

不均等的連續樑*

錢 偉 長

(清 華 大 學)

緒 論

均等連續樑的差分方程解法已爲人們所習用。本文利用連分數法求得了任意不均等連續樑的解法。

今設有一連續樑共有 $n + 1$ 個支點，這些支點不一定距離相等，它們把樑分成 n 段。我們給每一個支點以一個數字來代表，自左至右共有 $0, 1, 2, \dots, n$ 等支點。每一段樑的長度自左至右也用 $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$ 等來表示。這些段樑的材料和截面的慣性矩也不一定是相等的，它們將用 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 和 $I_1, I_2 \dots I_n$ 來表示。(圖 1)

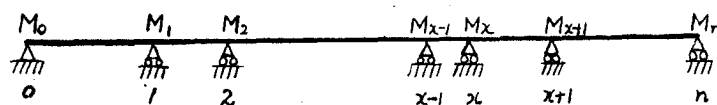


圖 1.

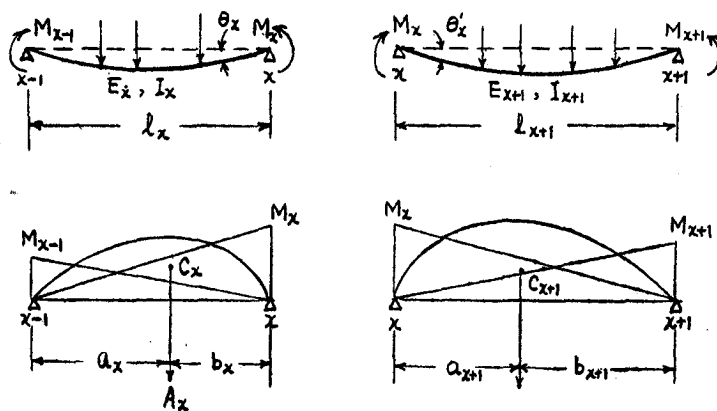


圖 2.

*1953 年 3 月 14 日收到

我們從這些段樑裏，取出有代表性的相鄰兩段來，這兩段共涉及三個支點 $x-1$, x , 及 $x+1$. 在這三個支點上，樑的彎矩分別是 M_{x-1} , M_x 和 M_{x+1} . 讓我們用 A_x 表示作用在第 x 段樑上的負荷所構成的彎矩圖面積，這裏當然把這段樑當作是簡支的。更令 a_x 和 b_x 表示從彎矩面積圖的中心 c_x 到左端支點 $x-1$ 和右端支點 x 的距離。

於是第 x 段樑在 x 支點處的偏轉角度是

$$\theta_x = -\frac{1}{3} \frac{l_x}{E_x I_x} M_x - \frac{1}{6} \frac{l_x}{E_x I_x} M_{x-1} - \frac{A_x a_x}{l_x E_x I_x}. \quad (1)$$

同樣，第 $x+1$ 段樑在 x 支點處的偏轉角度是

$$\theta'_x = \frac{1}{3} \frac{l_{x+1}}{E_{x+1} I_{x+1}} M_x + \frac{1}{6} \frac{l_{x+1}}{E_{x+1} I_{x+1}} M_{x+1} + \frac{A_{x+1} b_{x+1}}{l_{x+1} E_{x+1} I_{x+1}}. \quad (2)$$

這裏凡與時鐘轉針同向的角度都算作是正的。但是第 x 段和第 $x+1$ 段樑在 x 支點是連續的，因此

$$\theta_x = \theta'_x. \quad (3)$$

從這裏我們便可以得到有名的三彎矩方程式：

$$f_x M_{x-1} + 2(f_x + f_{x+1}) M_x + f_{x+1} M_{x+1} = -\frac{6 A_x a_x}{l_x^2} f_x - \frac{6 A_{x+1} b_{x+1}}{l_{x+1}^2} f_{x+1}, \quad (4)$$

在這個式子裏， f_x 是第 x 段樑的抗彎度的倒數，即

$$f_x = \frac{l_x}{E_x I_x} \quad (x = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

方程式 (4) 對於 x 從 1 到 $n-1$ 都適用。凡連續樑兩端是簡支的，則彎矩的頂端條件便是

$$M_0 = 0, \quad M_n = 0. \quad (6a)$$

凡連續樑兩端是插入的，則彎矩在兩端因偏轉角度受有限制而必合於下列頂端條件：

$$\theta'_0 = 0, \quad \theta_n = 0. \quad (6b)$$

凡連續樑的一端是簡支的,另一端是插入的,則樑的頂端條件是

$$M_0 = 0, \quad \theta_n = 0. \quad (6c)$$

第(4)式及第(6a), (6b), (6c)式的任一式在一起組成 $n+1$ 個方程, 這些方程足夠用來決定在 $n+1$ 個支點上的未知彎矩 $M_x (x=0, 1, 2 \cdots n)$. 這種聯立方程的解法當未知數太多時是非常繁複的. 但是這種繁複的困難可以利用連分數法獲得解決.

