

邊緣載荷下環形薄板大撓度問題*

葉 開 沅

(清 華 大 學)

一、 引 言

薄板大撓度方程式是由卡門[註 1] (Th. von Kármán) 首先提出來的。但關於此類的實際問題到目前為止, 已解決的尚為數不多。韋 (S. Way)[註 2] 最初用幕級數法解決了在均勻載荷下邊緣固定的薄圓板問題; 後來李斐[註 3] (S. Levy) 用重三角級數法得到了均勻載荷下簡支長方板的解答。這兩種方法是在某種載荷作用及邊界條件下, 由數字計算來決定無窮級數各項的係數值, 計算的過程都是非常地繁冗。此後錢偉長[註 4] 教授用攝動法 (perturbation method) 重新處理了韋的問題, 得出了非常完善的結果。這種方法有如下的優點:

- (1) 數字計算的步驟簡單,
- (2) 能推廣至其他邊界條件及其他載荷的情形,
- (3) 所得的固定邊緣情況跟實驗結果非常接近。

本文將用攝動法來處理環形薄板的大撓度問題; 如圖一所示, 其中 AB 為

* 1952 年 11 月 27 日

[註 1] Th. von Kármán, The Engineer Grapples with Non-linear Problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 615-683.

[註 2] S. Way, Bending of Circular Plate with Large Deflection, *A. S. M. E. Transactions, Applied Mechanics*, 56 (1934), 627-636.

[註 3] S. Levy, Bending of Rectangular Plate with Large Deflections, *N.A.C.A. Report*, No. 737, 1942.

[註 4] Wei-Zang Chien (錢偉長) Large Deflection of a Circular Clamped Plate under Uniform Pressure, *Chinese Journal of Physics*, vol. 7 no. 2, Dec., 1947.

位於中心的剛性圓板， Q_0 為平均分佈於內部邊緣單位長度的載荷，環形圓板的外徑為 a ，內徑為 b ，厚度為 h ，外邊固定在不可移動的牆上，內邊固定在不發生傾斜、扭轉而只能水平地上下移動的剛性圓板上。由於 AB 的剛性，加於其周圍的載荷 Q_0 可以作用於圓板中心的等值集中載荷 P 來代替；當 P 和 Q_0 有下列的關係 $P = 2\pi b Q_0$ 時，圖 1 和圖 2 的裝置便完全相同。

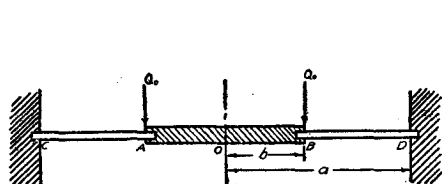


圖 1

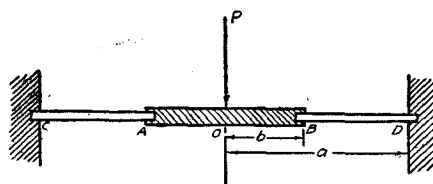


圖 2

最近蘇聯阿列克雪夫^[註 5] (С. А. Алексеев) 用薄膜理論處理了與本文相同的問題，但是他的結果和實際薄板的情形相差得很多；這是主要地由於他略去了彎曲效應而造成的。因為在集中載荷的情形下，這種效應依舊是很重要的，所以我們不能把它省略掉。本文和阿氏所得的結果將要在下面一節中加以討論和比較。

二、集中載荷圓薄板大撓度方程式

我們知道卡門的圓薄板大撓度方程式是：

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r N_r \frac{dw}{dr} \right) + q, \quad (1)$$

$$r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0, \quad (2)$$

其中 E 是楊氏彈性係數， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 是圓平板的抗彎係數 (flexural rigidity)， μ 是柏桑比， w 是垂直撓度 (lateral deflection)， N_r 是距離圓板中心為 r 的徑向薄膜應力 (radial membrane stress)， q 是每單位面積均勻分佈載荷。

[註 5] С. А. Алексеев, кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску, инженерный сборник. Т. X, 1951.

將方程式 (1) 乘以 $r dr$ 然後由零至 r 積分, 我們得出:

$$D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\omega}{dr} = N_r \frac{d\omega}{dr} + V, \quad (3)$$

其中 V 為距離中心為 r 的剪力 (shearing force). 在均勻載荷下 $V = \frac{1}{2} qr$; 若載

荷如圖 2 所示, 則 $V = \frac{P}{2\pi r}$. 因此方程式 (3) 可寫成:

$$D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\omega}{dr} = N_r \frac{d\omega}{dr} + \frac{P}{2\pi r}. \quad (4)$$

首先我們將方程式 (2) 和 (4) 變換成無因次形式, 引進下列的新變數:

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{r}{a}, \quad x = \xi^2, \quad y = \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{\omega}{h}, \quad S = 3(1-\mu^2) a^2 N_r / E h^3, \\ p = \frac{1}{4} [3(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}} \frac{a^2 P}{\pi E h^4}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \mu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ω 和 N_r 顯然地是 r 的偶函數, 因此 y 和 S 可寫成含 x 的函數.

