

湍流耗散的研究*

莊 逢 甘

(中國科學院數學研究所)

引 言

泰勒 (Taylor) 在 1935 年提出了等方性湍流理論。應用這一理論的一個具體收穫就是解釋了湍流耗散問題。雖然,迄今為止,仍存在着不少關於湍能耗散定律的爭論,例見[1]。這些不統一的意見之發生,主要是由於對湍流內非線性效應 (或惰性力項,三次相關係數項) 的作用沒有一個準確的估計。柯爾莫果洛夫 (КОЛМОГОРОВ) 在 1941 年^[2] 提出了局部等方性湍流理論,解決了湍流的微結構,同時根據他的理論得出了一個湍能耗散定律。(這也就是後來弗倫基爾 (Frenkiel) 所找到的湍能耗散定律)。林家翹^[3] 也曾得出了湍流初期耗散的定律。他的結果基本上和白乞勒 (Batchelor) 以及更早的泰勒結果相同: 唯一不同的地方就在於林家翹公式內有一常數,這一常數,按照林的解釋,是由於大湍渦缺乏相似性所產生的。林家翹、白乞勒和柯爾莫果洛夫、弗倫基爾得出的結果不同,而且表面上看來是無法統一的。在本文的第一部份作者考慮了湍流的巨結構問題,描述了黏性力的作用祇在流體中個別部份才顯著。巨結構問題的完全解決對一般和湍流有關的實用問題有很大的意義。毫無疑義,湍流搬運的速度,絕大部份要決定於大湍渦的性質。當然,直接負責湍能耗散的應是小湍渦,但是從討

* 1953 年 3 月 30 日收到

- [1] Batchelor, G. K., and Townsend, A. A., A comment on F. N. Frenkiel's Note on Third Order Correlation and Vorticity in Isotropic Turbulence. *Quarterly of Applied Mathematics*, Apr., 1949.
- [2] Колмогоров, А. Н., Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *ДАН СССР*, 1941, Т. 30.
Колмогоров, А. Н., Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. *ДАН СССР*, 1941, Т. 32.
- [3] Karman, Th. von, and Lin C. C. (林家翹) On the Statistical Theory of Turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. II, Academic Press, 1951.

論湍流的巨結構中，也應該可以得出湍能耗散的定律。本文中一個主要結果就是推廣了柯爾莫果洛夫的耗散定律，指出林家翹的定律祇是新的耗散定律一個展開的形式。本文的第二部份是利用謝道夫(Седов)處理相關係數的辦法處理湍譜問題。主要解決了從湍流初期的耗散定律如何過渡到湍流後期的耗散定律，並且還計算了近似的交換函數(transfer function)。在接近湍流後期時，交換函數的作用可相當於一渦黏性係數。

一. 雷諾數很大的等方性湍流耗散

在 1941 年柯爾莫果洛夫^[2]這樣描寫當雷諾數很高時局部等方性理論：在湍流中有一級擾動(first order pulsation)疊加在均流上(均流的特性可用平均速度 $\bar{u}_a$ 表示)。這一級擾動是由一羣直徑和 $l^{(1)} = l$ (l 為普蘭特混合長)同級大小的流體體積的不規則的位移所構成。設這羣流體之間的相對速度為 $v^{(1)}$ 。這一級擾動，當雷諾數很大時也是不穩定的，所以就有二級擾動疊加在一級擾動之上。二級擾動的混合長 $l^{(2)} < l^{(1)}$ ，相對速度 $v^{(2)} < v^{(1)}$ 。這樣繼續不斷的擾動分裂可一直繼續到 n 級(n 是相當大的整數)，當 n 級的雷諾數

$$R^{(n)} = \frac{l^{(n)} v^{(n)}}{\nu}$$

已是很小的時候，在這時候黏性力有顯著的影響。從能量觀點上來看，一級擾動從均流中吸取能量，同時將一部份能量傳遞給更高級的擾動。柯爾莫果洛夫同時提出了二個著名的相似定律，並且說明了湍流結構的基本數量是：在單位時間內單位流體質量的能量耗散(用符號 ϵ 表示)和動黏係數(ν)。

