体结构和演化趋势上吻合较好, 说明所构建的数字硬件平台能够较为准确地实现模型动力学行为的重构. 由此验证了 SOM-KTz 模型的硬件实现可行性及其实验

结果的可重复性. 这表明所提模型的主要动力学特征能够通过数字硬件平台有效再现, 从而为其在混沌信号生成及相关工程应用中的实现奠定了实验基础.

5 结 论

本文提出了一种基于离散二阶忆阻器的 KTz 神经元模型, 通过引入具有双内部状态变量的忆阻器, 实现了对神经元自反馈调制与外部电磁调制作用的统一描述, 从而增强了模型对复杂神经动力学行为的表征能力.

首先, 结合平衡点分析、李雅普诺夫指数谱、分岔图和相图, 系统研究了离散步长 $\Delta\tau$ 、耦合强度 e 和忆阻器内部参数 c 对模型动力学行为的影响. 结果表明, 该模型能够产生丰富的放电模式, 包括周期放电、准周期放电、混沌簇发放电和超混沌放电等. 此外, 模型还表现出明显的吸引子共存现象以及两类不同的状态变迁现象, 说明该模型具有较强的初值敏感性和复杂的非平稳动力学特征. 进一步地, 结合谱熵分析和 NIST 随机性测试, 验证了模型输出序列具有较高复杂性和较好的统计随机性. 最后, 基于 STM32F407 微控制器搭建了一套数字硬件实验平台, 对所提出模型进行了实验验证. 结果表明, 硬件实验结果与数值仿真结果吻合

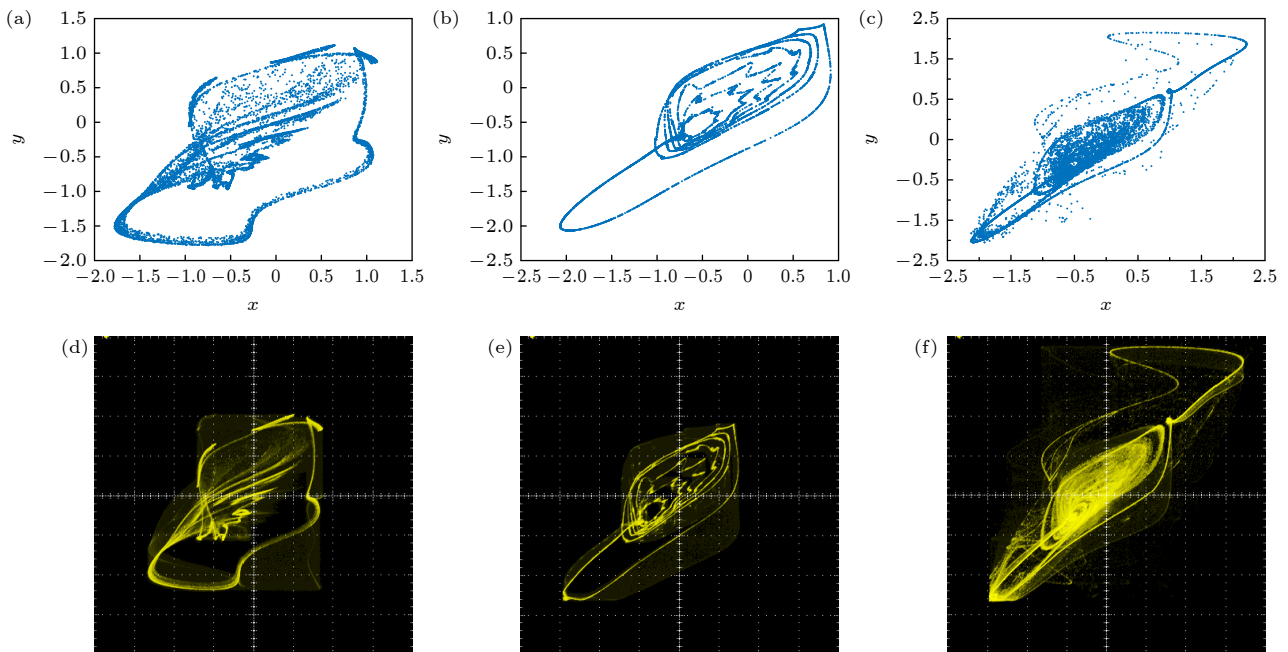


图 16 吸引子相图及相应的硬件实验结果
Fig. 16. Attractor phase portraits and corresponding hardware experimental results.