由方程式 (2), (4) 和 (5), 我們得出下列的方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy}{dx} = S \frac{dy}{dx} + \frac{p}{x}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (xS) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0. \quad (7)$$

相當的邊界條件是:

當 $r = a$ 時,

$$\omega = 0, \quad \frac{d\omega}{dr} = 0, \quad r \frac{dN_r}{dr} + (1-\mu) N_r = 0; \quad (8)$$

當 $r = b$ 時,

$$\frac{d\omega}{dr} = 0, \quad r \frac{dN_r}{dr} + (1-\mu) N_r = 0. \quad (9)$$

若將上述邊界條件用無因次形式來表示，則 (8), (9) 可寫成：

當 $x=1$ 時，

$$y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad 2\lambda x \frac{dS}{dx} + S=0; \quad (10)$$

當 $x=\alpha$ 時，

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad 2\lambda x \frac{dS}{dx} + S=0. \quad (11)$$

三、方程式的解法

現在我們在邊界條件 (10) 和 (11) 下，用攝動法來解方程式 (6), (7)。方程式所有的因變數及集中載荷 p 均展開為含 Y_M 的升冪級數。 Y_M 是當 $r=b$ 時的撓度也就是環形平板的最大撓度，可以下面的式子來表示：

$$Y_M = \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{\omega}{h} \bigg|_{r=b} = y_{x=\alpha}. \quad (12)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} p &= \gamma_1 Y_M + \gamma_3 Y_M^3 + \cdots, \\ y &= y_1(x) Y_M + y_3(x) Y_M^3 + \cdots, \\ S &= S_2(x) Y_M^2 + \cdots, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $\gamma_1, \gamma_3 \cdots$ 為常數； y_1, y_3 ，以及 S_2 為待定含 x 的函數。將 (13) 中各值代入方程式 (6), (7) 和邊界條件 (10) 和 (11) 中，依照 Y_M 的次數，將各項次數相同的歸併在一塊，我們可得到一系列對 $\gamma_1, y_1, S_2, \gamma_3, y_3$ 等及其相關邊界條件的線性微分方程式。

對於 γ_1 和 y_1 ，我們得到下列的方程式和邊界條件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy_1}{dx} &= \frac{\gamma_1}{x}, \\ y_1(1) &= 0, \quad \frac{dy_1(1)}{dx} = 0, \quad y_1(\alpha) = 1, \quad \frac{dy_1(\alpha)}{dx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

方程式 (14) 的解答是:

$$\frac{dy_1}{dx} = \gamma_1 \log x + A \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad (15)$$

$$y_1 = \gamma_1 x \log x + (A - \gamma_1)x - A \log x + \gamma_1 - A, \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1-\alpha}{A}, \quad A = \frac{\alpha \log \alpha}{A}, \\ A &= (1-\alpha)^2 - \alpha (\log \alpha)^2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

對於 S_2 , 我們得出下列的方程式和相關的邊界條件:

$$\frac{d^2}{dx^2}(x S_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad (18)$$

$$2\lambda \frac{dS_2(1)}{dx} + S_2(1) = 0, \quad 2\lambda \alpha \frac{dS_2(\alpha)}{dx} + S_2(\alpha) = 0. \quad (19)$$

由方程式 (18), 我們得出:

$$\frac{d}{dx}(x S_2) = \frac{1}{2} \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx + l, \quad (20)$$

$$S_2 = -\frac{1}{2x} \int_x^1 dx' \int_{x'}^1 \left(\frac{dy_1}{dx''}\right)^2 dx'' + l + \frac{m}{x}, \quad (21)$$

$$\frac{dS_2}{dx} = \frac{1}{2x^2} \int_x^1 dx' \int_{x'}^1 \left(\frac{dy_1}{dx''}\right)^2 dx'' + \frac{1}{2x} \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx'}\right)^2 dx' - \frac{m}{x^2},$$

其中 l, m 為積分常數.

$$\begin{aligned} 2\lambda x \frac{dS_2}{dx} + S_2 &= \frac{\lambda}{x} \int_x^1 dx' \int_{x'}^1 \left(\frac{dy_1}{dx''}\right)^2 dx'' + \lambda \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx'}\right)^2 dx' - \frac{2\lambda m}{x} - \\ &\quad - \frac{1}{2x} \int_x^1 dx' \int_{x'}^1 \left(\frac{dy_1}{dx''}\right)^2 dx'' + \frac{m}{x} + l \\ &= \frac{2\lambda - 1}{2x} \int_x^1 dx' \int_{x'}^1 \left(\frac{dy_1}{dx''}\right)^2 dx'' + \lambda \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx'}\right)^2 dx' - (2\lambda - 1) \frac{m}{x} + l. \end{aligned} \quad (22)$$

由邊界條件 (19) 及方程式 (22), 我們得出:

當 $x = 1$,

$$l - (2\lambda - 1)m = 0; \quad (23)$$

當 $x = \alpha$,

$$0 = \frac{2\lambda - 1}{2\alpha} \int_{\alpha}^1 dx \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx'}\right)^2 dx' + \lambda \int_{\alpha}^1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx - (2\lambda - 1) \frac{m}{\alpha} + l. \quad (24)$$

解方程式 (23) 和 (24), 我們得出 l 和 m 的值:

$$m = \frac{l}{2\lambda - 1} = \frac{\alpha}{(2\lambda - 1)(1 - \alpha)} \left[\frac{2\lambda - 1}{2\alpha} \int_{\alpha}^1 dx \int_x^1 \left(\frac{dy_1}{dx'}\right)^2 dx' + \right. \\ \left. + \lambda \int_{\alpha}^1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx \right]. \quad (25)$$