這問題當樑的各段的抗彎度均勻時, 曾由馮克^[1]用差分方程法詳盡地解答過. 當樑的各段不均等時馮克、史法爾茨曼^[2]曾用等差方程的一般邊界問題解法研究過一些問題. 本文注意利用連分數解法, 因此得到了較為簡單的結果.

一. 齊次差分方程的解法

我們首先將求得同問題的齊次差分方程的解法, 這方程是

$$M_x = p_x M_{x-1} + q_x M_{x-2} \quad (x = 2, 3, \cdots n), \quad (7)$$

這裏的 p_x 和 q_x 分別是

$$p_x = -2 \left(1 + \frac{f_{x-1}}{f_x} \right), \quad q_x = -\frac{f_{x-1}}{f_x}. \quad (8)$$

若連續樑的各段都是均等的, 則 p_x 和 q_x 都化簡為常數, 即

$$p_x = -4, \quad q_x = -1. \quad (9)$$

爲了要找到(7)式的解法, 讓我們利用下列收斂連分數的第 x 項收斂值, 即

[1] Funk, P., "Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen", Verlag Julius Springer, Berlin, 1920.

[2] Шварцман, А. П. (Одесса), "об одном приеме для решения системы уравнений трех моментов". инженерный сборник. том 1, вып. 2 (1946), 127-134.

$$\frac{\beta_x}{\alpha_x} = \frac{q_2}{p_2 +} \frac{q_3}{p_3 +} \frac{q_4}{p_4 +} \dots \frac{q_x}{p_x} \quad (x = 2, 3 \dots n+1). \quad (10)$$

現在讓我們假定第 x 項的收斂值可以寫成

$$\frac{\beta_x}{\alpha_x} = \frac{A q_x + B p_x}{C q_x + D p_x}, \quad (11)$$

這裏的 A, B, C, D 是 x 的未知函數。從這個式子裏，我們很容易看到第 $x+1$ 項的收斂值一定可以寫成

$$\frac{\beta_{x+1}}{\alpha_{x+1}} = \frac{A q_x + B \left(p_x + \frac{q_{x+1}}{p_{x+1}} \right)}{C q_x + D \left(p_x + \frac{q_{x+1}}{p_{x+1}} \right)} = \frac{A q_x p_{x+1} + B (p_x p_{x+1} + q_{x+1})}{C q_x p_{x+1} + D (p_x p_{x+1} + q_{x+1})}. \quad (12)$$

同樣，

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{x+2}}{\alpha_{x+2}} &= \frac{A q_x \left(p_{x+1} + \frac{q_{x+2}}{p_{x+2}} \right) + B \left[p_x \left(p_{x+1} + \frac{q_{x+2}}{p_{x+2}} \right) + q_{x+1} \right]}{C q_x \left(p_{x+1} + \frac{q_{x+2}}{p_{x+2}} \right) + D \left[p_x \left(p_{x+1} + \frac{q_{x+2}}{p_{x+2}} \right) + q_{x+1} \right]} \\ &= \frac{A (q_x p_{x+1} p_{x+2} + q_x q_{x+2}) + B (p_x p_{x+1} p_{x+2} + p_x q_{x+2} + q_{x+1} p_{x+2})}{C (q_x p_{x+1} p_{x+2} + q_x q_{x+2}) + D (p_x p_{x+1} p_{x+2} + p_x q_{x+2} + q_{x+1} p_{x+2})}. \quad (13) \end{aligned}$$

從這裏我們得到了下列三式：

$$\begin{aligned} \beta_x &= A q_x + B p_x, \\ \beta_{x+1} &= A q_x p_{x+1} + B (p_x p_{x+1} + q_{x+1}), \\ \beta_{x+2} &= A (q_x p_{x+1} p_{x+2} + q_x q_{x+2}) + \\ &\quad + B (p_x p_{x+1} p_{x+2} + p_x q_{x+2} + q_{x+1} p_{x+2}). \end{aligned} \quad (14)$$