上面這一段說明了湍流中的串級過程(cascade process)，這一過程是一切湍流運動中的標準現象。這一現象之所以發生，作者認為，可以說完全是由於奈維爾史篤克斯方程式中非線性搬運項的作用，而流體的黏性在過程中間不擔當任何主要任務。我們知道非線性項有不對稱的性質(asymmetry character)，因此在運動的流體中常常有很峻險的速度波面的形成；例如激波的形成就是這樣。因此，我們可以把黏性力的影響限制在幾個波面的小鄰域(當然，在這些小鄰域內，速度的陡度很大，黏性力也很大，不可能被略去不計)，而作為整體來看，流體是可以被認為沒有黏性的。實驗曾經指出，含有絕大部份能量的泰勒湍譜 $F_1(\kappa)$

部份有下面一個很好的近似公式^[4]

$$F_1(\kappa) = \frac{A}{1 + c^2 \kappa^2}, \quad (1)$$

A 和 C 為二實驗常數, 和這相當的時間相關函數是

$$\psi(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}. \quad (2)$$

注意上面這一相關係數是一變數量在不同時間帶一有限突變的機變過程 (stochastic process) 的特性, 例如機變電報信號^[5]. 每二連續突變之間所相隔的平均時間和在指數上的常數 τ_0 有關. 這一事實說明了我們可以如下的看湍流結構問題: 湍流是由一系列不同大小體積的流體元素所組成. 它們帶有不同的速度, 不規則地一個跟着一個移動. (當然這種不規則運動依然滿足一定的統計分佈規律). 在它們之間有一層很薄的轉變區域 (transition region) 隔開. 這一轉變區域的厚度是和 ν 有關的, 正如邊界層的厚度和 $\nu^{1/2}$ 成比例及激波的厚度和 ν 成比例. 這也就是說 τ_0 和 ν 有關. 這一轉變區域的存在和討論層流穩定性理論中的內耗散層 (inner dissipation layer) 有相似的地方. 從能量觀點上來說, 非線性項的效應是把低波數部份的能量傳送給高波數部份, 因此就增加了能量耗散. 大體積元素流體分裂成二個或幾個較小的體積元素這樣的串級過程, 增加了轉變區域的個數, 因而也增加了能量耗散. 我們可以認為: 由於分裂而增加的湍能耗散是分裂直接產生的, 因此儘管在下面的湍流結構中完全忽略了黏性, 我們仍可以討論和得出湍能耗散的規律. 應當指出, 我們現在是討論黏性很小的流體, 例如水、空氣; 或者更確切一些, 我們假定湍流雷諾數是很大的; 不然, 我們就無法將黏性的影響限制在個別的局部的區域.

我們考慮不可壓縮性流體的均勻等方性湍流運動. 均速度為零. 在雷諾數很高時, 流動不可能是穩定的. 除去有均流或其他人為擾動可繼續不斷地供給湍流漲落的能量的情況以外, 大湍渦的運動是不可能在統計定常情況下進行的. 我們假設沒有人為擾動. 為了考慮這種不定常性, 我們可很合理地引進一個數

[4] Dryden, H. L., A Review of the Statistical Theory of Turbulence. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1943, Vol. I.

[5] Rice, S. O., Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell System Technical Journal*, 1944.

量,單位時間內湍能耗散率的變化 $\left| \frac{d\epsilon}{dt} \right|$, 作為和 ϵ 一起的兩個基本特性數量. 很顯明的, $\left| \frac{d\epsilon}{dt} \right|$ 應是大湍渦的特性. 事實上,進一步的分析表明了它是和均方湍渦 (vorticity) 強度的耗散有關. 於是,我們有作為一個柯爾莫果洛夫相似定理補充的相似定理:

“在等方性湍流內的巨結構 (即大湍渦的特性) 的分佈函數可以由 ϵ 和 $\left| \frac{d\epsilon}{dt} \right|$ 唯一地點決定”.

根據因次分析,我們可引進如下的特性長度 L 和特性速度 V (嚴格一些說 V 是特性位相速度):

$$L = \epsilon^2 (-\dot{\epsilon})^{-3/2}, \quad (3.1)$$

和

$$V = \epsilon (-\dot{\epsilon})^{-1/2}. \quad (3.2)$$

這樣利用柯爾莫果洛夫的符號,湍流結構函數 $B_{aa}(r)$ 和 $B_{aaa}(r)$, 在 r 不比 λ (泰勒的微標度) 小得很多的地方,可以寫成下列形式:

$$B_{aa}(r) = V^2 \beta_{aa}\left(\frac{r}{L}\right), \quad (4.1)$$

$$B_{aaa}(r) = V^3 \beta_{aaa}\left(\frac{r}{L}\right), \quad (4.2)$$

β_{aa} 與 β_{aaa} 是 $\frac{r}{L}$ 的普用函數. 設當 $r = 0 (L)$ 時,統計分佈函數是定常的,也就是說,假定有一羣中等大小的湍渦從一羣最大的湍渦中恰好能獲得足夠的能量,那麼這時 β_{aa} 和 β_{aaa} 應與 $\dot{\epsilon}$ 無關. 我們可很容易地得到下式:

$$B_{aa}(r) = c \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (5.1)$$

和

$$B_{aaa}(r) = c_1 \epsilon r. \quad (5.2)$$

這裏 c 和 c_1 是兩個普用常數. 上面對於結構函數的結果,同樣可用湍譜表示出來. 設 $F(\kappa)$ 代表三維湍譜 (Heisenberg 譜), κ 為波數. 對於低波數部份,我們有

$$F(\kappa) = V^2 L f(\kappa L), \quad (6)$$

這裏 $f(\kappa L)$ 是 κL 的普用函數。應用海森堡平衡湍譜的概念，這一低波數部份的高波數端，在那裏湍渦可以維持統計平衡，因此當 κ 相當大 ($\kappa \sim 0(\frac{1}{L})$)，但 $\kappa \ll \frac{1}{\eta}$ ， η 為柯爾莫洛夫標度長) 時， $F(\kappa)$ 與 $\dot{\epsilon}$ 無關，於是

$$F(\kappa) = c_2 \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}. \quad (7)$$

這是著名的 $-5/3$ 定律， c_2 為普用常數。

在本理論範圍內，任何在柯爾莫洛夫理論中為絕對常數的數量，例如 $S = B_{dd}(r) / [B_{dd}(r)]^{3/2}$ ， S 為偏斜因數 (skewness factor)，在湍能不能連續供給的情況下應是 $\frac{r}{L}$ 的函數。

$$S = S(r | \dot{\epsilon} |^{3/2} \epsilon^{-2}). \quad (8)$$

應當指出，如果 $\dot{\epsilon} = 0$ ，那麼 $S(r) = S(0)$ 為絕對常數。進一步分析 (8) 式可知它代表了有限湍流雷諾數的影響。假定 S 可以 $\dot{\epsilon}$ 的幕級數展開，則

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n (\dot{\epsilon} \epsilon^{-4/3} r^{2/3})^n.$$

現在我們研究本文的主要問題——湍能耗散問題。我們的基本出發點是三維湍譜方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + T_r(\kappa, t) = 0. \quad (9)$$

在上式中我們已將黏性項略去不計， $T_r(\kappa)$ 為交換函數。當然 (9) 式祇在雷諾數很高時才成立。(9) 式也可以這樣解釋：全部湍譜可設想是由兩部份組成，即非黏性部份和黏性部份。非黏性部份含有絕大部份湍能，但祇帶有極微量的黏性耗散；在黏性部份中，交換函數所產生的變化遠較直接的黏性耗散為小。如果在高波數部份 (黏性部份) 維持着統計平衡的情況，即由較低波數部份 (非黏性部份) 所輸入的能量恰好和耗散相抵消，那麼整個湍譜方程式可以分裂成兩部份。對於非黏性部份，我們有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\kappa F d\kappa + \int_0^\kappa T_r d\kappa = 0, \quad (10)$$

這和 (9) 式相同。因為交換函數並不產生能量的淨損失,所以

$$\int_0^\infty T_r d\kappa = 0, \quad (11)$$

於是,我們有

$$\int_0^\kappa T_r d\kappa = - \int_\kappa^\infty T_r d\kappa. \quad (12)$$

然後我們得到如下的黏性部份湍譜方程式:

$$\int_0^\kappa T_r(\kappa) d\kappa + 2\nu \int_\kappa^\infty \kappa^2 F(\kappa) d\kappa = 0. \quad (13)$$

(13) 式基本上就是海森堡平衡湍譜的概念^[6]。

根據相似性的考慮,令 $\xi = \kappa L$, 我們可將 F 和 T_r 兩函數寫成下列形式:

$$F(\kappa) = V^2 L f(\xi), \quad (14)$$

和

$$T_r(\kappa) = V^3 T(\xi). \quad (15)$$

將 (14) 式和 (15) 式代入 (9) 式,我們得

$$\frac{1}{V^3} \frac{d(V^2 L)}{dt} f(\xi) + \frac{1}{V} \frac{dL}{dt} \xi \frac{df}{d\xi} + T(\xi) = 0. \quad (16)$$