利用部分積分法, 方程式 (25) 可化簡為:

$$m = \frac{l}{2\lambda - 1} = \frac{\alpha}{(2\lambda - 1)(1 - \alpha)} \left[\frac{1 - 2\lambda}{2} \int_{\alpha}^1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda - 1}{2\alpha} \int_{\alpha}^1 x \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx + \lambda \int_{\alpha}^1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx \right] \\ = \frac{\alpha}{2(2\lambda - 1)(1 - \alpha)} \int_{\alpha}^1 \left[1 + (2\lambda - 1) \frac{x}{\alpha} \right] \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx, \quad (26)$$

$$S_2 = \int_x^1 \frac{1}{2} \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2x} \int_x^1 x \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 dx + l + \frac{m}{x} \\ = \frac{1}{2} \int_x^1 \left(1 - \frac{t}{x}\right) \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 dt + l + \frac{m}{x}. \quad (27)$$

利用方程式 (15) 並將 $\frac{dy_1}{dx}$ 代入方程式 (26) 和 (27), 我們得到:

$$S_2 = -\frac{\gamma_1^2}{4}x(\log x)^2 + \gamma_1\left(\frac{3}{4}\gamma_1 - \frac{A}{2}\right)x\log x - \left(\frac{7}{8}\gamma_1^2 - \frac{3}{4}A\gamma_1 + \frac{A^2}{4}\right)x + \\ + \frac{A\gamma_1}{2}(\log x)^3 - (A\gamma_1 - A^2)\log x + B - C + \frac{A^2}{2}\frac{\log x}{x} + \frac{C}{(1-2\lambda)x}, \quad (28)$$

其中

$$B = \left(\frac{7}{8} + \frac{\lambda}{4}\right)\gamma_1^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{4}\right)A\gamma_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\lambda\right)A^2, \quad (29)$$

$$C = \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[\left(\frac{7}{8} + \frac{\lambda}{4}\right)(1-\alpha)\gamma_1^2 + \frac{5}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)A\gamma_1\log\alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{1-\gamma}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)A^2\log\alpha \right]. \quad (30)$$

對於 γ_3, y_3 我們得出下列的方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2}x\frac{d\gamma_3}{dx} = S_2\frac{d\gamma_1}{dx} + \frac{\gamma_3}{x}, \quad (31)$$

$$\gamma_3(1) = \frac{d\gamma_3(1)}{dx} = \gamma_3(\alpha) = \frac{d\gamma_3(\alpha)}{dx} = 0. \quad (32)$$

由 (31), 我們得出:

$$\frac{d}{dx}x\frac{d\gamma_3}{dx} = \int_1^x S_2\left(\frac{d\gamma_1}{dx'}\right)dx' + \gamma_3\log x + N,$$

$$\frac{d\gamma_3}{dx} = \frac{1}{x}\int_1^x dx'\int_1^{x'} S_2\left(\frac{d\gamma_1}{dx''}\right)dx'' + \frac{\tau}{x} + \gamma_3\log x + \eta, \quad (33)$$

$$\gamma_3 = \int_1^x \frac{dx'}{x'} \int_1^{x'} dx'' \int_1^{x''} S_2\left(\frac{d\gamma_1}{dx'''}\right)dx''' + \tau\log x + \gamma_3(x\log x - x) + \\ + \eta x + U, \quad (34)$$

其中 N, η, U 和 τ 均為積分常數.

當 $x=1$ 時, $\gamma_3 = \frac{d\gamma_3}{dx} = 0$, 我們得到:

$$\eta + \tau = 0, \quad (35)$$

$$U + \eta - \gamma_3 = 0. \quad (36)$$

當 $x=\alpha$ 時, $\gamma_3 = \frac{d\gamma_3}{dx} = 0$,

$$O = \int_1^\alpha dx \int_1^x S_2 \left(\frac{d\gamma_1}{dx'} \right) dx' + \frac{\tau}{\alpha} + \gamma_3 \log \alpha + \eta, \quad (37)$$

$$O = \int_1^\alpha \frac{dx}{x} \int_1^x dx' \int_1^{x'} S_2 \left(\frac{d\gamma_1}{dx''} \right) dx'' + \tau \log \alpha + \gamma_3 (\alpha \log \alpha - \alpha) +$$

$$+ \eta \alpha + U, \quad (38)$$

由方程式 (35) 和 (36),

$$\tau = -\tau,$$

$$\gamma_3 = U + \tau,$$

將上面的 τ 和 γ_3 代入方程式 (37) 和 (38) 中, 並令

$$I_1 = \int_1^\alpha dx \int_1^x S_2 \left(\frac{d\gamma_1}{dx'} \right) dx', \quad (39)$$

$$I_2 = \int_1^\alpha \frac{dx}{x} \int_1^x dx' \int_1^{x'} S_2 \left(\frac{d\gamma_1}{dx''} \right) dx''. \quad (40)$$

我們可得到:

$$-\frac{\eta}{\alpha} (\alpha + \alpha \log \alpha - 1) + U \log \alpha + I_1 = 0, \quad (41)$$

$$\eta (\alpha - 1) \log \alpha + (1 + \alpha \log \alpha - \alpha) U + I_2 = 0. \quad (42)$$

解方程式 (41) 和 (42), 我們得到:

$$\eta = \alpha [(\alpha \log \alpha - \alpha + 1) I_1 - \log \alpha I_2] / A, \quad (43)$$

$$U = [(\alpha \log \alpha + \alpha - 1) I_2 - (\alpha^2 - \alpha) \log \alpha I_1] / A. \quad (44)$$

假如我們求出方程式 (34), (39) 和 (40) 中的積分值以及積分常數 U, η, τ 並將這些值代入方程式 (34), 經過了化簡的步驟, 最後求出下面的結果:

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & -\frac{\gamma_1^2}{72} x^3 (\log x)^3 + \left(\frac{15}{144} A^2 \gamma_1 - \frac{A \gamma_1^2}{24} \right) x^3 (\log x)^2 - \\ & - \left(\frac{2}{9} \gamma_1^3 - \frac{13}{72} A \gamma_1^2 + \frac{A^2 \gamma_1}{24} \right) x^3 \log x + \\ & + \left(\frac{119}{648} \gamma_1^3 - \frac{2}{9} A \gamma_1^2 + \frac{13}{144} A^2 \gamma_1 - \frac{A^3}{72} \right) x^3 + \frac{A \gamma_1^2}{8} x^2 (\log x)^3 - \\ & - \left(\frac{15}{16} A \gamma_1^2 - \frac{3}{8} A^2 \gamma_1 \right) x^2 (\log x)^2 + \\ & + \left[\frac{21}{8} A \gamma_1^2 - \frac{13}{8} A^2 \gamma_1 + \frac{A^3}{4} + \frac{1}{4} (B - C) \gamma_1 \right] x^2 \log x + \\ & + \left[\frac{17}{8} A^2 \gamma_1 - \frac{23}{8} A \gamma_1^2 - \frac{7}{16} A^3 + \frac{1}{4} (B - C) (A - 2 \gamma_1) \right] x^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{C \gamma_1}{1 - 2\lambda} + A^2 \gamma_1 - \frac{A^3}{2} \right) x (\log x)^2 + \\ & + \left[\frac{2 A C (1 - \lambda) - 2 C \gamma_1}{1 - 2\lambda} - A B - 2 A^2 \gamma_1 + A^3 \right] x \log x - \\ & - \left[\frac{4 A C (1 - \lambda) - 3 C \gamma_1}{1 - 2\lambda} - 2 A B - 3 A^2 \gamma_1 + \frac{3}{2} A^3 \right] x + \frac{1}{12} A^3 (\log x)^3 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{A C}{1 - 2\lambda} + \frac{A^3}{2} \right] (\log x)^2 + \gamma_3 (x \log x - 2x) + D x + E \log x + F, \quad (45) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{47}{324}(\alpha^3 - 1)\gamma_1^4 + \left(\frac{5}{27} - \frac{41}{216}\alpha^2\right)A\gamma_1^3 + \left(\frac{179}{36} - \frac{85}{18}\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right)A^2\gamma_1^2 + \\ & + \left[\frac{3}{8} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8} + \frac{(\log \alpha)^3}{6}\right]A^3\gamma_1 + \left[\frac{7}{6} + \frac{\log \alpha}{4} - \frac{3}{4}\alpha + \right. \\ & + \left.\frac{1}{\alpha}\left(\frac{5}{4}\log \alpha - \frac{23}{12}\right)\right]A^4 + \frac{1}{4}(1 - \alpha)(B - C)\gamma_1[(1 + \alpha)\gamma_1 + 2A] + \\ & + \frac{C}{1 - 2\lambda}\left[2(\lambda - 1)A + \gamma_1^2(\alpha \log \alpha - 2\alpha + 2) + \frac{A^2 \log \alpha}{\alpha}\right] + AB, \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = & \frac{71}{216}(\alpha - \alpha^3)\gamma_1^4 + \left[\frac{47}{324}(1 - \alpha^3) + \frac{65}{18}(\alpha^2 - \alpha)\right]A\gamma_1^3 - \\ & - \left(\frac{37}{72} + \frac{3}{4}\alpha - \frac{91}{72}\alpha^2\right)A^2\gamma_1^2 + \left[\frac{85}{72} - \frac{19}{18}\alpha - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{1}{8}\alpha(\log \alpha)^2\right]A^3\gamma_1 + \\ & + \left[\frac{11}{8} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{1}{12}(\log \alpha)^3 - \frac{1}{4\alpha}(5 + \log \alpha)\right]A^4 + \\ & + \frac{1}{4}(B - C)(1 - \alpha)[A^2 - 3\alpha\gamma_1^2 - (1 + \alpha)A\gamma_1] + \\ & + \frac{C}{1 - 2\lambda}\log \alpha \left[\left(\frac{\log \alpha}{2} - 1\right)A^2 - (1 + \alpha)A\gamma_1 - \left(1 + \frac{\log \alpha}{2}\right)\alpha\gamma_1^2\right], \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = & \frac{119}{648}\gamma_1^3 - \frac{223}{72}A\gamma_1^2 + \frac{751}{144}A^2\gamma_1 - \frac{281}{144}A^3 + \frac{1}{4}(B - C)(A - 2\gamma_1) + \\ & + 2AB - \frac{4AC(1 - \lambda) - 3C\gamma_1}{1 - 2\lambda}, \quad (48) \end{aligned}$$

$$L = \frac{71}{216}\gamma_1^3 - \frac{65}{18}A\gamma_1^2 + \frac{185}{18}A^2\gamma_1 - \frac{7}{6}A^3 + \frac{1}{2}(B - C)\left(A - \frac{3}{2}\gamma_1\right) +$$

$$+ AB - \frac{2AC(1-\lambda) - C\gamma_1}{1-2\lambda}, \quad (49)$$

$$D = \gamma_3 - E - L, \quad (50)$$

$$F = \gamma_3 + E + L - W. \quad (51)$$

$\gamma_1, A, (B-C), C, \gamma_3, \gamma_3, E, D$, 和 F 的值對不同的 $\frac{a}{b}$ ($\mu = 0.300$) 均列在表 1 中, 其中的 γ_3 是阿氏得到相當 γ_3 的值.