消去 A 和 B ，我們即得

$$\beta_{x+2} = p_{x+2} \beta_{x+1} + q_{x+2} \beta_x. \quad (15)$$

我們同樣可以得到 α_x, α_{x+1} 和 α_{x+2} 之間的關係，即

$$\alpha_{x+2} = p_{x+2} \alpha_{x+1} + q_{x+2} \alpha_x. \quad (16)$$

從這裏，我們可以看到 α_x 和 β_x 是第 (7) 式的二個特殊解法。但是我們一定要注意第 (10) 式並不能決定 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 等四值。這些數值的決定可以依靠 (15) 及 (16) 兩式，若在這兩式內，讓 $x=0$ ，同時，並用 α_2 及 β_2 在 (10) 式中的定義，我們可得

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0. \quad (17)$$

因此，第 (7) 式的普遍解法當為

$$M_x = P \alpha_x + Q \beta_x, \quad (18)$$

這裏的 P 和 Q 是待定的積分常數。

二. 非齊次差分方程的普遍解法

現在讓我們求得非齊次差分方程 (4) 式的普遍解法。首先讓我們把 (4) 式重寫如下：

$$M_x - p_x M_{x-1} - q_x M_{x-2} = F_x \quad (x = 2, 3 \cdots n), \quad (19)$$

這裏的 F_x 是

$$F_x = -\frac{6 A_{x-1} a_{x-1}}{l_{x-1}^2} \frac{f_{x-1}}{f_x} - \frac{6 A_x b_x}{l_x^2}. \quad (20)$$

讓我們假定 (19) 式的解法如下式：

$$M_x = P_x \alpha_x + Q_x \beta_x.$$

這裏的 α_x, β_x 可以用 (15), (16) 及 (17) 的遞推公式決定， P_x 和 Q_x 則是 x 的待定函數。爲了決定 P_x 和 Q_x 值，我們將用變參數法。首先從 (17) 和 (21) 中，我們得到

$$M_0 = Q_0, \quad M_1 = P_1. \quad (21)$$

我們於是假定下列關係：

$$(P_x - P_{x-1}) \alpha_x + (Q_x - Q_{x-1}) \beta_x = 0. \quad (22)$$

因此從 (21) 式內, 可得

$$M_x - M_{x-1} = P_{x-1} (\alpha_x - \alpha_{x-1}) + Q_{x-1} (\beta_x - \beta_{x-1}). \quad (23)$$

將 (21) 式和 (23) 式內的 x 換成 $x-1$, 我們得到

$$M_{x-1} = P_{x-1} \alpha_{x-1} + Q_{x-1} \beta_{x-1}, \quad (24)$$

$$M_{x-1} - M_{x-2} = P_{x-2} (\alpha_{x-1} - \alpha_{x-2}) + Q_{x-2} (\beta_{x-1} - \beta_{x-2}). \quad (25)$$

更進一步, (19) 式可以把項目重新安排, 寫成下式:

$$(M_x - M_{x-1}) + q_x (M_{x-1} - M_{x-2}) + (1 - p_x - q_x) M_{x-1} = F_x. \quad (26)$$

將 (23), (24) 及 (25) 式代入 (26) 式, 用了 (15) 及 (16) 的關係後, 我們即得

$$(P_{x-1} - P_{x-2}) (\alpha_{x-1} - \alpha_{x-2}) q_x + (Q_{x-1} - Q_{x-2}) (\beta_{x-1} - \beta_{x-2}) q_x = -F_x. \quad (27)$$

把 x 變成 $x+1$, 上式變成

$$(P_x - P_{x-1}) (\alpha_x - \alpha_{x-1}) + (Q_x - Q_{x-1}) (\beta_x - \beta_{x-1}) = -\frac{F_{x+1}}{q_{x+1}}. \quad (28)$$

我們現在有了 (22) 和 (28) 兩式來決定 $P_x - P_{x-1}$ 和 $Q_x - Q_{x-1}$ 兩待定函數, 解出即得

$$\begin{aligned} P_x - P_{x-1} &= \frac{F_{x+1}}{q_{x+1}} \frac{\beta_x}{\alpha_{x-1} \beta_x - \alpha_x \beta_{x-1}}, \\ Q_x - Q_{x-1} &= -\frac{F_{x+1}}{q_{x+1}} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x-1} \beta_x - \alpha_x \beta_{x-1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