如果有相似解存在,則必

$$\frac{1}{V^3} \frac{d(V^2 L)}{dt} = a_1, \quad (17.1)$$

和

$$\frac{1}{V} \frac{dL}{dt} = a_2, \quad (17.2)$$

a_1 和 a_2 為二數字常數。假設當 ξ 很小時, $T(\xi)$ 這一項比 (16) 式中前二項小得很多 (實際上如果我們應用卡門^[7] 關於交換函數的假定和 $4a + \beta < 5/2$,

[6] Heisenberg, W., Zür Statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 1948, Bd. 124.

[7] Kármán, Th. von., Sur la Theorie Statistique de la Turbulence. *Comptes Rendus*, 1948, T. 226, Paris.

就可得出這一假定),再由於 $F(\kappa)$ 和 κ^4 成比例,當 $\kappa L \ll 1^*$, (這裏主要是由於非壓縮性這一假定,由此即得出湍譜張量爲一無散張量), (17) 式即化成

$$\frac{1}{V} \frac{d(V^2 L)}{dt} = -\frac{4}{V} \frac{dL}{dt}, \quad (18)$$

因爲現在 $a_1 = -4 a_2$.

將 (18) 式積分,得

$$V^2 L^5 = \Lambda = \text{常數}. \quad (19)$$

Λ 相當於洛揚斯基 (Лойцянский) 不變量. 因爲洛揚斯基不變量和相關函數的四級距有關,因此我們又得到了一個 L 是大湍渦特性長的說明. 有了 (19) 式我們就可很容易地得出湍流耗散定律. 利用 (3) 式, (19) 式變爲

$$\Lambda \left(-\frac{d\epsilon}{dt} \right)^{17/2} = \epsilon^{12}. \quad (20)$$

將上式積分,得

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17}}{17 \Lambda^{2/17}} t \right]^{-17/7}. \quad (21)$$

這裏 ϵ_0 是一積分常數,它代表開始時 ($t=0$) 每單位質量流體每單位時間的能量耗散. (21) 式相當於如下的湍渦耗散定律:

$$\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_0^2 \left[1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17}}{17 \Lambda^{2/17}} t \right]^{-17/7}, \quad (22)$$

當 t 增加, $\bar{\omega}^2$ 就減少.

因爲 $\epsilon = -\frac{3}{2} \frac{d\bar{u}^2}{dt} = \frac{db}{dt}$, 將 (21) 式再對 t 積分,我們有

$$b = b_a + \frac{17}{10} \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{10/17} \left[1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17}}{17 \Lambda^{2/17}} t \right]^{-10/7}. \quad (23)$$

* 如果我們用公式 (1) 表示泰勒湍譜,再利用泰勒湍譜與三維湍譜之間的關係式,在 [8] 中曾證明了 $F(\kappa) \propto \kappa^4$, 當 $\kappa L \ll 1$.

[8] Chuang, F. K., On the Statistical Theory of Turbulence. Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1950.

這裏 b_a 爲一積分常數。上式即新的湍能耗散定律。泰勒的微標度 λ 與時間的關係可由下式表示：

$$\lambda^2 = 7 \nu t + 17 \nu \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{-7/17} + \frac{10 \nu b_a}{\epsilon_0} \left[1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17} t}{17 \Lambda^{2/17}} \right]^{17/7}. \quad (24)$$

應當指出，上面所得的耗散定律不能對所有的 t 都適用。因爲當 t 很大時，串級過程已不是主要的現象，上面將黏性力略去的假定顯然不能成立。我們可定義一特性時間 T_0 ，

$$T_0 = \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{-7/17}. \quad (25)$$

當 $t \gg T_0$ 公式 (22) (23) 和 (24) 就不能應用。 T_0 給出了一個湍流耗散初期的長短。

當 $t \ll T_0$ ，我們可得出如下的展開式：

$$b = b_a + \frac{2.89 \Lambda^{4/17} \epsilon_0^{3/17}}{t + 1.7 \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{-7/17}}, \quad (26)$$

