

空间囚徒困境中迁移感知半径与博弈交互半径的变化对合作演化的影响*

张岚¹⁾ 黄昌巍²⁾³⁾ 李相宜^{4)5)†}

1) (西安财经大学信息学院, 西安 710100)

2) (广西大学计算机与电子信息学院, 南宁 530004)

3) (广西大学, 广西多媒体通信与网络技术重点实验室, 南宁 530004)

4) (伯尔尼大学, 生态与进化研究所, 伯尔尼 3012, 瑞士)

5) (康斯坦茨大学生物系, 康斯坦茨 78464, 德国)

(2026 年 4 月 20 日收到; 2026 年 5 月 21 日收到修改稿)

在自然界与人类社会中, 个体的空间移动决策与博弈交互半径往往受到不同机制的支配. 本文将迁移感知半径与博弈交互半径作为两个相互独立的参数, 构建了可连续迁移的囚徒困境模型, 系统研究了二者的变化对合作演化的影响机制. 研究发现, 迁移感知半径对合作水平具有非单调的调控作用: 感知半径过小时, 个体迁移缺乏方向性引导, 合作者难以有效聚集; 感知半径处于特定中间值时, 背叛者能够高效追踪并瓦解合作者的局部聚集, 导致合作水平出现明显谷值; 而当感知半径增大至适中水平后, 合作者得以实现定向聚集, 建立起稳定的结构性防护, 合作水平因此大幅提升; 感知半径继续增大则因大量背叛者跟随而导致合作再度衰退. 进一步研究表明, 迁移步长, 背叛诱惑参数与博弈交互半径均会对上述规律产生一定影响. 此外, 群体密度对合作演化的影响则呈现单峰结构, 低密度下大感知半径对合作的促进效果尤为突出, 高密度则普遍抑制合作. 本文结果为理解现实复杂系统中个体移动行为促进合作涌现的内在机制提供了新的理论视角.

关键词: 空间囚徒困境, 合作演化, 迁移感知半径, 博弈交互半径, 二维连续平面

DOI: 10.7498/aps.75.20260559

CSTR: 32037.14.aps.75.20260559

1 引言

合作行为的涌现与维持是生物演化与人类社会中的核心科学问题之一^[1]. 自达尔文进化论提出以来^[2], 如何在自然选择框架下解释个体之间的合作行为, 始终是生物学^[3]、社会学^[4]、经济学^[5]等多学科交叉研究的重要课题. 囚徒困境博弈作为研究合作演化的经典范式, 揭示了个体理性与集体利益之间的根本冲突: 每个个体都有动机选择背叛以最大化自身收益, 但若所有个体均选择背叛, 则整体

收益远低于全体合作的情形^[6,7]. 这一合作困境促使研究者不断探索合作行为得以涌现和维持的多种机制^[8]. 传统理论认为, 在无限大且均匀混合的种群中, 背叛者将不可避免地占据主导地位^[9]; 然而, 现实世界中从微生物群体到人类社会, 合作行为无处不在, 这一理论与现实的差距推动了空间结构、网络拓扑、群体选择、间接互惠等机制的提出与发展^[10-12].

空间结构的引入为合作演化研究带来了革命性的突破. Nowak 和 May^[10] 开创性的研究表明, 在二维网格上进行的空间囚徒困境博弈中, 合作者可

* 陕西省社会科学基金 (批准号: 2022M005)、国家自然科学基金 (批准号: 12565005)、瑞士国家科学基金会项目 (批准号: 211549) 和国家留学基金管理委员会 (批准号: 202508610167) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiangyi.li.richter@unibe.ch

以通过局部聚集来抵御背叛者的入侵,这一现象被称为“空间互惠”. 后续研究进一步揭示了空间结构对合作行为的促进作用,并探讨了不同网络拓扑、更新规则、噪声条件等因素对合作演化的影响^[13-15]. 研究表明,无标度网络上的度异质性、聚类特性等结构特征对合作演化具有重要影响^[11,16],而策略更新规则“模仿最优邻居”也在空间博弈中起着关键作用^[14]. 然而,传统空间博弈模型通常假设个体的相互作用范围是固定的,且个体在空间中的位置是静态的. 这种静态假设虽然简化了模型分析,却忽略了现实系统中个体移动性的重要作用. 事实上,在许多生物和社会系统中,个体并非静止不动,而是具有不同程度的移动能力^[14,17-19],这种移动性可能显著改变空间互惠的形成与维持条件.

个体迁移行为对合作演化的影响近年来逐渐受到关注. 研究表明,个体的移动策略——包括迁移方向、迁移速度、迁移概率等,可以显著影响合作水平的演化轨迹. Vainstein 等^[20]发现,适度的个体迁移可以促进合作,而过于频繁的迁移行为则会破坏合作团簇. Helbing 等^[21]的研究表明,成功驱动的个体在噪声条件下的迁移行为能够引发合作的爆发式涌现. 在众多影响迁移行为的因素中,个体如何感知环境并据此调整移动方向尤为关键. 当个体倾向于向合作者聚集的区域迁移时,合作者之间的相互吸引可以形成正反馈,促进合作团簇的扩展与稳定. 这种“趋利性迁移”行为在自然界中广泛存在,例如微生物向营养物质或同类聚集的现象^[22],在人类社会,也体现为个体向合作氛围良好的群体流动^[23]. Zhang 等^[24-26]从不同角度探讨了迁移对合作的影响,包括基于环境的迁移、基于社会福利的迁移^[27,28]、以及“近君子,远小人”的迁移策略^[29,30]等. 这些研究表明,恰当的迁移规则能够有效促进合作行为的演化.

然而,上述考虑迁移的博弈模型研究存在一个共同的基本假设:个体用于迁移决策的感知半径与博弈交互的作用半径相同,即个体在评估环境、确定迁移方向时所采用的感知半径与选择邻居进行博弈时所采用的交互半径默认相同. 这一假设在模型简化层面具有一定合理性,但与现实系统中策略交互和空间移动功能相分离的基本特征相矛盾.

在真实的生物与社会系统中,个体的迁移半径与博弈半径往往具有不同的取值与功能属性. 从功能分工的角度来看,博弈交互通常发生在直接且频

繁接触的局部范围内,而迁移决策则往往依赖于更大空间范围上的环境信息,两者所依赖的信息类型与作用范围存在本质差异. 例如,候鸟依据大范围地磁场或气象信息调整迁徙路线,而其觅食竞争等局部博弈行为却发生在更小的空间范围内^[31];类似地,人类个体在日常社交圈内与熟人进行重复博弈,而迁移决策却往往依赖对更大范围就业市场或生存环境的综合评估^[32]. 反之,博弈半径大于迁移半径的情形同样存在,例如珊瑚礁鱼类的竞争交互可跨越较大的领地范围,然而其实际位移行为却高度受限于礁体的局部空间结构^[33]. 因此,将博弈半径与迁移半径作为相互独立的参数加以处理,更符合真实复杂系统的运作机制.

受到以上研究工作的启发,本文构建了一个具有不同迁移半径与博弈半径的空间囚徒困境博弈模型. 区别于传统基于格点的空间结构,本模型采用具有周期边界条件的二维连续平面,个体在其中可连续移动. 通过数值模拟,本文研究了不同迁移半径与博弈半径对囚徒困境博弈中合作行为演化的影响. 研究发现,在特定参数条件下,存在最优的迁移半径与最优的博弈半径,使得系统能够达到最大合作水平;迁移半径较小时会破坏合作团簇的稳定性,而博弈半径的适当增大则有助于个体获取更充分的策略信息,但过大的博弈半径会削弱空间互惠效应. 进一步地,本文还探究了不同群体密度情况下系统的合作行为演化,结果表明,在不同密度条件下,最优迁移半径仍然普遍存在;与此同时,系统还存在一个最优的群体密度,在该密度附近合作行为更容易占主导地位,密度过低导致交互机会不足,密度过高则加剧竞争与背叛者的扩散优势.