较好, 说明该模型具有良好的硬件实现可行性. 综上所述, SOM-KTz 模型在复杂神经动力学建模、混沌序列生成及相关工程应用方面具有一定研究价值.

参考文献

- [1] Shang C X, Sun K H, Wang H H, Yao Z, He S B 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 20347
- [2] Lin H R, Wang C H, Deng Q L, Xu C, Deng Z K, Zhou C 2021 *Nonlinear Dyn.* **106** 959
- [3] Sun J W, Zhai Y, Liu P, Wang Y F 2024 *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Regul. Pap.* **71** 3514
- [4] Touboul J 2008 *SIAM J. Appl. Math.* **68** 1045
- [5] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
- [6] Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S 1962 *Proc. IRE* **50** 2061
- [7] Hindmarsh J L, Rose R M 1982 *Nature* **296** 162
- [8] Hopfield J J 1984 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **81** 3088
- [9] Rulkov N F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041922
- [10] Chialvo D R 1995 *Chaos Solitons Fractals* **5** 461
- [11] Izhikevich E M, Hoppensteadt F 2004 *Int. J. Bifurcation Chaos* **14** 3847
- [12] Kinouchi O, Tragtenberg M H R 1996 *Int. J. Bifurcation Chaos* **6** 2343
- [13] Lai Q, Qin M H 2025 *J. Electron. Inf. Technol.* **47** 3262 (in Chinese) [赖强, 秦铭宏 2025 电子与信息学报 **47** 3262]
- [14] Chua L, Sbitnev V, Kim H 2012 *Int. J. Bifurcation Chaos* **22** 1230011
- [15] Rajagopal K, Panahi S, Chen M, Jafari S, Bao B C 2021 *Fractals* **29** 2140030
- [16] Wang X, Du J R, Li Z J, Ma M L, Li C L 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 110503 (in Chinese) [王璇, 杜健嵘, 李志军, 马铭磷, 李春来 2024 物理学报 **73** 110503]
- [17] Ma J 2026 *J. Lanzhou Univ. Technol.* **52** 165 (in Chinese) [马军 2026 兰州理工大学学报 **52** 165]
- [18] Ma J 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 25365
- [19] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** 507
- [20] Yang J J, Strukov D B, Stewart D R 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 13
- [21] Guler H 2022 *Phys. Scr.* **97** 055212
- [22] Wang M J, Gu L F 2024 *Chin. Phys. B* **33** 020504
- [23] Wang M J, Zou Y, Li Z J 2025 *Chaos Solitons Fractals* **190** 115740
- [24] Zhou L L, Lin H, Tan F 2023 *Chaos Solitons Fractals* **173** 113643
- [25] Xu Q, Wang Y T, Chen B, Li Z, Wang N 2023 *Chaos Solitons Fractals* **172** 113627
- [26] Guo H M, Liang Y, Dong Y J, Wang G Y 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 070501 (in Chinese) [郭慧朦, 梁燕, 董玉姣, 王光义 2023 物理学报 **72** 070501]
- [27] Li Y X, Li C B, Lei T F, Yang Y, Chen G R 2024 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **71** 9569
- [28] Zhou X H, Sun K H, Wang H H, Yao Z 2024 *Nonlinear Dyn.* **112** 9547
- [29] Zhang S H, Ma P, Zhang H L, Lin H R, Wang C 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 2667
- [30] Wang M J, Yang C, He S B, Li Z J 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 130501 (in Chinese) [王梦蛟, 杨琛, 贺少波, 李志军 2024 物理学报 **73** 130501]
- [31] Wang M J, Peng J W, Zhang X N, Iu H H C, Li Z J 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 15397
- [32] Mao Y D, Dong Y J, Lu Z Z, Xiang C Y, Wang J Q, Liang Y 2025 *Chaos Solitons Fractals* **195** 116279
- [33] Mou J, Cai C, Gao S, Zhou N R, Zhang Y S 2025 *IEEE Internet Things J.* **12** 43470
- [34] Li Y X, Jiang F 2024 *Chin. J. Phys.* **89** 1102
- [35] Han Z T, Sun B, Banerjee S, Mou J 2024 *Chaos Solitons Fractals* **184** 115020
- [36] Lei Z, Ma J 2025 *Chaos* **35** 023158
- [37] Kuva S M, Lima G F, Kinouchi O, Tragtenberg M H R, Roque-da-Silva A C 2001 *Neurocomputing* **38** 255

