

用差分方程式解連續電路問題*

葉 開 沅

(北京大學力學專業)

引 言

目前解電路問題，據作者所知，通常用下列幾種方法：(1) 經典法，(2) 海氏 (Heaviside) 轉換，(3) 富氏 (Fourier) 轉換，和 (4) 拉氏 (Laplace) 轉換；不論用那一種方法，都必須經過解代數聯立方程式的步驟，假如迴線 (loop) 很多的時候，在計算上便非常地繁冗。錢偉長教授應用了差分方程式和連分數的方法解決了連續樑的問題，這種方法的優點是不需要解任何代數聯立方程式便可得到一般解^[1]，因此計算的步驟便變為非常地簡單。這種方法若應用到連續電路問題中去也可獲得滿意的結果。本文便是應用錢偉長教授的方法來解決連續電路問題，它分兩部份來討論：(1) 穩定狀態的連續電路問題；(2) 推廣錢偉長教授的方法至考慮瞬變狀態時的連續電路問題。

一. 電 壓 差 分 方 程 式^[2]

本文所考慮的電路是如圖 1 所示的，便是所謂梯形網絡，一般的濾波器即屬於這種情形。

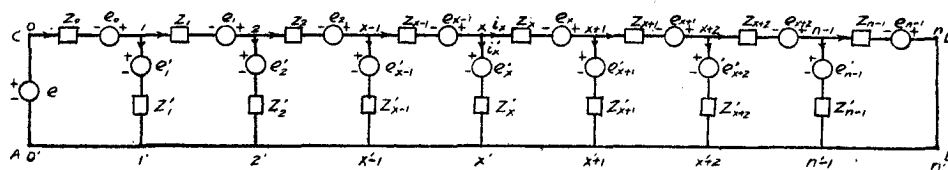


圖 1.

*1953 年 3 月 14 日收到

[1] 錢偉長，不均等的連續樑，物理學報，9 (1953)，(3)，170—180。

[2] 參閱 Kármán and Biot, Mathematical Methods in Engineering, PP. 437—468, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940.

我們令梯形網絡的兩邊分別為 AB 和 CD 、 AB 是一條導體、電勢為零。 CD 上的各節 (node) 分別標以 $0, 1, 2, \dots, x-1, x, x+1, \dots, n-1, n$ ； AB 上的各節分別標以 $0', 1', 2', \dots, x'-1, x', x'+1, \dots, n'-1, n'$ ；在 x 和 $x+1$ 節間通過的電流、所加的電動勢和電阻抗各為 i_x, e_x 和 Z_x ；在 x 和 x' 節間通過的電流、所加的電壓、電阻抗和兩點間的電勢差分別為 i'_x, e'_x, Z'_x 、和 v_x ； AC 端所加的電動勢為 e 、輸出端的負荷包含在 n 和 $n-1$ 節間的分支 (branch) 上；各電流和電動勢的方向如圖 1 所示。

在穩定狀態時，在第 x 節，我們得到

$$i_{x-1} = i_x + i'_x. \quad (1.1)$$

我們知道：

$$i'_x = \frac{v_x - e'_x}{Z'_x}, \quad (1.2)$$

$$i_{x-1} = \frac{v_{x-1} + e_{x-1} - v_x}{Z_{x-1}}, \quad (1.3)$$

$$i_x = \frac{v_x + e_x - v_{x+1}}{Z_x}. \quad (1.4)$$

以 i'_x, i_{x-1}, i_x 代入方程式 (1.1) 中、經過了整理，我們得出了電壓差分方程式

$$v_{x+1} - \left(1 + \frac{Z_x}{Z'_x} + \frac{Z_x}{Z_{x-1}}\right)v_x + \frac{Z_x}{Z_{x-1}}v_{x-1} = e_x - \frac{Z_x}{Z_{x-1}}e_{x-1} - \frac{Z_x}{Z'_x}e'_x. \quad (1.5)$$

方程式 (1.5) 對於從 1 至 $n-1$ 的全部 x 均適合；在 AC 和 BD 兩端， v_x 須適合下面的條件：

$$v_0 = e, \quad v_n = 0. \quad (1.6)$$

方程式 (1.5) 和 (1.6) 一共有 $n+1$ 個方程式，包含了 $n+1$ 個未知電壓，因此是可解的。但是要解這方程組並不是一樁簡單的事情，尤其當迴線多的時候。假如我們用了連分數的方法這種困難便可克服。