四、計算應力的公式

下面的方程式是對於計算應力非常有用的[註 4]:

$$N_r = h\sigma'_r, \quad N_t = h\sigma'_t, \quad (52)$$

$$N_t = \frac{d}{dr}(rN_r), \quad (53)$$

$$\sigma_r'' = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad \sigma_t'' = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (54)$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (55)$$

這裏 N_t 是切線方向薄膜應力 (tangential membrane stress), σ_r'', σ_t'' 是徑向和切線方向彎曲應力, z 是與中心面的距離, M_r, M_t 是徑向和切線方向的彎曲力矩.

離中心距離為 z 的應力是 σ'_r, σ'_t 和 σ_r'', σ_t'' 的和, 也就是

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma_r'', \quad \sigma_t = \sigma'_t + \sigma_t''. \quad (56)$$

由方程式 (5), 將上述各方程式轉換成無因次形式, 我們得到:

$$N_r = \frac{SEh^3}{3(1-\mu^2)a^2} = h\sigma'_r, \quad (57)$$

表 I

$\frac{b}{a}$	γ_1	A	B-C	C	E	D	F	γ_3	γ'_3
0	1.000	0	1.232	0	0	0.584	0.174	0.163	0.0812
0.2	1.895	— 0.254	3.946	— 0.415	— 0.227	1.268	— 0.554	0.418	0.285
0.22	2.061	— 0.317	4.605	— 0.617	— 0.428	0.827	— 1.061	0.463	0.317
0.24	2.250	— 0.392	5.399	— 0.903	— 0.778	— 0.0306	— 1.938	0.515	0.352
0.26	2.462	— 0.481	6.357	— 1.506	— 1.376	— 1.557	— 3.426	0.569	0.390
0.28	2.701	— 0.585	7.520	— 1.868	— 2.385	— 4.143	— 5.915	0.633	0.434
0.30	2.971	— 0.708	8.936	— 2.650	— 4.072	— 8.405	— 10.040	0.703	0.484
0.32	3.277	— 0.852	10.668	— 3.736	— 6.870	— 15.295	— 16.822	0.785	0.540
0.34	3.624	— 1.022	12.798	— 6.242	— 11.490	— 26.321	— 27.928	0.878	0.600
0.36	4.020	— 1.223	15.428	— 7.331	— 19.100	— 43.852	— 46.077	0.984	0.674
0.38	4.473	— 1.461	18.695	— 10.233	— 31.626	— 71.651	— 75.719	1.109	0.756
0.40	4.992	— 1.743	22.776	— 14.271	— 52.264	— 115.742	— 124.204	1.238	0.851
0.50	9.141	— 4.224	67.084	— 77.172	— 664.462	— 1244.926	— 1256.184	3.262	1.607
0.60	18.911	— 10.868	241.952	— 479.859	— 10355.488	— 16271.319	— 23134.315	48.982	3.38
0.70	47.421	— 32.501	1196.660	— 4081.160	— 268546	— 344430	— 561637	3865.056	8.59
0.80	169.029	— 134.108	10595.97	— 66701.521	— 17159156	— 18979654	— 35632309	1228192	30.8

$$N_t = \frac{E h^3}{3(1-\mu^2)a^2} \left(S + 2x \frac{dS}{dx} \right) = h \sigma'_t, \quad (58)$$

$$M_r = - \frac{E h^4}{6(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2} \left[2x \frac{d^2\gamma}{dx^2} + (1+\mu) \frac{d\gamma}{dx} \right], \quad (59)$$

$$M_t = - \frac{E h^4}{6(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2} \left[2\mu x \frac{d^2\gamma}{dx^2} + (1+\mu) \frac{d\gamma}{dx} \right], \quad (60)$$

$$\sigma''_r = - \frac{E h^2}{(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2} \left[2x \frac{d^2\gamma}{dx^2} + (1+\mu) \frac{d\gamma}{dx} \right], \quad \left(z = \frac{h}{2} \right), \quad (61)$$

$$\sigma''_t = - \frac{E h^2}{(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2} \left[(1+\mu) \frac{d\gamma}{dx} + 2\mu x \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right], \quad \left(z = \frac{h}{2} \right). \quad (62)$$

我們令

$$\Sigma'_r = \frac{3(1-\mu^2)a^2}{E h^2} \sigma'_r, \quad (63)$$

$$\Sigma'_t = \frac{3(1-\mu^2)a^2}{E h^2} \sigma'_t, \quad (64)$$

$$\Sigma''_r = - \frac{(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2}{E h^2} \sigma''_r, \quad (65)$$

$$\Sigma''_t = - \frac{(1-\mu^2)\sqrt{3}(1-\mu^2)a^2}{E h^2} \sigma''_t, \quad (66)$$

然後便得出下列的方程式:

$$\Sigma'_r = S, \quad (67)$$

$$\Sigma'_t = S + 2x \frac{dS}{dx}, \quad (68)$$

$$\sum_r'' = 2x \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + (1 + \mu) \frac{d\gamma}{dx}, \quad (69)$$

$$\sum_t'' = (1 + \mu) \frac{d\gamma}{dx} + 2\mu x \frac{d^2 \gamma}{dx^2}. \quad (70)$$