和

$$\lambda^2 = \left(7 + \frac{10 b_a}{\epsilon_0^{10/17} \Lambda^{2/17}} \right) \nu t + 17 \nu \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{-7/17} + \frac{10 \nu b_a}{\epsilon_0}. \quad (27)$$

將 (27) 式和實驗比較，可知 $b_a \geq 0$ 。(26) 式即是著名的直線耗散定律。林家翹也曾得出同一直線耗散定律。林氏的結果說 $b_a < 0$ ，並且加以解釋說是由於低波數部份缺乏相似性。很顯然，這和現在的相似理論是矛盾的。另外一方面，現在的耗散定律和柯爾莫果洛夫的定律在指數都等於 $(-10/7)$ (見 (23) 式) 這一點上是相似的。特別當 ϵ_0 很大或 Λ 很小時，(23) 式可以簡化成下式

$$b \doteq 6.05 \Lambda^{2/17} t^{-10/7}. \quad (28)$$

上式即柯爾莫果洛夫的耗散定律。

二. 一般的單標度長等方性湍流的相似研究

謝道夫 (Седов)^[9] 曾經利用相關函數討論了湍流的相似性問題。這裏，我

[9] Седов, Л. И., Методы подобия и Размерности в Механике, 1951.

們將類似的處理辦法應用到湍譜上來，同時並得出若干新的結果。三維湍譜的方程是

$$\frac{\partial F}{\partial t} + T_r(\kappa) = -2\nu\kappa^2 F(\kappa). \quad (1)$$

我們選擇單位質量流體的湍能 b 和某一長度 L (注意 L 可與上節 L 不同) 作為一定的湍流特性數量。根據因次分析理論，我們可以寫出下列式子：

$$F = bL f(\kappa L) = bL f(\xi), \quad (2.1)$$

和

$$T_r = b^{3/2} T(\kappa L) = b^{3/2} T(\xi). \quad (2.2)$$

這裏 $\xi = \kappa L$ 。

將 (2) 式代入 (1) 式，我們有

$$\frac{d(bL)}{dt} f(\xi) + b \frac{dL}{dt} \xi \frac{df}{d\xi} + b^{3/2} T(\xi) = \frac{\nu b}{L} (-2\xi^2 f(\xi)). \quad (3)$$

用 $b^{3/2}$ 除上式，得

$$\frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} f(\xi) + \frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} \xi \frac{df}{d\xi} + T(\xi) = \frac{\nu}{b^{1/2} L} (-2\xi^2 f(\xi)). \quad (4)$$

將 (4) 式對 t 偏微分，保持 ξ 為常數，(物理上講，即考慮在任何時間同一相對大小的湍渦能量的變化。) 則

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} \right\} f(\xi) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} \right\} \xi \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu}{b^{1/2} L} \right) (-2\xi^2 f(\xi)). \quad (5)$$

為了進一步深入，我們區別下面兩種情況：

(1) f , $\xi \frac{df}{d\xi}$ 和 $\xi^2 f(\xi)$ 線性獨立，這代表湍流耗散初期的極限情況。

(2) 在 f , $\xi \frac{df}{d\xi}$ 和 $\xi^2 f(\xi)$ 之間有一線性關係存在。在湍流耗散後

期，如三次相關函數可略去不計，那麼這一線性關係的存在可以證明是準確的。毫無疑義，這一假定可以作為湍流接近後期耗散的一個近似規律。

現在我們先討論第一種情況。從方程式 (5) 可知下式必成立：

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} \right\} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} \right\} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{v}{b^{1/2} L} \right\} = 0. \quad (6.3)$$

祇要我們選擇一合適的特性長度上式可以積分如下：

$$\frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} = \alpha, \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} = 2, \quad (7.2)$$

$$\frac{v}{b^{1/2} L} = \beta, \quad (7.3)$$

α 和 β 為二積分常數。

於 (7.1) (7.2) 和 (7.3) 中，祇含有兩個未知數 b 和 L ；因此這三個方程式不是互相獨立的。事實上我們可證明 $\alpha = -1$ 。將 (7) 式積分，我們有如下的湍能耗散定律和特性長度擴散定律：