2 模 型

考虑一个由 $N = 1000$ 个个体组成的种群,个体在具有周期性边界条件的二维正方形平面上运动,平面边长为 $L = 10$. 在 t 时刻,个体 i 的策略记为 $s_i(t)$,其中 $s_i(t) = 1$ 表示合作 (C), $s_i(t) = 0$ 表示背叛 (D). 个体 i 在 t 时刻的位置记为 $\mathbf{r}_i(t)$,迁移方向记为 $\hat{\mathbf{v}}_i(t)$,以角度 $\theta_i(t) \in [0, 2\pi)$ 表示. 初始时刻,所有个体在平面内随机分布,合作与背叛策略以等概率随机赋予各个体,迁移方向 $\theta_i(0)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上均匀随机初始化.

在本模型中, 个体的博弈交互半径与迁移感知半径相互独立. 具体而言, 个体 i 的博弈邻居集合 $\Omega_i^{\text{int}}(t)$ 由博弈交互半径 r_i 确定:

$$\Omega_i^{\text{int}}(t) = \{j \mid \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| < r_i, j \neq i\}, \quad (1)$$

个体 i 的迁移邻居集合 $\Omega_i^{\text{mig}}(t)$ 由迁移感知半径 r_m 确定:

$$\Omega_i^{\text{mig}}(t) = \{j \mid \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| < r_m, j \neq i\}. \quad (2)$$

需要强调的是, 在该模型中, 博弈交互半径 r_i 与迁移感知半径 r_m 作为两个相互独立的参数, 分别控制个体的策略交互范围与空间移动决策范围, 而非默认二者相等. 当 $r_i = r_m$ 时, 本模型退化为文献 [34] 所提出的标准模型, 即博弈交互半径与迁移感知半径完全重合的特殊情形 (对应图 1(b)). 本文在此基础上将二者解耦为独立参数, 考察二者独立变化对合作演化的影响, 是对文献 [34] 模型的直接拓展. 图 1 给出了 r_i 与 r_m 三种典型大小关系的示意图, 其中红色节点表示合作者, 蓝色节点表示背叛者, 绿色实线圆及其浅绿色填充区域表示以焦点个体 (节点 1) 为中心的博弈交互半径 r_i , 黑色虚线圆及其黄色填充区域表示迁移感知半径 r_m . 图 1(a) 对应 $r_i > r_m$ 的情形, 即个体的博弈交互半径大于其迁移感知半径, 焦点个体参与博弈的邻居集合包含了其用于迁移决策的邻居集合; 图 1(b) 对应 $r_i = r_m$ 的情形, 即博弈交互半径与迁移感知半径完全重合, 等价于已有文献中的标准模型设置 [34]; 图 1(c) 对应 $r_i < r_m$ 的情形, 即个体的迁移感知半径大于其博弈交互半径, 焦点个体可感知到更广空间范围内合作者的运动趋势以指导自身迁移, 而其策略更新仍仅依赖较小范围内的博弈收益

信息. 上述 3 种情形涵盖了 r_i 与 r_m 独立变化时所有可能的拓扑关系.

确定了个体的博弈半径与迁移感知半径后, 需要进一步规定系统在每一时间步内的演化规则. 每个蒙特卡罗 (MC) 步由以下 4 个基本过程构成.

(i) 博弈交互. 个体 i 与其博弈邻居集合 $\Omega_i^{\text{int}}(t)$ 内的所有个体进行囚徒困境博弈并累积收益. 采用弱囚徒困境 (weak PD), 其收益矩阵如下 [35]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 $b \geq 1$ 为背叛诱惑参数, 个体 i 的归一化收益为

$$U_i(t) = \frac{P_i(t)}{|\Omega_i^{\text{int}}(t)|}, \quad (4)$$

其中 $P_i(t)$ 为个体 i 的累积收益, $|\Omega_i^{\text{int}}(t)|$ 为其博弈邻居数量. 若个体 i 在博弈交互半径 r_i 内无邻居, 则 $U_i(t) = 0$. 本文采用平均收益而非累积收益, 以消除个体博弈邻居数目差异 (由博弈交互半径、种群密度等参数共同决定) 对策略更新的影响, 使收益比较更准确地反映个体的实际博弈表现.

(ii) 策略更新. 个体 i 采用“模仿最优邻居”规则 [14] 确定下一时刻策略 $s_i(t+1)$, 即在其博弈邻居 (包括自身) 中, 学习归一化收益最高者的策略:

$$s_i(t+1) = s_{i^*}(t), \quad i^* = \arg \max_{j \in \Omega_i^{\text{int}}(t) \cup \{i\}} U_j(t), \quad (5)$$

若存在多个个体同时具有最高收益, 则随机选取其中之一个体策略来学习.

(iii) 位置更新. 个体 i 依据当前迁移方向 $\hat{\mathbf{V}}_i(t)$ 和迁移步长 δ 更新位置:

$$\mathbf{r}_i(t+1) = \mathbf{r}_i(t) + \delta \hat{\mathbf{V}}_i(t), \quad (6)$$

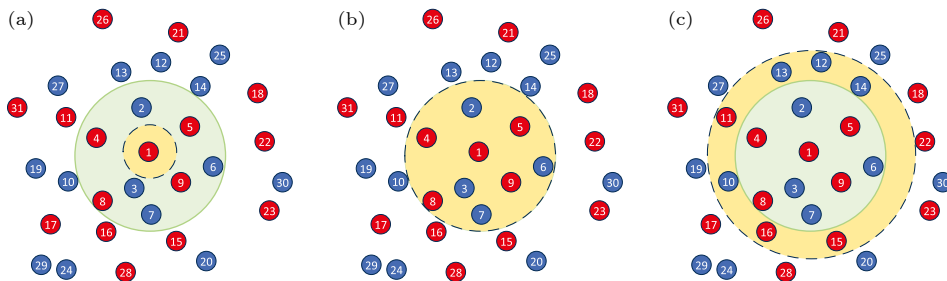


图 1 博弈交互半径与迁移感知半径的 3 种典型关系示意图, 红色节点表示合作者, 蓝色节点表示背叛者, 绿色实线圆及浅绿色填充区域表示博弈交互半径 r_i , 黑色虚线圆及黄色填充区域表示迁移感知半径 r_m (a) $r_i > r_m$; (b) $r_i = r_m$; (c) $r_i < r_m$.

Fig. 1. Schematic diagram of three typical relationships between the game interaction radius and the migration perceptual radius, red nodes represent cooperators and blue nodes represent defectors, the solid green circle with light green shading indicates the game interaction radius r_i , and the dashed black circle with yellow shading indicates the migration perceptual radius r_m : (a) $r_i > r_m$; (b) $r_i = r_m$; (c) $r_i < r_m$.

位置更新后, 超出平面边界的个体依据周期性边界条件折回至对侧.