方程式 (1.5) 也可寫成下列的形式：

$$v_x - p_x v_{x-1} - q_x v_{x-2} = F_x, \quad (x = 2, 3 \cdots n) \quad (1.7)$$

其中

$$p_x = 1 + \frac{Z_{x-1}}{Z'_{x-1}} + \frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}}, \quad (1.8)$$

$$q_x = -\frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}}, \quad (1.9)$$

$$F_x = e_{x-1} - \frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}} e_{x-2} - \frac{Z_{x-1}}{Z'_{x-1}} e'_{x-1}. \quad (1.10)$$

方程式 (1.7) 的普遍解是^[1]

$$v_x = P_0 \alpha_x + Q_0 \beta_x + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}}, \quad (1.11)$$

其中 α_x 和 β_x 是由下列方程式所規定的:

$$\alpha_{x+2} = p_{x+2} \alpha_{x+1} + q_{x+2} \alpha_x, \quad (1.12)$$

$$\beta_{x+2} = p_{x+2} \beta_{x+1} + q_{x+2} \beta_x, \quad (1.13)$$

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0; \quad (1.14)$$

P_0 和 Q_0 是待定常數, 可由輸出端和輸入端的條件 (1.6) 所決定, 它們的值是

$$Q_0 = e,$$

$$P_0 = -\frac{1}{\alpha_n} \left[\beta_n e + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \alpha_n - \alpha_i \beta_n}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \right]. \quad (1.15)$$

〔例一〕 求解下列的電路:

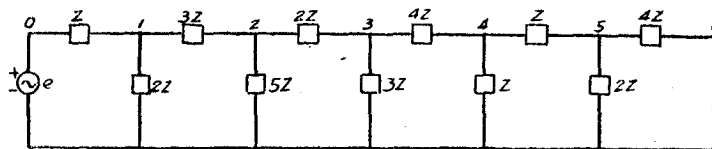


圖 2.

已給

$$Z_0 = Z, Z_1 = 3Z, Z_2 = 2Z, Z_3 = 4Z, Z_4 = Z, Z_5 = 4Z;$$

$$Z'_1 = 2Z, Z'_2 = 5Z, Z'_3 = 3Z, Z'_4 = Z, Z'_5 = 2Z;$$

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_5 = 0;$$

$$e'_1 = e'_2 = \cdots = e'_5 = 0.$$

將上面各值代入 (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) 中, 即可得到如下的結果:

	p_x	q_x	α_x	β_x	F_x	v_x
$x=1$	—	—	—	—	—	$\frac{1406}{2381}e$
$x=2$	$\frac{11}{2}$	— 3	$\frac{11}{2}$	— 3	0	$\frac{590}{2381}e$
$x=3$	$\frac{31}{15}$	— $\frac{2}{3}$	$\frac{107}{10}$	— $\frac{31}{5}$	0	$\frac{282}{2381}e$
$x=4$	$\frac{13}{3}$	— 2	$\frac{1061}{30}$	— $\frac{313}{15}$	0	$\frac{42}{2381}e$
$x=5$	$\frac{9}{4}$	— $\frac{1}{4}$	$\frac{769}{10}$	— $\frac{227}{5}$	0	$\frac{24}{2381}e$
$x=6$	7	— 4	$\frac{2381}{6}$	— $\frac{703}{3}$	0	0

〔例二〕 求解下列的電路:

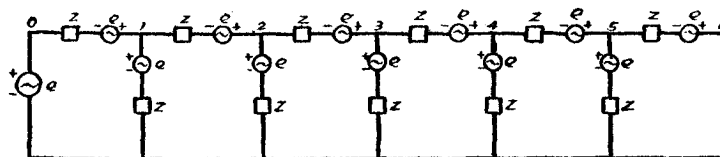


圖 3.

已給

$$Z_0 = Z_1 = \cdots = Z_5 = Z'_1 = Z'_2 = \cdots = Z'_5 = Z;$$

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_5 = e'_1 = \cdots = e'_5 = e.$$

用和例一同樣的方法,我們求得如下的結果:

	p_x	q_x	α_x	β_x	F_x	v_x
$x=1$	—	—	—	—	—	$\frac{143}{144}e$
$x=2$	3	—1	3	—1	— c	$\frac{141}{144}e$
$x=3$	3	—1	8	—3	— c	$\frac{136}{144}e$
$x=4$	3	—1	21	—8	— c	$\frac{123}{144}e$
$x=5$	3	—1	55	—21	— c	$\frac{89}{144}e$
$x=6$	3	—1	144	—55	— c	0

二. 包含瞬變狀態電路問題的解

當我們解圖 1 中的電路考慮瞬變狀態時,可用拉氏轉換把所求電路化為等值穩定狀態的電路,然後用上述方法求得等值電壓,最後用反演拉氏轉換求得所需的結果。

關於拉氏轉換^[3,4,5,6],作者在這裏不再介紹了;不過有一點要聲明,便是本文所用拉氏轉換的各種符號是以 [3] 為準則的。

現在我們來討論如何將包含瞬變狀態的電路轉換為等值的穩定狀態的電路。先用下面的簡單電路來做例子說明。

由圖 4,我們得出:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + e_0 = e(t), \quad (2.1)$$

其中 i_0 為初電流, e_0 為電容器上的初電壓。

[3] Gardner and Barnes, Transients in Linear Systems, Vol. 1, 1942.