由這些方程式，我們可求出在邊緣的應力分量。

在外邊時，也即 $x = 1$ ，

$$\sum_t'(1) = S(1), \quad (71)$$

$$\sum_t'(1) = S(1) + 2 \frac{dS(1)}{dx}, \quad (72)$$

$$\sum_r''(1) = 2 \frac{d^2 \gamma(1)}{dx^2}, \quad (73)$$

$$\sum_t''(1) = 2\mu \frac{d^2 \gamma(1)}{dx^2}. \quad (74)$$

在內邊時，亦即 $x = \alpha$ ，

$$\sum_r'(\alpha) = S(\alpha), \quad (75)$$

$$\sum_t'(\alpha) = S(\alpha) + 2\alpha \frac{dS(\alpha)}{dx}, \quad (76)$$

$$\sum_r''(\alpha) = 2\alpha \frac{d^2 \gamma(\alpha)}{dx^2}, \quad (77)$$

$$\sum_t''(\alpha) = 2\mu \alpha \frac{d^2 \gamma(\alpha)}{dx^2}. \quad (78)$$

由方程式 (13), (15), (28) 和 (45)，我們可求出 $\frac{dS}{dx}$ 和 $\frac{d^2 \gamma}{dx^2}$ 的式子來：

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} = Y_M^3 \frac{dS_2}{dx} = Y_M^3 \left[-\frac{\gamma_1^2}{4} (\log x)^2 + \left(\frac{\gamma_1^3}{4} - \frac{A\gamma_1}{2} \right) \log x - \right. \\
\left. - \left(\frac{\gamma_1^2}{8} - \frac{A\gamma_1}{4} + \frac{A^2}{4} \right) + A\gamma_1 \frac{\log x}{x} - (A\gamma_1 - A^2) \frac{1}{x} + \right. \\
\left. + \frac{A^2}{2x^2} - \frac{A^2 \log x}{2x^2} - \frac{C}{x^2} \right], \quad (79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\gamma}{dx^2} = Y_M \frac{d^2\gamma_1}{dx^2} - Y_M^3 \frac{d^3\gamma_1}{dx^3} = Y_M \left(\frac{\gamma_1}{x} + \frac{A}{x^2} \right) + Y_M^3 \left\{ -\frac{\gamma_1^3}{12} x (\log x)^3 + \right. \\
+ \left(\frac{\gamma_1^3}{3} - \frac{A\gamma_1^2}{4} \right) x (\log x)^2 - \left(\frac{37}{72} \gamma_1^3 - \frac{2}{3} A\gamma_1^2 + \frac{1}{4} A^2 \gamma_1 \right) x \log x + \\
+ \left(\frac{37}{216} \gamma_1^3 - \frac{37}{72} A\gamma_1^2 + \frac{A^2\gamma_1}{3} - \frac{A^3}{12} \right) x + \frac{A\gamma_1^2}{4} (\log x)^3 + \\
+ \frac{3}{4} A\gamma_1 (A - \gamma_1) (\log x)^2 + \left[\frac{3}{8} A\gamma_1^2 - A^2\gamma_1 + \frac{A^3}{2} + \frac{1}{2} (B - C) \right] \log x + \\
+ \left[\frac{1}{2} (B - C) \left(A - \frac{\gamma_1}{2} \right) + \frac{1}{4} A\gamma_1^2 + \frac{1}{8} A^2\gamma_1 - \frac{A^3}{8} \right] + \\
+ \left(\frac{C\gamma_1}{1-2\lambda} + A^2\gamma_1 - \frac{A^3}{2} \right) \frac{\log x}{x} + \left[\frac{2AC(1-\lambda) - C\gamma_1 - AB - \right. \\
\left. - A^2\gamma_1 + \frac{A^3}{2} \right] \frac{1}{x} + \frac{A^3 \log x}{2x^2} - \frac{A^3 (\log x)^2}{4x} + \left(\frac{AC}{1-2\lambda} + \frac{A^3}{2} - E \right) \frac{1}{x^2} - \\
\left. - \left(\frac{AC}{1-2\lambda} + \frac{A^3}{2} \right) \frac{\log x}{x^2} + \frac{\gamma_3}{x} \right\}. \quad (80)
\end{aligned}$$

五、討 論

我們在前面已經指出本文和阿氏所得結果的差別。本文所得的關於一均勻厚度兩邊固定的環形薄板的最大撓度和壓力的關係式是：

$$p = \gamma_1 Y_M + \gamma_3 Y_M^3, \quad (81)$$

而阿氏所得的是：

$$p = \gamma'_3 Y_M^3. \quad (82)$$

假如 Y_M 較小時，在 (81) 式中的直線項 $\gamma_1 Y_M$ 佔比較重要的位置，但當 Y_M 增加時， $\gamma_3 Y_M^3$ 項便愈來愈重要了。直線項的效應是使得 $p-Y_M$ 曲線開始的部分比較平直，因此當 Y_M 至相當大時，(81) 式便漸近於 $p = \gamma'_3 Y_M^3$ ，所以我們可用它來和 (82) 式比較。

圖 3 和圖 4 表示在不同比例值 $\frac{b}{a}$ 下， p 對於 Y_M 所得的曲線。圖 5 表示 $\frac{b}{a}$ 對於 γ_3, γ'_3 的曲線。由這些圖中，我們可以看出，在相同的壓力下，阿氏所得的最大撓度要比本文中的大得多，同時當 $\frac{b}{a}$ 增加時，阿氏和本文中所得的最大撓度差數也隨着增加。我們知道在實際情況中，彎曲效應要給平板以某種程度的限制，因此阿氏所得的最大撓度是太大了，當 $\frac{b}{a}$ 增加時，平板兩邊的距離便愈來愈近，因此彎曲效應便更加重要，所以在相同的負荷下，阿氏和本文所得的最大撓度便差別得更大。根據上面的分析，我們得出下面的結論：

在集中負荷下，彎曲效應是很重要的，因此這效應不能略去不計。

當 $\frac{b}{a} = 0$ 時，這便是集中負荷下，邊緣固定的圓薄板問題。胡海昌君曾處理過這問題^[註 6]，本文所得的結果是和他的結果符合的。

[註 6] Hu Hai-chang (胡海昌), Large Deflection of a Clamped Circular Plate under Central Concentrated Load. -unpublished.