(iv) 迁移方向更新. 个体 i 根据迁移感知半径 r_m 内合作邻居的平均迁移方向更新自身的迁移方向, 即采用合作者跟随机制^[34]:

$$\hat{\mathbf{V}}_i(t+1) = \frac{\sum_{j \in \Omega_i^{\text{mig}}(t)} s_j(t) \hat{\mathbf{V}}_j(t)}{\left| \sum_{j \in \Omega_i^{\text{mig}}(t)} s_j(t) \hat{\mathbf{V}}_j(t) \right|}, \quad (7)$$

需要指出的是, 上述迁移方向更新机制对合作者与背叛者均生效. 这反映了现实系统中的普遍行为逻辑: 无论个体自身持有何种策略, 均倾向于学习邻近合作者的迁移方向. 个体感知到的是合作者的运动趋势, 而非合作者的空间位置本身, 类似于对群体运动信号的方向跟随响应, 而非直接朝向合作者聚集区域的迁移行为. 若个体 i 在迁移感知半径 r_m 内无合作邻居, 或者感知半径内合作者方向矢量之和的模 (即分母) 小于阈值 ϵ (取 10^{-10}) 时, 则随机赋予一个在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布的方向.

需要说明的是, 本文采用同步更新方式: 所有个体在每一时刻依据当前时刻 t 的状态 (包括策略、位置与迁移方向) 依次完成博弈交互、策略更新、位置更新与迁移方向更新, 得到 $t+1$ 时刻的状态. 完成上述 4 个过程后, 一个完整的 MC 步结束. 种群合作水平 f_c 定义为 $f_c = N_c/N$, 其中 N_c 和 N 分别代表种群中采用合作策略的个体数和种群个体总数. 所有的演化结果都是系统在经过足够长的演化时间 (1×10^4 MC 步) 进入稳定状态后得到的, 所有数据点均对 300 次独立实现取平均.

3 数值模拟结果与分析

3.1 迁移感知半径与背叛诱惑对合作的影响

首先, 图 2 给出了固定博弈交互半径 $r_i = 0.5$ 时, 合作水平 f_c 随背叛诱惑参数 b 的变化曲线, 其中图 2(a), (b) 分别对应迁移步长 $\delta = 0.05$ 与 $\delta = 0.15$ 的情形, 不同曲线对应不同的迁移感知半径 r_m . 对于两种迁移步长, f_c 均随 b 的增大而单调下降. 然而, 迁移感知半径 r_m 的取值对合作水平具有显著的非单调影响. 在图 2(a) 中, 当 r_m 从 0.1 增大至 0.5 时, 合作水平显著提升, $r_m = 0.5$ 对应的曲线在整个 b 范围内均处于最高位置; 而当 r_m 进一步增大至 1.0 和 1.5 时, 合作水平虽仍高于 $r_m = 0.1$ 和 $r_m = 0.3$ 的情形, 但相较于 $r_m = 0.5$ 有所下降. 值得注意的是, $r_m = 0.3$ 对应的合作水平在所有 r_m 取值中最低, 甚至低于 $r_m = 0.1$ 的情形, 表明迁移感知半径存在一个对合作最为不利的数值.

在图 2(b) 中, 迁移步长增大至 $\delta = 0.15$ 后, 上述非单调特征依然存在, 但最优迁移感知半径发生了明显偏移. 与图 2(a) 不同, 图 2(b) 中迁移步长增大后, $r_m = 0.1$ 与 $r_m = 0.3$ 对应的曲线合作水平在较小的 b 处便迅速下降至零, 与其他较大 r_m 曲线之间的差距进一步拉大, 表明较大迁移步长下较小感知半径对合作的抑制效果更为显著. 与此同时, $r_m = 0.5$, $r_m = 1.0$ 与 $r_m = 1.5$ 对应的曲线趋于相互靠拢, 说明当感知半径足够大时, 进一步增大 r_m 对合作的促进效果逐渐趋于饱和. 此外, $r_m = 0.3$ 对应的合作水平在图 2(b) 中同样处于最低, 且其 f_c 下降至零的临界 b 值明显小于其他 r_m

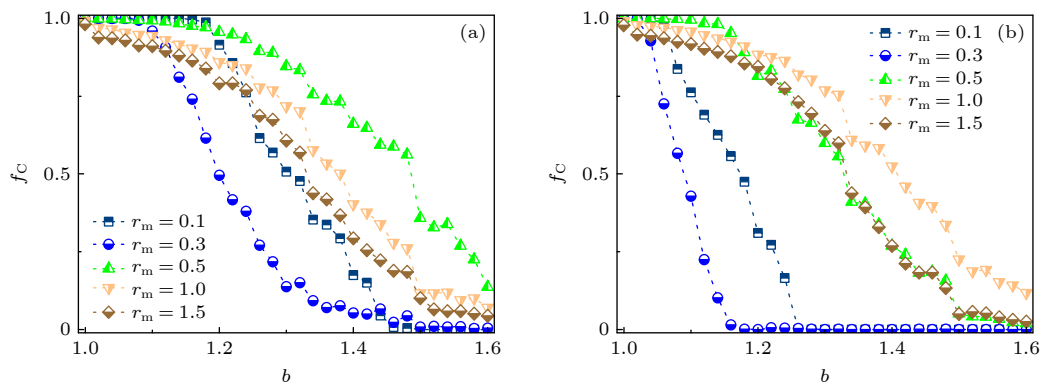


图 2 合作水平 f_c 随背叛诱惑 b 的变化曲线, 不同曲线对应不同的迁移感知半径 r_m (a) $\delta = 0.05$; (b) $\delta = 0.15$; 其他参数 $N = 1000$, $L = 10$, $r_i = 0.5$

Fig. 2. Fraction of cooperators f_c as a function of the temptation to defect b , with different curves corresponding to different migration perceptual radii r_m : (a) $\delta = 0.05$; (b) $\delta = 0.15$; other parameters $N = 1000$, $L = 10$, $r_i = 0.5$.

的情形, 进一步表明该取值对合作的抑制作用在较大迁移步长下依然存在.

综合以上的结果可以看出, 迁移感知半径 r_m 与迁移步长 δ 之间存在耦合效应: 两者的匹配关系共同决定了合作演化的最优条件. 因此, 存在一个与迁移步长相匹配的最优迁移感知半径, 使合作水平达到峰值. 另外, 在迁移步长确定的情况下, 适当增大 r_m 可以使个体感知到更广范围内合作者的迁移趋势, 从而引导合作者聚集成团, 有利于网络互惠机制的发挥; 而过小的 r_m 则使个体的迁移决策仅依赖极局部的信息, 难以形成有效的合作团簇. 然而, 当 r_m 过大时, 个体感知半径内合作者方向信息趋于平均化, 削弱了定向迁移的聚集效果, 导致合作水平有所回落.