A KTz neuron model based on a discrete second-order memristor: dynamical analysis and hardware implementation^{*}

WANG Mengjiao[†] LIAO Yuzhou

(School of Automation and Electronic Information, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

(Received 14 April 2026; revised manuscript received 23 April 2026)

Abstract

Compared with first-order memristors, second-order memristors exhibit better bio-inspired characteristics due to their possession of two internal state variables and can describe more complex nonlinear modulation effects. Motivated by this advantage, this work proposes a KTz neuron model based on a discrete second-order memristor. By introducing a discrete second-order memristor with dual internal state variables into the KTz neuron, the proposed model achieves a unified description of the autaptic feedback mechanism and the external electromagnetic modulation effect, thus enhancing its capability to characterize complex neuronal firing behaviors. The firing dynamics of the model are systematically investigated by means of equilibrium-point analysis, Lyapunov exponent spectra, bifurcation diagrams, phase portraits, and time-series analysis. The experimental results show that the proposed model can generate abundant firing patterns, including periodic firing, quasiperiodic firing, chaotic bursting firing, and hyperchaotic firing, and can also exhibit rich nonlinear dynamical phenomena such as state transition and coexisting attractors. These results also indicate that the model is highly sensitive to parameters and initial conditions, as well as complex nonstationary dynamical characteristics. To further evaluate the complexity of the proposed system, spectral entropy is introduced to measure the irregularity and complexity of the generated sequences from the frequency-domain perspective. Meanwhile, the statistical randomness of the output sequences is verified by the NIST SP 800-22 test suite. The experimental results demonstrate that the chaotic sequences generated by the proposed model possess good complexity and satisfactory statistical randomness. Finally, a digital hardware implementation platform based on the STM32F407 microcontroller is constructed to realize real-time iterative computation and signal output of the model. The experimental results obtained from the hardware platform are in good agreement with the numerical simulations, which verifies the feasibility of the proposed model. These results suggest that the model has potential application value in complex neuronal dynamical modeling, chaotic sequence generation, and related engineering implementations.

Keywords: discrete second-order memristor, discrete neuron, firing pattern, hardware implementation

DOI: [10.7498/aps.75.20260520](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260520)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260520](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260520)

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 2025JJ50391), the Research Foundation of Education Department of Hunan Province, China (Grant No. 24A0124), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62071411).

[†] Corresponding author. E-mail: wangmj@xtu.edu.cn

一种基于离散二阶忆阻器的KTz神经元模型：动力学分析与硬件实现

王梦蛟 廖雨舟

A KTz neuron model based on a discrete second-order memristor: dynamical analysis and hardware implementation

WANG Mengjiao LIAO Yuzhou

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 170002 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260520

CSTR: 32037.14.aps.75.20260520

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260520>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

蔡氏结型忆阻器的简化及其神经元电路的硬件实现

Simplification of Chua corsage memristor and hardware implementation of its neuron circuit

物理学报. 2023, 72(7): 070501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222013>

N型局部有源忆阻器的神经形态行为

Neuromorphic behaviors of N-type locally-active memristor

物理学报. 2022, 71(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212017>

分数阶忆阻耦合异质神经元的多稳态及硬件实现

Multistability of fractional-order memristor-coupled heterogeneous neurons and its hardware realization

物理学报. 2022, 71(23): 230501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221525>

新型忆阻耦合异质神经元的放电模式和预定义时间混沌同步

Firing modes and predefined-time chaos synchronization of novel memristor-coupled heterogeneous neuron

物理学报. 2024, 73(17): 170502 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240872>

串扰忆阻突触异质离散神经网络的共存放电与同步行为

Coexisting discharge and synchronization of heterogeneous discrete neural network with crosstalk memristor synapses

物理学报. 2024, 73(11): 110503 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231972>

面向神经形态感知和计算的柔性忆阻器基脉冲神经元

Flexible memristive spiking neuron for neuromorphic sensing and computing

物理学报. 2022, 71(14): 148503 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212323>