[4] Churchill, Modern Operational Mathematics in Engineering, 1944.

[5] Doetsch, G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer, Berlin, 1937.

[6] Widder, D. V., The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

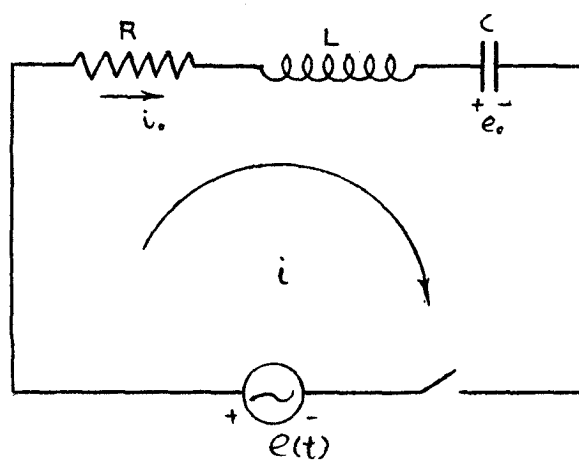


圖 4.

將 (2.1) 用拉氏算符作用在兩端，

$$\mathfrak{L} \left[L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + e_0 \right] = \mathfrak{L} [e(t)]. \quad (2.2)$$

令

$$\mathfrak{L} [i] = I(s), \quad \mathfrak{L} [e(t)] = E(s), \quad (2.3)$$

則上式可寫成

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) I(s) = E(s) - \frac{e_0}{s} + Li_0. \quad (2.4)$$

因此，圖 4 的等值穩定狀態電路便可得出 (圖 5)。

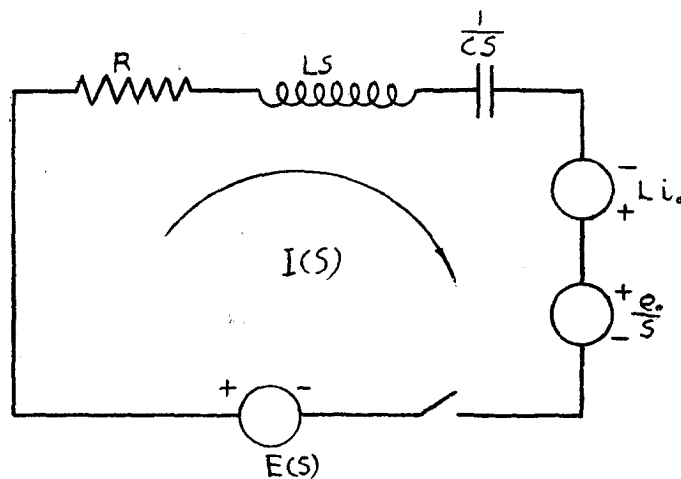


圖 5.

應用上述原理,我們先令

$$\left. \begin{aligned} Z_x(s) &= R_x + L_x s + \frac{1}{s C_x}, \quad (x = 0, 1, \dots, n-1); \\ Z'_x(s) &= R'_x + L'_x s + \frac{1}{s C'_x}, \quad (x = 1, 2, \dots, n-1); \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$E_x(s) = \mathfrak{L}[e_x] + L_x i_{0x} - \frac{e_{0x}}{s}, \quad (x = 0, 1, \dots, n-1); \quad (2.6)$$

$$E'_x(s) = \mathfrak{L}[e'_x] - L'_x i'_{0x} + \frac{e'_{0x}}{s}, \quad (x = 1, 2, \dots, n-1); \quad (2.7)$$

$$\mathfrak{L}[v_x] = V_x(s); \quad (2.8)$$

$$\mathfrak{L}[e(t)] = E(s); \quad (2.9)$$

其中 i_{0x} 和 e_{0x} 是 x 和 $x+1$ 節間的初電流和初電壓,而 i'_{0x} 和 e'_{0x} 是 x 和 x' 節間的初流和初電壓. 將圖 1 中的 v_x , e , e_x , e'_x 分別轉換為 $V_x(s)$, $E(s)$, $E_x(s)$, $E'_x(s)$. 將 Z_x 和 Z'_x 轉換為按 (2.5) 中所規定的值,這樣便得到了它的等值穩定狀態電路,這時的電壓差分方程式是