3.2 不同的迁移步长下迁移感知半径对合作的影响

图 3 给出了合作水平 f_c 随迁移感知半径 r_m 的变化曲线, 不同曲线对应不同的迁移步长 δ , 以进

一步揭示 r_m 与 δ 之间的耦合关系及博弈交互半径 r_i 的调控作用. 图 3(a), (b) 固定 $r_i = 0.5$, 图 3(a) 与图 3(b) 分别对应 $b = 1.2$ 与 $b = 1.4$ 的情形. 在图 3(a) 中, 对于所有迁移步长, f_c 随 r_m 的变化均呈现出显著的非单调特征. 当 r_m 较小时, 除较小迁移步长 (如 $\delta = 0.05$ 和 $\delta = 0.1$) 仍能维持相对较高的合作水平外, 其余较大迁移步长对应的合作水平整体偏低, 这一现象表明, 当迁移步长较小时, 个体运动范围有限, 即便在较小的感知半径下也能与邻近合作者保持稳定的局部接触, 从而维持较高的合作水平; 而当迁移步长较大时, 个体运动幅度增大, 过小的感知半径无法为个体提供足够的合作者方向信息, 导致定向迁移的聚集效果减弱, 合作水平因此下降. 在 $r_m \approx 0.3$ 附近, f_c 出现明显的极小值, 对于较大的迁移步长甚至降为零, 与图 2 中 $r_m = 0.3$ 对应合作水平最低的结论高度吻合. 随后 f_c 随 r_m 的增大而迅速回升并达到峰值, 之后缓慢下降并趋于平稳. 值得注意的是, 迁移步长 δ 越大, 其对应的最优迁移感知半径 r_m^* 越大, 即较快的个

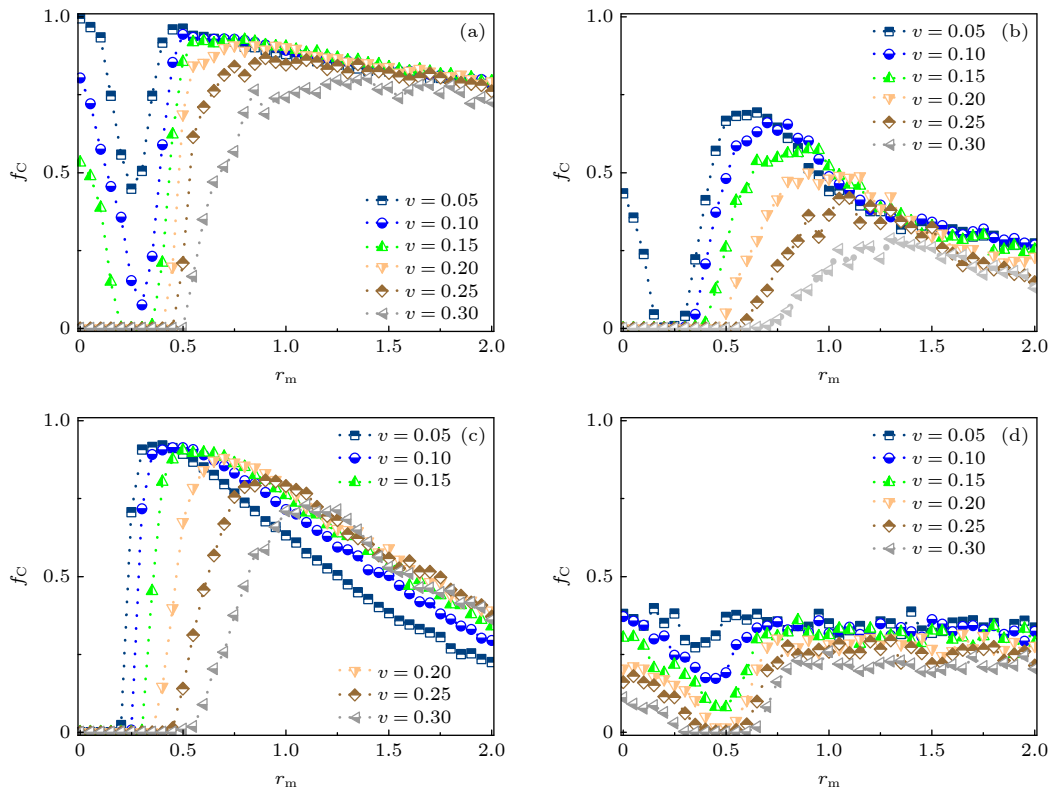


图 3 合作水平 f_c 随迁移感知半径 r_m 的变化曲线, 不同曲线对应不同的迁移步长 δ (a) $b = 1.2$, $r_i = 0.5$; (b) $b = 1.4$, $r_i = 0.5$; (c) $b = 1.2$, $r_i = 0.3$; (d) $b = 1.2$, $r_i = 0.8$. 其他参数: $N = 1000$, $L = 10$

Fig. 3. Fraction of cooperators f_c as a function of the migration perceptual radius r_m , with different curves corresponding to different migration step lengths δ : (a) $b = 1.2$, $r_i = 0.5$; (b) $b = 1.4$, $r_i = 0.5$; (c) $b = 1.2$, $r_i = 0.3$; (d) $b = 1.2$, $r_i = 0.8$. Other parameters: $N = 1000$, $L = 10$.

体运动需要匹配更宽的感知半径方能有效促进合作者聚集. 图 3(b) 中背叛诱惑参数增大至 $b = 1.4$ 后, 所有曲线的合作水平整体大幅下降, 上述非单调特征虽依然存在但峰值明显压低, 进一步验证了较强的背叛诱惑不利于合作维持这一一般性规律. 同时, δ 越大对应最优 r_m 越大的趋势在图 3(b) 中同样清晰可见.

图 3(c), (d) 固定 $b = 1.2$, 通过改变博弈交互半径 r_i 考察其对上述规律的影响. 图 3(c) 对应 $r_i = 0.3$, 与图 3(a) 相比, 由于博弈交互半径 r_i 减小, 个体能够参与博弈的邻居数量减少, 局部收益信息更为稀疏, 导致在 r_m 较小时图 3(a) 中较小迁移步长所具有的合作优势不再出现, 各迁移步长在小 r_m 区间均无法维持合作. 随后随 r_m 增大, 合作水平回升至峰值后缓慢下降, 非单调特征依然显著. 此外, 迁移步长越大所对应的最优 r_m 越大的规律在图 3(c) 中依然成立. 图 3(d) 对应 $r_i = 0.8$, 结果与图 3(a)—(c) 存在明显差异: 各曲线的 f_c 在整个 r_m 范围内均维持在较低水平, 不同迁移步长之间的差异也大幅缩小, 表明当博弈交互半径 r_i 较大时, 无论迁移感知半径 r_m 如何取值, 合作均难以得到有效促进. 尽管如此, 在 $r_m \approx 0.3$ 附近仍可观察到各曲线出现局部极小值的迹象, 说明 $r_m \approx 0.3$ 对合作不利的结论在博弈交互半径较大时依然成立, 只是由于整体合作水平已被大幅压低而显得不那么突出. 这一结果说明过大的博弈交互半径会削弱合作者团簇的网络互惠, 使个体趋向于与更大范围内的混合邻居交互, 从而抑制合作的涌现.

上述结果表明, $r_m \approx 0.3$ 是一个对合作普遍不利的半径范围, 在多种参数组合下均导致很低的合作水平; 较大的迁移步长需要匹配较大的迁移感知半径才能实现最优合作; 增大背叛诱惑参数 b 或博弈交互半径 r_i 均会整体抑制合作水平, 但其作用机制有所不同——前者直接增强了背叛的收益优势, 后者则通过扩大博弈邻居范围削弱了合作团簇对抗背叛者入侵的能力.

3.3 微观机制分析

为深入理解迁移感知半径 r_m 影响合作演化的微观机制, 图 4 给出了对应图 3(a) 中 $\delta = 0.15$ 曲线中 4 种典型 r_m 对应的演化过程, 包括系统演化快照与个体迁移方向分布. 每组子图中, 上行为特定时间步的个体空间分布快照 (红色节点表示合作

者, 蓝色节点表示背叛者), 下行为对应时刻所有个体迁移方向的极坐标玫瑰图, 子图中各列从左至右依次对应时间步 $t = 1, 10, 40, 100, 10000$.