把這些公式作連續和, 即得

$$\begin{aligned} P_x &= P_0 + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}}, \\ Q_x &= Q_0 - \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}}, \end{aligned} \quad (30)$$

這裏的 P_0 和 Q_0 是兩個待定的積分常數。因此 (4) 式的普遍解答是

$$M_x = P_0 \alpha_x + Q_0 \beta_x + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (31)$$

這裏的 α_x 和 β_x 已見於 (15), (16) 和 (17) 式; F_i 已見於 (20) 式; q_i 已見於 (8) 式。 P_0 及 Q_0 是靠頂端條件來決定的。

三. 各種頂端條件的連續樑解法

若有一連續樑, 兩端簡支, 則從 (6a) 式, 我們得到決定 P_0 及 Q_0 的兩式:

$$\begin{aligned} M_0 = Q_0 = 0, \\ P_0 = -\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^n \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\alpha_n \beta_i - \alpha_i \beta_n}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

所以簡支的連續樑解法是

$$M_0 = 0, \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} M_x = \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_n - \alpha_i \beta_n}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} - \frac{\alpha_x}{\alpha_n} \sum_{i=1}^n \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_n - \alpha_i \beta_n}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \\ (x = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (33)$$

若有一連續樑, 兩端插入, 則用 (6b) 我們得到

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 = -\frac{6A_1 b_1}{l_1^2} = F'_1, \\ 2M_n + M_{n-1} = -\frac{6A_n a_n}{l_n^2} = F'_n. \end{aligned} \quad (34)$$

把 (21a) 和 (31) 代入 (34), 並用 (17) 後, 我們可以解出 Q_0 和 P_0 . 結果是

$$\begin{aligned} Q_0 = \frac{1}{2\beta_n + \beta_{n-1} - 2(2\alpha_n + \alpha_{n-1})} \left\{ F'_n - (2\alpha_n + \alpha_{n-1}) F'_1 \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i (2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i (2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$P_0 = \frac{1}{2\beta_n + \beta_{n-1} - 2(2\alpha_n + \alpha_{n-1})} \left\{ -2F'_n + (2\beta_n + \beta_{n-1})F'_1 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i(2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i(2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i\alpha_{i-1} - \alpha_i\beta_{i-1}} \right\}. \quad (36)$$

有了這兩個常數，我們從 (31) 式求得 M_1 ，再從 (34) 式求得 M_0 。我們得到

$$M_0 = \frac{1}{2\beta_n + \beta_{n-1} - 2(2\alpha_n + \alpha_{n-1})} \left\{ F'_n - (2\alpha_n + \alpha_{n-1})F'_1 \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i(2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i(2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i\alpha_{i-1} - \alpha_i\beta_{i-1}} \right\}, \quad (37)$$

$$M_x = \frac{1}{2\beta_n + \beta_{n-1} - 2(2\alpha_n + \alpha_{n-1})} \left\{ (\beta_x - 2\alpha_x)F'_x + [\alpha_x(2\beta_n + \beta_{n-1}) \right. \\ \left. - \beta_x(2\alpha_n + \alpha_{n-1})]F'_1 + (2\alpha_x - \beta_x) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i(2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i(2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i\alpha_{i-1} - \alpha_i\beta_{i-1}} \right\} + \\ + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i\alpha_x - \alpha_i\beta_x}{\beta_i\alpha_{i-1} - \alpha_i\beta_{i-1}}. \quad (38)$$

現在讓我們來研究一端簡支一端插入的連續樑。這種樑的頂端條件 (6c) 給我們下列關係：

$$M_0 = 0,$$

$$2M_n + M_{n-1} = -\frac{6A_n a_n}{l_n^2} = F'_n. \quad (39)$$

從這兩個式內，求得 P_0 及 Q_0 ：

$$Q_0 = 0,$$

$$P_0 = \frac{1}{2\alpha_n + \alpha_{n-1}} \left\{ F'_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i(2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i(2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i\alpha_{i-1} - \alpha_i\beta_{i-1}} \right\}. \quad (40)$$

所以一端簡支一端插入的連續樑的各點彎矩為

$$M_0 = 0,$$

$$M_x = \frac{\alpha_x}{2\alpha_n + \alpha_{n-1}} \left\{ F'_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i (2\alpha_n + \alpha_{n-1}) - \alpha_i (2\beta_n + \beta_{n-1})}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \right\} + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}}. \quad (41)$$

四. 簡支連續樑的計算例題

今設有下列連續樑: (如圖 3)

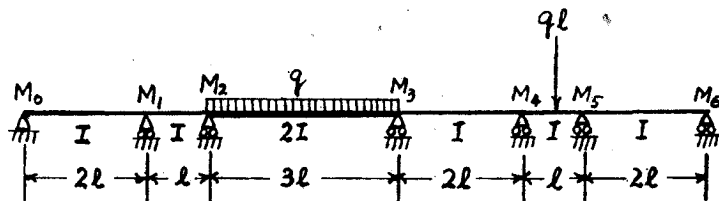


圖-3.