$$V_x(s) - p_x(s) V_{x-1}(s) - q_x(s) V_{x-2}(s) = F_x(s), \quad (x = 2, 3, \dots, n); \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} p_x(s) &= 1 + \frac{Z_{x-1}(s)}{Z'_{x-1}(s)} + \frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)}, \\ q_x(s) &= -\frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$F_x(s) = E_{x-1}(s) - \frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)} E_{x-2}(s) - \frac{Z_{x-1}(s)}{Z'_{x-1}(s)} E'_{x-1}(s).$$

方程式 (2.10) 的普遍解是

$$\begin{aligned} V_x(s) &= P_0(s) \alpha_x(s) + Q_0(s) \beta_x(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}(s)}{q_{i+1}(s)} \frac{\beta_i(s) \alpha_x(s) - \alpha_i(s) \beta_x(s)}{\alpha_{i-1}(s) \beta_i(s) - \alpha_i(s) \beta_{i-1}(s)}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中

$$P_0(s) = -\frac{1}{\alpha_n(s)} \left[E(s) \beta_n(s) + \sum_{i=1}^n \frac{F_{i+1}(s)}{q_{i+1}(s)} \frac{\beta_i(s) \alpha_n(s) - \alpha_i(s) \beta_n(s)}{\alpha_{i-1}(s) \beta_i(s) - \alpha_i(s) \beta_{i-1}(s)} \right], \quad (2.13)$$

$$Q_0(s) = E(s), \quad (2.14)$$

$$\alpha_{x+2}(s) = p_{x+2}(s) \alpha_{x+1}(s) + q_{x+2}(s) \alpha_x(s), \quad (2.15)$$

$$\beta_{x+2}(s) = p_{x+2}(s) \beta_{x+1}(s) + q_{x+2}(s) \beta_x(s), \quad (2.16)$$

$$\alpha_0(s) = 0, \alpha_1(s) = 1, \beta_0(s) = 1, \beta_1(s) = 0. \quad (2.17)$$

將反演拉氏轉換作用於 (12) 式，這樣便得到所需要的結果，也就是

$$v_x(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_x(s)]. \quad (2.18)$$

ELECTRIC CIRCUIT ANALYSIS BY THE METHOD OF DIFFERENCE EQUATION

YEH KAI-YUAN

(Peking University)

ABSTRACT

The method of difference equation recently employed by Prof. Chien Wei-zang in his treatment of continuous beams is applied here to the solution of electric circuit problem. The superiority of this method over the customary ones—viz. (1) classical method, (2) Heaviside transformation, (3) Fourier transformation, and (4) Laplace transformation,—lies in the fact that the tedious work of solving a large number of simultaneous equations in the customary methods is avoided. The present paper is confined to the problem of the continuous network. The investigation is divided into two parts: (1) the continuous network in steady state, (2) in transient state. In the first part, the chief result is

$$v_x = P_0 \alpha_x + Q_0 \beta_x + \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}}, \quad (A)$$

where v_x is the voltage at the point x , α_x and β_x are defined by the following three equations:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{x+2} &= p_{x+2} \alpha_{x+1} + q_{x+2} \alpha_x, \\ \beta_{x+2} &= p_{x+2} \beta_{x+1} + q_{x+2} \beta_x, \\ \alpha_0 &= 0, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

p_x , q_x , and F_x are defined by

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 1 + \frac{Z_{x-1}}{Z'_{x-1}} + \frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}}, \\ q_x &= -\frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}}, \\ F_x &= e_{x-1} - \frac{Z_{x-1}}{Z_{x-2}} e_{x-2} - \frac{Z_{x-1}}{Z'_{x-1}} e'_{x-1}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{C})$$

e_x and Z_x are the applied voltage and impedance between the nodes x and $x+1$; e'_x and Z'_x are the applied voltage and impedance between the nodes x and x' ; P_0 and Q_0 are integration constants which can be determined by the terminal conditions, *i.e.*

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= e, \\ P_0 &= -\frac{1}{\alpha_n} \left(\beta_n e + \sum_{i=1}^n \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_n - \alpha_i \beta_n}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{D})$$

In the second part, Chien's method is generalized. Here, we use the Laplace transformation to solve the problem of the electric circuit in transient state as shown in Fig. 1. At first, transform this circuit into one in an equivalent steady state and hence obtain the equivalent steady voltage with the previous method. Then we get the required solution by means of the inverse Laplace transformation.