当 $r_m = 0.1$ 时 (图 4(a)), 迁移感知半径极小, 个体几乎无法感知周围合作者的运动趋势. 玫瑰图在整个演化过程中始终呈现近似均匀的随机分布, 无明显主导方向, 表明个体迁移方向近乎随机. 虽然难以形成大规模合作团簇, 但已有合作结构不会被显著破坏. 与此相对应, 空间快照显示合作者与背叛者长期维持混合随机分布状态, 合作者无法实现有效聚集, 最终合作水平约为 0.5, 与图 3 中 $r_m = 0.1$ 所呈现的结果相吻合.

当 $r_m = 0.3$ 时 (图 4(b)), 个体开始根据有限的环境信息进行定向迁移, 系统演化呈现出合作逐步瓦解的状态. 在演化初期, 个体分布随机, 玫瑰图方向分散; 随着演化推进 ($t = 40-100$), 合作者数量持续减少, 与此同时玫瑰图中涌现出明显的优势方向. 值得注意的是, 这种方向集中现象并非源于合作者聚集, 而恰恰反映了背叛者借助该感知半径精准追踪与跟随并入侵合作团簇的过程. 在这一过程中, 背叛者利用有限但足够的环境信息迅速锁定合作者聚集区域, 并沿着优势方向持续向合作团簇内部渗透, 使得尚未形成稳定结构的合作团簇在发展早期即被破坏. 与此同时, 由于迁移感知半径较小, 系统中分散的小合作团簇难以及时感知彼此的位置并实现有效合并, 从而无法形成具有足够空间连续性的大团簇, 导致其抵抗背叛者入侵的能力显著降低. 最终, 在稳态阶段 ($t = 10000$), 合作者消亡, 空间中仅剩背叛者, 玫瑰图方向分布重新趋于分散, 反映背叛者占据整个系统后进行随机迁移的现象. 这一微观过程从机制上揭示了图 3 中 $r_m \approx 0.3$ 处合作水平出现谷值的内在原因.

当 $r_m = 0.6$ 时 (图 4(c)), 迁移感知半径略大于博弈交互半径, 个体能够获取与其实际相互作用相匹配的环境信息. 演化快照显示, 合作者在 $t \approx 40$ 即开始形成大尺度连续团簇; 对应玫瑰图呈现明显单峰分布, 表明个体迁移方向具有较强一致性. 与 $r_m = 0.3$ 时背叛者主导的定向入侵不同, 此时合作者能够基于更充分的信息实现迁移, 促进分散团簇之间的快速合并, 形成具有空间连通性的稳定合作团簇. 该结构在内部维持高收益, 并在团簇边界处对背叛者形成有效的入侵抑制作用. 最终系统达到稳态时, 合作团簇稳定存在, 背叛者被排挤至边缘或孤立区域, 对应图 3 中合作水平的显著提升.

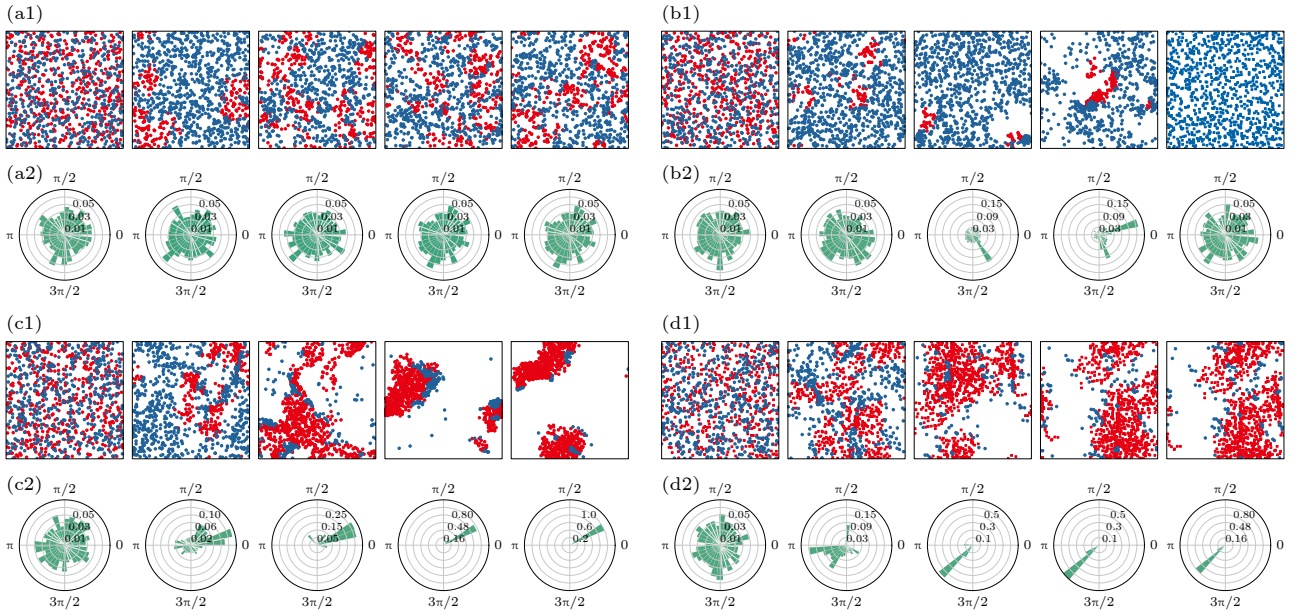


图4 4种典型迁移感知半径 r_m 下系统的演化快照与个体迁移方向分布. 每组子图上行为个体空间分布快照 (红色节点表示合作者, 蓝色节点表示背叛者), 下行为对应时刻个体迁移方向的极坐标玫瑰图, 各列从左至右依次对应时间步 $t = 1, 10, 40, 100, 10000$ (a1), (a2) $r_m = 0.1$; (b1), (b2) $r_m = 0.3$; (c1), (c2) $r_m = 0.6$; (d1), (d2) $r_m = 1.5$; 其他参数 $N = 1000$, $L = 10$, $b = 1.2$, $r_i = 0.5$, $\delta = 0.15$

Fig. 4. Snapshots of spatial distributions and polar rose diagrams of migration directions under four typical migration perceptual radii r_m , in each panel group, the upper row shows spatial configuration snapshots (red dots: cooperators; blue dots: defectors), and the lower row shows the corresponding polar rose diagrams of migration directions, columns from left to right correspond to time steps $t = 1, 10, 40, 100, 10000$, respectively: (a1), (a2) $r_m = 0.1$; (b1), (b2) $r_m = 0.3$; (c1), (c2) $r_m = 0.6$; (d1), (d2) $r_m = 1.5$; other parameters $N = 1000$, $L = 10$, $b = 1.2$, $r_i = 0.5$, $\delta = 0.15$.

当 $r_m = 1.5$ 时 (图 4(d)), 感知半径远大于博弈交互半径, 合作者与背叛者均能感知到大范围内的方向信息. 玫瑰图显示迁移方向随演化推进逐渐趋于集中, 表明个体迁移产生了一定程度的定向性. 然而, 由于感知半径过大, 背叛者同样能够追踪合作者的运动信号并随之同步汇聚, 导致合作者在聚集的同时背叛者也随之跟进并入侵. 空间快照显示, 合作者与背叛者在整个演化过程中始终处于大范围交织混合状态, 未能形成紧凑的稳定合作团簇. 这与图 3 中大 r_m 下合作水平显著降低的宏观规律高度一致, 从微观层面揭示了感知半径过大导致合作衰退的根本机制: 过宽的感知半径使背叛者得以同步追踪合作者的聚集行为, 使合作者始终无法建立起有效的结构性防护.