在這個例裏, A_x , a_x 及 b_x 根據定義各為下列各值:

	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
A_x	0	0	$\frac{9}{4} q l^3$	0	$\frac{1}{8} q l^3$	0
a_x	—	—	$\frac{3}{2} l$	—	$\frac{1}{2} l$	—
b_x	—	—	$\frac{3}{2} l$	—	$\frac{1}{2} l$	—

從 (5) 及 (21), 我們求得 f_x 及 F_x :

	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
f_x	$2 \frac{l}{EI}$	$\frac{l}{EI}$	$\frac{3}{2} \frac{l}{EI}$	$2 \frac{l}{EI}$	$\frac{l}{EI}$	$2 \frac{l}{EI}$
F_x	0	0	$-\frac{9}{4} q l^2$	$-\frac{27}{16} q l^2$	$-\frac{3}{8} q l^2$	$-\frac{3}{16} q l^2$

從 (8), (15), (16) 及 (17), 求得 $p_x, q_x, \alpha_x, \beta_x$ 等值, 共列如下:

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
q_x	—	—	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$
p_x	—	—	-6	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{2}$	-6	-3
α_x	0	1	-6	$-\frac{58}{3}$	$-\frac{379}{6}$	$\frac{1021}{3}$	$-\frac{11873}{12}$
β_x	1	0	-2	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{131}{6}$	$\frac{353}{3}$	$-\frac{4105}{12}$

我們於是進一步從 (33) 求 M_x . 所以

$$A_i = \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_n - \alpha_i \beta_n}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}} = 0, \frac{1989}{16} q l^2, -\frac{945}{32} q l^2, \frac{9}{8} q l^2, -\frac{3}{16} q l^2, 0.$$

最後結果為:

$$M_x = \begin{matrix} x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & x=4 \\ 0, & \frac{9189}{94984} q l^2, & \frac{23505129}{189968} q l^2 & \frac{35300193}{379936} q l^2 & \frac{34116483}{379936} q l^2 \\ & x=5 & x=6 \\ & \frac{48876291}{379936} q l^2 & 0 \end{matrix}$$

附記：不均等連續樑的數字解法

在前文內, 已指出連分數法解任意不均等連續樑的步驟. 今將這個方法化簡成一般的正確數字解法.

我們首先要肯定: α_i, β_i 是齊次差分方程 (7) 的解法. 若把 $\alpha_0=0, \alpha_1=1$ 代入 (16) 式, 我們可以逐步求得 α_i 的各值, 又若把 $\beta_0=1, \beta_1=0$ 代入 (15) 式, 我們可以逐步求得 β_i 的各值.

其次我們可以求得非齊次差分方程 (19) 一個特解. 爲了簡單起見, 我們可以把這個特解寫成 γ_x , 而 $\gamma_0=\gamma_1=0$. 這個特解可以逐式從 (19) 式算出.

於是不均等連續的一般解立刻可以寫成

$$M_x = P \alpha_x + Q \beta_x + \gamma_x. \quad (42)$$

P 和 Q 為積分常數, 它們可以從相應的頂端條件求得.

今將圖 3 的例, 作一計算. 這個問題的三力矩式為

$$\begin{aligned}
 M_2 + 6M_1 + 2M_0 &= 0, \\
 M_3 + \frac{10}{3}M_2 + \frac{2}{3}M_1 &= -\frac{9}{4}ql^2, \\
 M_4 + \frac{7}{2}M_3 + \frac{3}{4}M_2 &= -\frac{27}{16}ql^2, \\
 M_5 + 6M_4 + 2M_3 &= -\frac{3}{8}ql^2, \\
 M_6 + 3M_5 + \frac{1}{2}M_4 &= -\frac{3}{16}ql^2.
 \end{aligned}$$

從這些式裏, 我們很易計算出 α_x , β_x 及 γ_x .