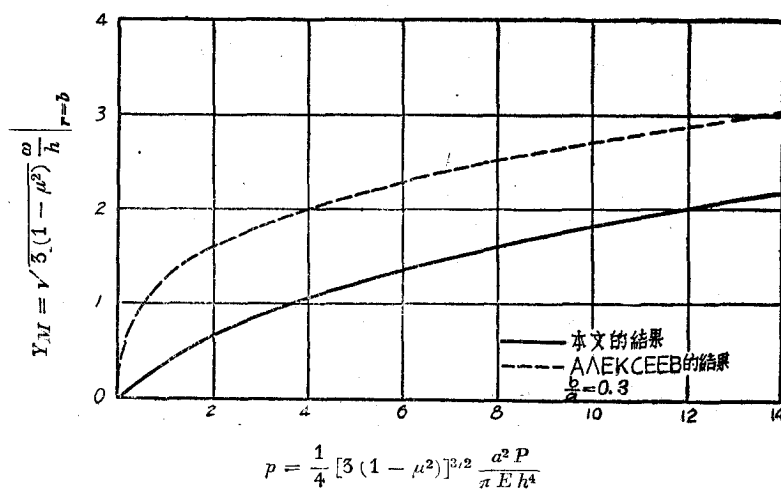


圖 3

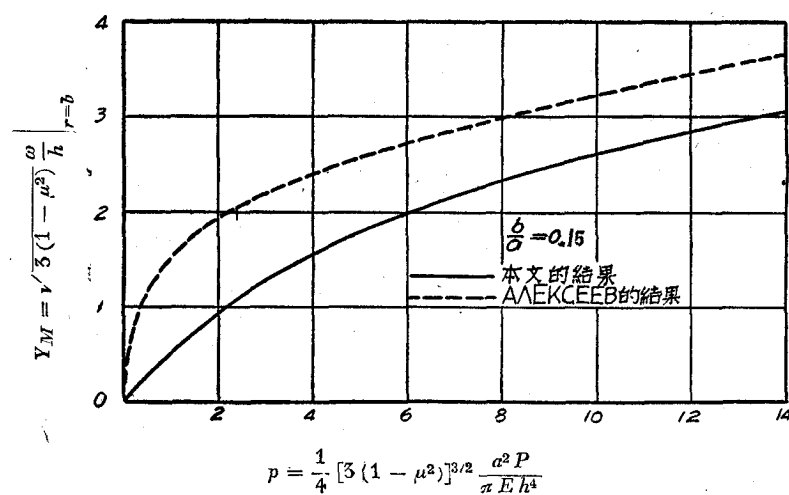


圖 4

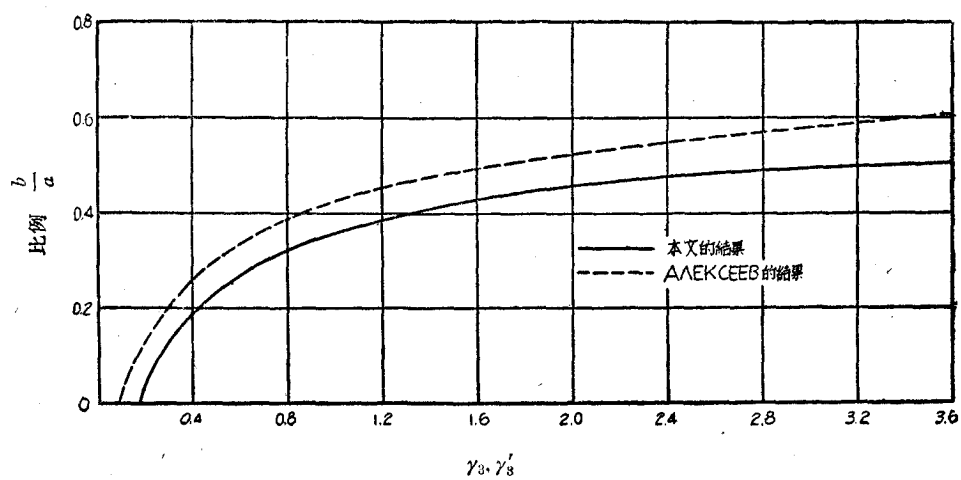


圖 5

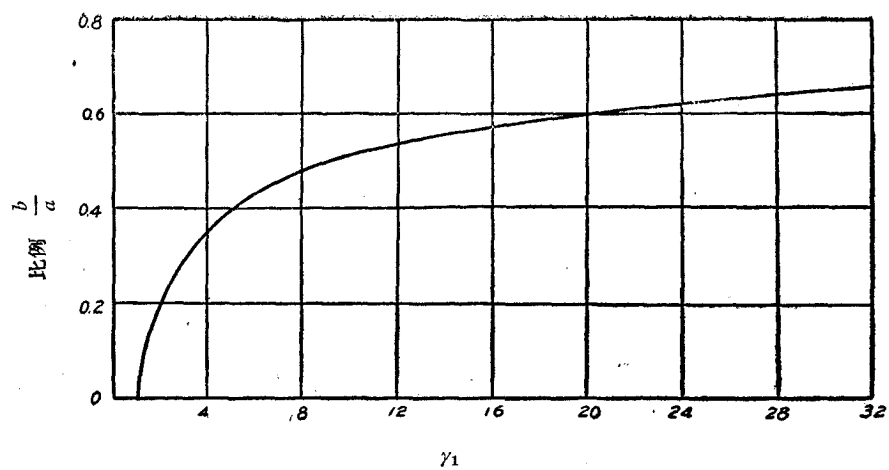


圖 6

圖 6 表示 γ_1 對於 $\frac{b}{a}$ 的曲線。圖 7 表示在不同的 $\frac{b}{a}$ 下 Y_M 對於 p 的曲線。這方法可引伸到其他邊界條件下以 Y_M 為參變數的環形薄板大撓度問題上去。錢偉長教授在完成本文的過程中，給作者以極大的幫助、鼓勵與關懷，謹在這裏向他致以衷心的謝忱。

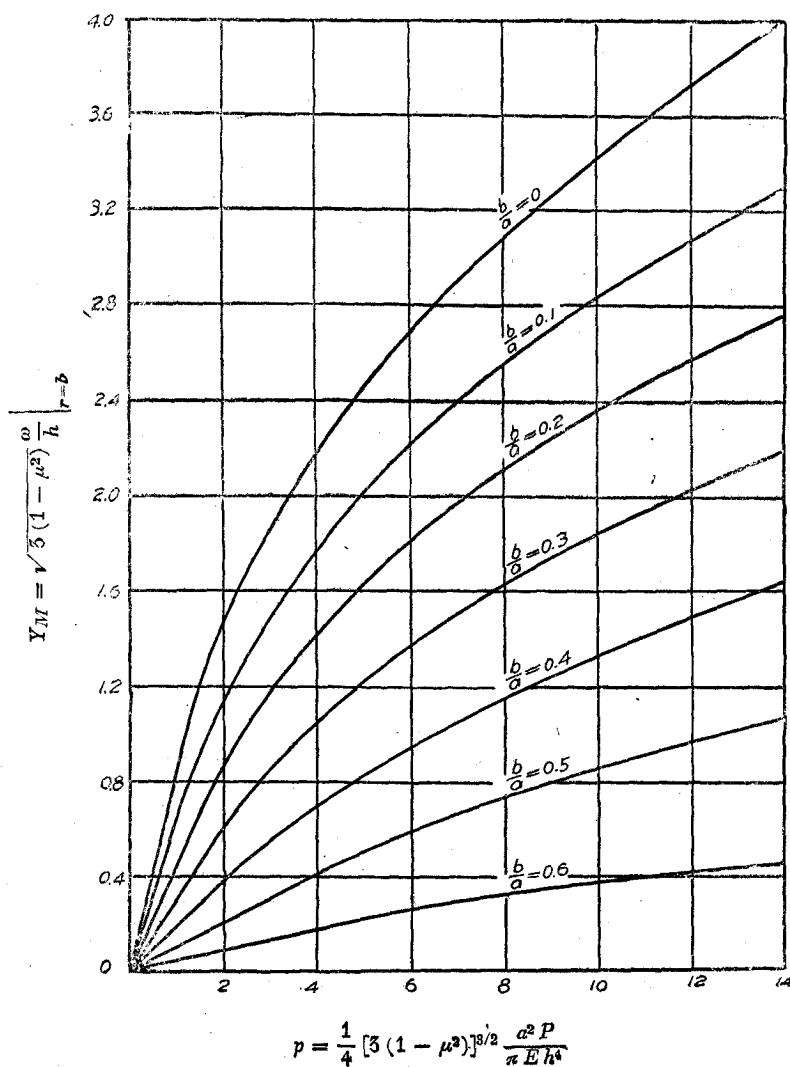


圖 7

LARGE DEFLECTION OF A CIRCULAR PLATE WITH A CIRCULAR HOLE AT THE CENTER*

YEH KAI-YUAN

Tsing Hua University

ABSTRACT

The equation for the large deflection of thin plates established by Th. von Kármán has been well known for many years. But so far there are only a few problems been studied with numerical certainty. S. Levy was the first to apply this equation to solve the problem of a clamped plate under uniform pressure by the method of power series. After this, S. Levy got the solution of the simply supported rectangular plate also under uniform load by the method of double trigonometric series. These two methods used nearly the same procedure of determining the numerical value of the coefficients. But their numerical works are too cumbersome. Lately, W. Z. Chien treated Way's problem again by means of the perturbation method and obtained excellent results.

In this paper, the problem of large deflection of a circular plate with a circular hole at the center is treated with the perturbation method.

Recently, C. A. Алексеев worked out the same problem with the membrane theory, but his results differ greatly from the practical case of a thin plate. The reason of this is chiefly due to his neglecting the effect of bending. The results obtained in this paper are compared with those of Алексеев and discussed. We conclude that under concentrated load, the bending effect is momentous and therefore it cannot be neglected. The problem can be extended to other boundary conditions with the maximum deflection Y_M as parameter.

* Received November 27, 1952.