通过对微观快照与玫瑰图分析可以看出, 迁移感知半径 r_m 通过调控个体迁移方向的集体有序程度, 在微观上决定了合作者能否实现有效的空间聚集. r_m 过小则方向信息匮乏, 个体迁移方向近乎随机; r_m 处于特定中间值时, 背叛者反而能够高效追踪合作者并加速其瓦解, 导致合作谷值的出现; 当 r_m 进一步增大后, 合作者得以凭借更广的感知半

径率先实现定向聚集, 建立起稳定的结构性防护, 从而产生图 2 与图 3 所揭示的宏观合作水平提升效应; 而 r_m 过大时, 背叛者同样能够追踪合作者的运动信号同步汇聚, 使合作者始终无法摆脱背叛者的跟随入侵, 合作水平因此再度下滑. 上述 4 种情形共同揭示了迁移感知半径影响合作演化的完整微观图像, 与图 2 和图 3 所呈现的宏观统计规律形成了一一对应.

3.4 博弈交互半径与迁移感知半径的协同效应

在揭示了微观机制的基础上, 有必要从更宏观的参数空间视角系统考察博弈交互半径 r_i 与迁移感知半径 r_m 对系统合作的共同影响. 图 5 给出了两种迁移步长对应的 f_C 在 r_i - r_m 参数平面上的相图分布, 颜色由蓝至红表示合作水平由 0 增大至 1. 从两幅相图的整体结构来看, 合作水平在参数平面上呈现出显著的非均匀分布特征, 高合作区域 (暖色区) 与低合作区域 (冷色区) 之间存在清晰的边界 (白色区), 表明 r_i 与 r_m 对合作演化均具有重要的调控作用.

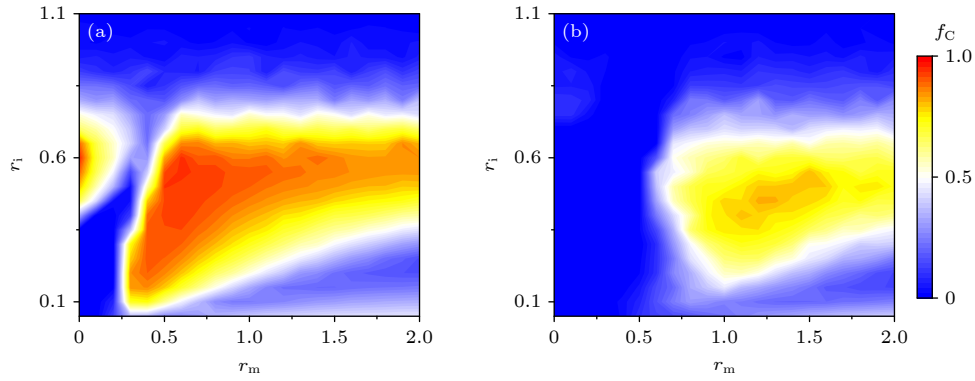


图 5 合作水平 f_C 在博弈交互半径 r_i 与迁移感知半径 r_m 构成的参数平面上的相图 (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.3$; 其他参数 $N = 1000$, $L = 10$, $b = 1.2$

Fig. 5. Color maps of the cooperator fraction f_C in the parameter plane spanned by the game interaction radius r_i and the migration perceptual radius r_m : (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.3$; other parameters $N = 1000$, $L = 10$, $b = 1.2$.

首先考察 r_m 的影响. 在 r_m 极小 ($r_m \approx 0$) 时, 图 5(a) ($\delta = 0.1$) 中在 $r_i = 0.6$ 附近出现了一小片高合作暖色区域, 这对应于迁移步长较小时个体即便在感知半径极为有限的情况下仍能与邻近合作者保持稳定局部接触、从而维持较高合作水平的情形, 与图 3(a) 中小步长曲线在小 r_m 端合作水平较高的结论相吻合. 随着 r_m 增大, 合作水平在 $r_m \approx 0.3-0.5$ 附近出现明显的白色过渡带乃至冷色区域, 这一区域正对应背叛者能够高效追踪合作者、导致合作谷值的参数范围. 当 r_m 进一步增大至中等水平时, 参数平面上出现大面积的高合作暖色区域, 合作水平随 r_m 的增大显著提升. 当 r_m 继续增大至较大值时, 合作水平再度出现不同程度的下滑, 印证了感知半径过大导致背叛者同步追踪、削弱合作聚集效果的微观机制. 其次考察 r_i 的影响. 在 r_i 较小时, 个体博弈邻居稀少, 局部收益信息不足, 合作水平整体偏低; 在 r_i 处于中等水平 ($r_i \approx 0.3-0.7$) 时, 高合作暖色区域最为集中, 表明适中的博弈交互半径能够为合作团簇提供最优的结构性保护; 而当 r_i 较大时, 博弈邻居数量大幅增加, 合作团簇的网络互惠优势被稀释, 高合作区域随之收缩, 与图 3(d) 中大 r_i 下合作水平整体偏低的结论一致.

对比图 5(a), (b), 迁移步长 δ 的增大对合作演化产生了显著的影响. 图 5(a) ($\delta = 0.1$) 中高合作区域面积更大、峰值更高, 表明较小的迁移步长有助于个体在感知到合作者信号后进行精细的定向调整, 从而在更宽泛的参数范围内维持较高合作水平. 图 5(b) ($\delta = 0.3$) 中高合作区域明显收缩, 峰值降低, 且高合作区域向更大 r_m 方向偏移, 说明较大

的迁移步长需要匹配更大的感知半径才能实现有效聚集——步长过大时个体容易越过合作团簇而造成结构破坏, 只有在足够大的 r_m 提供充分方向信息的前提下, 较大步长带来的快速移动才能转化为合作聚集的优势. 这一结果与图 3 中大 δ 需要匹配更大 r_m 才能达到合作峰值的宏观规律形成了完整的参数空间印证.

3.5 群体密度的影响

除上述参数外, 群体密度作为影响个体间相互作用频率的基础性参数, 同样可能影响迁移感知半径对合作的作用. 图 6 考察了群体密度 ρ 对合作演化的影响, 固定背叛诱惑参数与博弈交互半径, 图 6(a), (b) 分别对应迁移步长 $\delta = 0.1$ 和 $\delta = 0.2$, 不同曲线对应不同的迁移感知半径 r_m . 从两幅图的整体趋势来看, 不同 r_m 取值下合作水平随密度的变化行为存在显著差异, 整体均呈现先升后降的单峰结构, 但峰值高度、峰值位置以及低密度端的起始水平随 r_m 的不同而呈现出明显分层.