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
α_x	0	1	-6	$\frac{58}{3}$	$-\frac{379}{6}$	$\frac{1021}{3}$	$-\frac{11873}{12}$
β_x	1	0	-2	$\frac{20}{3}$	$-\frac{131}{6}$	$\frac{353}{3}$	$-\frac{4105}{12}$
γ_x	0	0	0	$-\frac{9}{4}ql^2$	$\frac{99}{16}ql^2$	$-33ql^2$	$\frac{3063}{32}ql^2$

現在進一步用頂端條件決定 (42) 中 P 及 Q 之值:

(A) 兩端簡支: 用 (6a),

$$M_0 = P\alpha_0 + Q\beta_0 + \gamma_0 = 0,$$

$$M_6 = P\alpha_6 + Q\beta_6 + \gamma_6 = 0.$$

所以,

$$Q = 0, \quad P = -\frac{\gamma_6}{\alpha_6} = \frac{9189}{94984}ql^2.$$

這和上法所得相同.

(B) 一端簡支一端插入: 我們得到

$$2M_0 + M_1 = -\frac{6A_1b_1}{l_1^2} = F'_1,$$

$$M_6 = 0.$$

或即：

$$P(2\alpha_0 + \alpha_1) + Q(2\beta_0 + \beta_1) + 2\gamma_0 + \gamma_1 = 0,$$

$$P\alpha_6 + Q\beta_6 + \gamma_6 = 0.$$

所以

$$P = \frac{3063}{26188} q l^2, \quad Q = -\frac{3063}{52376} q l^2.$$

(C) 兩端插入樑：我們用 (34)，即得

$$P + 2Q = 0,$$

$$P(2\alpha_6 + \alpha_5) + Q(2\beta_6 + \beta_5) + 2\gamma_6 + \gamma_5 = 0.$$

解出：

$$P = -2Q = \frac{4\gamma_6 + 2\gamma_5}{2\beta_6 + \beta_5 - 4\alpha_6 - 2\alpha_5} = \frac{845}{7228} q l^2.$$

本法在實質上和連分數解法相同，但運算比較簡單，並可以普遍應用。

CONTINUOUS BEAMS WITH NON-UNIFORM STIFFNESS

CHIEN WEI-ZANG

(Tsing Hua University)

ABSTRACT

In this paper, the method of continued fraction is used for the determination of the bending moments of a continuous beam with non-uniform stiffness.

In the problem of continuous beam, it is required to find the solution of the following set of three-moment equations together with a set of ends conditions:

$$M_x = p_x M_{x-1} + q_x M_{x-2} + F_x \quad (x = 2, 3 \cdots n). \quad (A)$$

Here M_x is the moment at the support no. x , p_x and q_x are quantities denoting the relative stiffness, and F_x is the loading factor.

Let α_x and β_x be the two independent solutions of the homogenous equation

$$M_x = p_x M_{x-1} + q_x M_{x-2}. \quad (B)$$

It can be proved that β_x/α_x is the x -th convergent of the continued fraction

$$\frac{q_2}{p_2 +} \frac{q_3}{p_3 +} \frac{q_4}{p_4 +} \dots$$

That is, if we denote

$$\frac{\beta_x}{\alpha_x} = \frac{q_2}{p_2 +} \frac{q_3}{p_3 +} \dots \frac{q_x}{p_x}, \quad (C)$$

then we have the recurrence formulae

$$\alpha_x = p_x \alpha_{x-1} + q_x \alpha_{x-2}, \quad \beta_x = p_x \beta_{x-1} + q_x \beta_{x-2}. \quad (D)$$

Furthermore, by using the definition of β_2 and α_2 , we obtain from the recurrence formulae

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0. \quad (E)$$

Hence the general solution of the homogenous equation is

$$M_x = P \alpha_x + Q \beta_x \quad (x = 0, 1, 2 \dots n), \quad (F)$$

where P and Q are the two integration constants.

For the solution of the inhomogenous equations of three moments (A), it can be easily proved that the following is a particular solution:

$$M_0 = 0, \quad M_x = \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \quad (x = 1, 2 \dots n). \quad (G)$$

Hence the general solution of equation (A) is given by

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= Q, \\ M_x &= P \alpha_x + Q \beta_x + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \quad (x=1, 2 \dots n), \end{aligned} \right\} \quad (H)$$

where P and Q are constants to be determined by ends conditions.

A straight forward numerical method of solution based upon this method is given at the end of this paper.