对于较大的 r_m , 在密度极低时合作水平已处于较高水平, 这表明在稀疏环境下, 足够大的迁移感知半径使得合作者能够跨越较大空间距离感知其他合作者的运动趋势并实现定向聚集, 从而在个体间平均距离较大的情况下依然维持较高合作水平. 随密度增大, 系统合作水平在中等密度区间达到峰值后逐渐下降, 高密度下博弈邻居数量的大幅增加使得合作团簇边界压力增强, 背叛者更易渗透侵蚀合作者群体, 导致合作水平有所回落. 对于较小的 r_m , 在低密度端合作水平接近零, 个体因感知

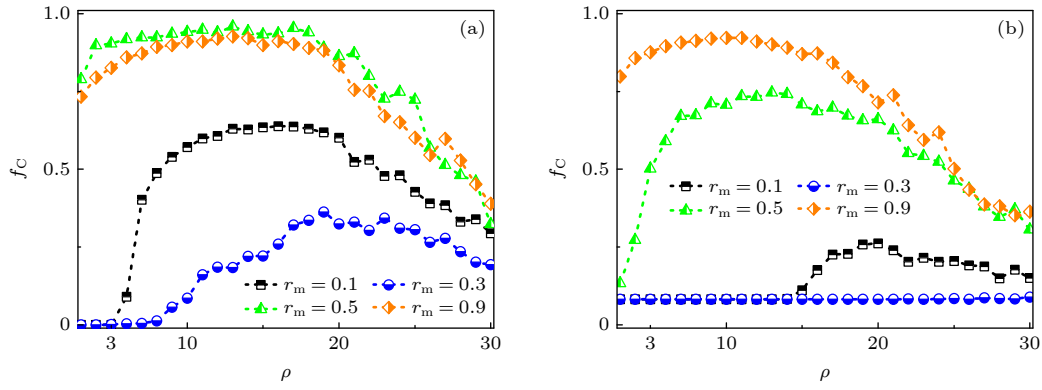


图6 合作水平 f_C 随群体密度 ρ 的变化曲线, 不同曲线对应不同的迁移感知半径 r_m , 横轴 ρ 从3开始, 因极低密度下博弈交互无法有效发生 (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.2$; 其他参数 $L = 10$, $b = 1.2$, $r_i = 0.5$

Fig. 6. Fraction of cooperators f_C as a function of population density ρ , with different curves corresponding to different migration perceptual radii r_m , the horizontal axis starts from $\rho = 3$, as game interactions cannot effectively occur at extremely low densities: (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.2$; other parameters: $L = 10$, $b = 1.2$, $r_i = 0.5$.

半径有限而无法在稀疏环境中获取有效的方向引导信息, 迁移行为近乎随机游走, 合作者难以聚集. 随密度增大, 个体间距离缩短, 有限的感知半径内开始出现可供追随的合作者信号, 合作水平逐步提升并在中等密度处出现峰值, 但峰值明显低于大 r_m 对应的曲线, 尤其对应 $r_m = 0.3$ 的曲线在两幅图中均维持在较低水平, 与图4所揭示的背叛者追踪机制相吻合.

通过上述分析可以发现, 迁移步长的增大显著改变了上述规律. 步长较小时各曲线整体较为平滑, 大 r_m 曲线在宽泛的密度区间内均能维持高合作水平; 步长较大时曲线波动加剧, 大 r_m 曲线在低密度端的起始合作水平有所提升但高密度端下降更为陡峭, 而对应 $r_m = 0.3$ 的曲线在几乎所有密度下均趋近于零, 表明较大步长与较小感知半径的组合在各密度条件下均难以维持合作. 总体而言, 低密度环境下大感知半径对合作的促进作用尤为突出, 而高密度环境则对合作产生普遍的抑制效应, 群体密度、迁移步长与迁移感知半径三者共同决定了系统的合作水平.

4 结 论

在自然界与人类社会中, 个体的博弈交互半径与空间移动的感知半径往往受到不同机制的独立支配, 将二者默认为同一范围的简化处理忽略了现实系统中个体在策略交互与空间移动两类行为上普遍存在的范围差异. 理解博弈交互半径与迁移感知半径的变化如何影响合作的涌现与维持, 对于认

识生物群落、社会系统以及智能体群体中的合作演化具有重要意义. 为此, 本文构建了博弈交互半径与迁移感知半径相互独立的空间连续囚徒困境模型, 通过数值模拟与微观机制分析, 揭示了博弈交互半径与迁移感知半径的变化对合作演化的影响规律, 得到以下主要结论.

首先, 迁移感知半径对系统合作水平具有非单调影响. 适中的感知半径能够有效促进合作个体的空间聚集, 从而增强合作稳定性; 而过小的感知半径限制了个体获取环境信息的能力, 过大的感知半径则削弱了局域结构效应, 均不利于合作行为的维持; 其次, 博弈交互半径对合作演化起着关键调控作用. 较小的交互半径限制了个体间有效互动, 难以形成稳定的合作团簇; 而适中的交互半径有助于合作团簇的形成与扩展, 从而提升系统整体合作水平; 当交互半径进一步增大时, 系统趋于均匀混合, 合作优势减弱; 另外, 迁移步长通过影响个体运动能力, 间接调控合作结构的形成. 较小步长下个体局域性较强, 有利于合作团簇稳定存在; 而较大步长会破坏已有空间结构, 使合作个体难以维持聚集状态, 从而抑制合作行为; 最后, 个体密度同样对合作演化产生重要影响. 适中的密度有助于个体间有效接触并形成稳定结构, 而过高或过低的密度均会降低合作水平.

综上, 本文研究表明, 在空间囚徒困境中博弈交互半径与迁移感知半径作为两个独立参数, 均能深刻影响合作的涌现与维持, 且二者与迁移步长、群体密度之间存在复杂的耦合关系. 这一结果为设计促进合作的群体智能机制、理解现实复杂系统中

移动行为与合作演化的关联提供了新的理论依据. 值得指出的是, 本文所揭示的博弈交互半径和迁移感知半径对合作演化的非单调影响规律是在“模仿最优邻居”更新规则下得到的, 该规律对策略更新规则具有一定的依赖性. 不同策略更新规则 (如 Fermi 函数规则^[12]、收益差比较规则^[11]等) 与定向迁移机制之间的耦合效应, 是空间博弈领域中值得深入探讨的开放性问题, 不同更新规则下, 与博弈交互半径、迁移感知半径如何影响合作演化, 及其背后是否存在统一的微观机制, 是未来工作中值得系统研究的重要方向. 此外, 本文的理论框架在雪堆博弈下亦展现出丰富的动力学现象, 不同博弈框架下迁移感知半径与博弈交互半径的协同效应将在后续工作中得到更为全面的探讨. 未来工作还可进一步考虑异质个体、复杂网络拓扑、噪声效应以及不同博弈框架对迁移机制的影响, 以更贴近真实社会系统, 为理解现实复杂系统中合作演化的普适规律提供更坚实的理论基础.

参考文献

- [1] Hamilton W D 1964 *J. Theoret. Biol.* **7** 1
- [2] Darwin C 1859 *On the Origin of Species* (London: John Murray)
- [3] West S A, Cooper G A, Ghoul M B, Griffin A S 2021 *Nat. Ecol. Evol.* **5** 419
- [4] Harrell A, Wolff T 2023 *PNAS Nexus* **2** pgad399
- [5] Brosnan S F, Wilson B J 2023 *Philos. Trans. R. Soc. B* **378** 20210497
- [6] Rapoport A, Chammah A M 1965 *Prisoner's Dilemma: A Study in Conflict and Cooperation* (Ann Arbor: University of Michigan Press)
- [7] Axelrod R, Hamilton W D 1981 *Science* **211** 1390
- [8] Nowak M A 2006 *Science* **314** 1560
- [9] Smith J M 1982 *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [10] Nowak M A, May R M 1992 *Nature* **359** 826
- [11] Santos F C, Pacheco J M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 098104
- [12] Rong Z H, Xu X R, Wu Z X 2020 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **50** 010508 (in Chinese) [荣智海, 许雄锐, 吴枝喜 2020 *中国科学: 物理学 力学 天文学* **50** 010508]
- [13] Masuda N, Aihara K 2003 *Phys. Lett. A* **313** 55
- [14] Roca C P, Cuesta J A, Sánchez A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046106
- [15] Chen W Y, Pan J C, Han W C, Huang C W 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 110201 (in Chinese) [陈蔚颖, 潘建臣, 韩文臣, 黄昌巍 2022 *物理学报* **71** 110201]
- [16] Assenza S, Gómez-Gardeñes J, Latora V 2008 *Phys. Rev. E* **78** 017101
- [17] Hertel A G, Efrat R, Reznikov K, Sapir N, Berger-Tal O, Mueller T 2023 *Proc. R. Soc. B* **290** 20222429
- [18] Nilforoshan H, Looi W, Pierson E, Villanueva B, Fishman N, Chen Y, Sholar J, Redbird B, Grusky D, Leskovec J 2023 *Nature* **624** 586
- [19] White S L, Keagy J, Batchelor S, Langlois J, Thomas N, Wagner T 2023 *Environ. Biol. Fishes* **106** 2205
- [20] Vainstein M H, Silva A T C, Arenzon J J 2007 *J. Theoret. Biol.* **244** 722
- [21] Helbing D, Yu W 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106** 3680
- [22] Xu Q, Ali S, Afzal M, Nizami A S, Han S, Dar M A, Zhu D 2024 *Sci. Total Environ.* **931** 172967
- [23] Du Y X, Hu B, Long L R 2023 *J. Syst. Manag.* **32** 1222 (in Chinese) [杜宇晓, 胡斌, 龙立荣 2023 *系统管理学报* **32** 1222]
- [24] Zhang L, Huang C, Li H, Dai Q, Yang J 2021 *Europhys. Lett.* **134** 68001
- [25] Kroumi D 2025 *Phys. Rev. E* **112** 044306
- [26] Dhakal S, Chiong R, Chica M, Middleton R H 2020 *Appl. Math. Comput.* **377** 125090
- [27] Joshi J, Couzin I D, Levin S A, Guttal V 2017 *PLoS Comput. Biol.* **13** e1005732
- [28] Li Y, Ye H, Zhang H 2016 *Physica A* **445** 48
- [29] Xiao Z, Chen X, Szolnoki A 2020 *New J. Phys.* **22** 023012
- [30] Li W J, Jiang L L, Chen Z, Perc M, Slavinec M 2020 *Chaos Solitons Fractals* **141** 110425
- [31] Packmor F, Kishkinev D, Zechmeister T, Mouritsen H, Holland R A 2024 *Proc. R. Soc. B* **291** 20241363
- [32] Ma L, Zhao W, Dong L, Du Y 2023 *SAGE Open* **13** 21582440231217847
- [33] Barreto C R, Quimbayo J P, Mendes T C, Cordeiro C A M, Flores A A V 2024 *Mar. Ecol. Prog. Ser.* **738** 41
- [34] Zhang L, Huang C, Li H, Dai Q, Yang J 2021 *Chaos Solitons Fractals* **144** 110709
- [35] Nowak M A, May R M 1993 *Int. J. Bifurc. Chaos* **3** 35

Effects of migration perceptual radius and game interaction radius on cooperation evolution in spatial prisoner's dilemma*

ZHANG Lan¹⁾ HUANG Changwei²⁾³⁾ LI RICHTER Xiangyi^{4)5)†}

1) (*School of Information, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China*)

2) (*School of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China*)

3) (*Guangxi Key Laboratory of Multimedia Communications and Network Technology, Guangxi University, Nanning 530004, China*)

4) (*Institute of Ecology and Evolution, University of Bern, Bern 3012, Switzerland*)

5) (*Department of Biology, University of Konstanz, Constance 78464, Germany*)

(Received 20 April 2026; revised manuscript received 21 May 2026)

Abstract

In nature and human society, individuals' spatial movement and game interaction are often governed by distinct mechanisms. However, most previous studies on evolutionary game dynamics with migration have treated the interaction and migration radii as identical, which ignores the range asymmetry. In this paper, we decouple these two radii by treating the migration perceptual radius r_m and game interaction radius r_i as two fully independent parameters, construct a spatial prisoner's dilemma model with continuous migration in two-dimensional continuous space, and investigate how variations in these two factors affect the evolution of cooperation. We find that r_m has a pronounced non-monotonic effect on cooperation. When r_m is excessively small, individuals lack directional guidance for migration and the cooperation level remains close to that of random mixing. At intermediate r_m , defectors can efficiently track and infiltrate cooperative clusters, leading to a pronounced cooperation valley that is robust across defection temptations and interaction radii. In contrast, when r_m increases to a moderate level, cooperators achieve directed aggregation and form stable structures, substantially enhancing cooperation. A further increase in r_m enables defectors to follow cooperators' movement signals at a large scale, breaking cooperative clusters and causing the cooperation level to decline again. Spatial snapshots and polar migration-direction diagrams reveal the microscopic mechanisms underlying these regimes. Furthermore, the game interaction radius r_i plays a key regulatory role in cooperation evolution. An intermediate r_i most effectively supports the formation of cooperative clusters, while an excessively large r_i weakens network reciprocity. In the r_i - r_m parameter space, the cooperation level exhibits a non-uniform distribution with sharp boundaries between high and low cooperation regions, confirming the joint regulatory roles of both radii. In addition, the migration step size and population density interact with r_m to jointly determine cooperation outcomes. The promoting effect of an optimal r_m is prominent at low population density, whereas high density suppresses the cooperation level. These results provide a theoretical perspective on how movement behavior facilitates cooperation in real-world complex systems.

Keywords: spatial prisoner's dilemma, evolution of cooperation, migration perceptual radius, game interaction radius, two-dimensional continuous space

DOI: [10.7498/aps.75.20260559](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260559)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260559](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260559)

* Project supported by the Social Science Foundation Program of Shaanxi Province, China (Grant No. 2022M005), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12565005), the Swiss National Science Foundation (Grant No. 211549), and the China Scholarship Council (Grant No. 202508610167).

† Corresponding author. E-mail: xiangyi.li.richter@unibe.ch



空间囚徒困境中迁移感知半径与博弈交互半径的变化对合作演化的影响

张岚 黄昌巍 李相宜

Effects of migration perceptual radius and game interaction radius on cooperation evolution in spatial prisoner's dilemma

ZHANG Lan HUANG Changwei LI RICHTER Xiangyi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 190002 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260559

CSTR: 32037.14.aps.75.20260559

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260559>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

超越公地悲剧的合作演化: 环境反馈演化博弈动力学综述与展望

Evolution of cooperation beyond the tragedy of the commons: A review of evolutionary game dynamics with environmental feedback

物理学报. 2026, 75(17): 190002 <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260528>

具有异质增益因子的超图上的演化公共品博弈

Evolutionary public goods games on hypergraphs with heterogeneous multiplication factors

物理学报. 2022, 71(11): 110201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212436>

基于同位素链核电半径的新关系

New relation for nuclear charge radius based on isotope chain

物理学报. 2022, 71(15): 152101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212343>

基于原子核密度的核电半径新关系

Nucleus density based new relationship of nuclear charge radius

物理学报. 2023, 72(11): 112101 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230126>

量子博弈—“PQ”问题

Quantum game—“PQ” problem

物理学报. 2024, 73(3): 030301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20230592>

二维旋转谐振子势中单粒子的跳频压缩及演化

Squeezing and evolution of single particle by frequency jumping in two-dimensional rotating harmonic

物理学报. 2024, 73(7): 074202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231929>