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{vR} t + \frac{1}{b_0}, \quad (8.1)^*$$

$$L^2 = 2 v t + \frac{R^2 v^2}{b_0}, \quad (8.2)$$

這裏 b_0 為積分常數，代表開始時 ($t = 0$) 的湍能， $R = \frac{1}{\beta}$ 稱為湍流雷諾數。這一定律和上節公式 (26) 一致，如果令 $b_a = 0$ 。因此 (8) 式可在湍流耗散的最初期成立。

* 這一結果和在 [8] 中根據不同的考慮得出的結果相同。

本節的主要部份是討論第二種情況，即如何從柯爾莫果洛夫形式的耗散定律過渡到熟知的湍流後期耗散定律 $b \propto t^{-5/2}$ 。在第二種情況下，我們可以令

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} \right\} = a_1, \quad (9.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} \right\} = a_2, \quad (9.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\nu}{b^{1/2} L} \right\} = a_3, \quad (9.3)$$

這裏 a_1 , a_2 和 a_3 為三常數。方程式 (5) 變為

$$a_1 f(\xi) + a_2 \xi \frac{df}{d\xi} = -2 a_3 \xi^2 f(\xi). \quad (10)$$

很顯然， a_2 不可能等於零，因此將 a_2 除上式，我們得

$$c_1 f(\xi) + \xi \frac{df}{d\xi} = -2 c_2 \xi^2 f(\xi), \quad (11)$$

$$c_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad c_2 = \frac{a_3}{a_2}.$$

方程式 (11) 代表另一獨立的湍譜方程式。積分得

$$f = c \xi^{-c_1} e^{-c_2 \xi^2}, \quad (12)$$

c 為一積分常數。利用 (11) 式我們可將交換函數 $T(\xi)$ 用 $f(\xi)$ 表示如下：

$$T(\xi) = \left(\frac{c_1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} - \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} \right) f(\xi) + \left(\frac{c_2}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} - \frac{\nu}{b^{1/2} L} \right) 2 \xi^2 f(\xi). \quad (13)$$

湍流耗散定律由下列二微分方程式規定：

$$\frac{c_1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} + c_3, \quad (14.1)$$

$$\frac{c_2}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} = \frac{\nu}{b^{1/2} L} + c_4. \quad (14.2)$$

很顯明，祇要在特性長度上選擇一適當的乘數，方程組 (14) 可以寫成下列形式：

$$\frac{c_1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{b^{3/2}} \frac{d(bL)}{dt} + c_3, \quad (14.1)'$$

$$\frac{1}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} = \frac{v}{b^{1/2} L} + p, \quad (14.2)'$$

這裏 p 為一新常數。

如果我們假定 $T(\xi)$ 的 ξ 第一項展開式中 ξ 的次數較 $f(\xi)$ 的第一項展開式高，則

$$c_3 = 0.$$

由於不可壓縮性和等方性 $F \propto \kappa^4$ ，當 κ 很小時，因此 $c_1 = -4$ 。將 (14') 式積分，得

$$bL^5 = A \quad (15)$$

A 為洛揚斯基不變量，和

$$\int_b^{b_0} \frac{A^{2/5} b^{3/10}}{5(v b^{17/10} + p A^{1/5} b^2)} db = (t - t_0) \quad (16)$$

b_0 是相當於時間 $t = t_0$ 時的單位質量流體所含的湍能。(16) 式中積分項可以積分出來，結果是

$$\begin{aligned} \frac{v b_0^{2/5}}{2 A^{2/5}} (t - t_0) = & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^{2/5}} - 1 \right) + \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{1}{x^{1/10}} \right) + \frac{1}{6 a^4} \log \left(\frac{a^2 - a + 1}{a^2 - a x + x^{1/5}} \right) - \\ & - \frac{1}{3 a^4} \log \left(\frac{a + 1}{a + x^{1/10}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3} a^4} \tan^{-1} \frac{2 x^{1/10} - a}{\sqrt{3} a} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{3} a^4} \tan^{-1} \frac{2 - a}{\sqrt{3} a}, \end{aligned} \quad (17)$$

這裏

$$x = \frac{b}{b_0},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{5v}{p A^{1/5} b_0^{3/10}}}.$$

設當 $t = t_0$ 時, b_0 已經很小, 那麼當 $t > t_0$ 時, 我們可於 (17) 式中令 $a \rightarrow \infty$, 得出下面的漸近湍能耗散公式:

$$\frac{b}{b_0} = \left[1 + \frac{2\nu b_0^{2/5}}{A^{2/5}} (t - t_0) \right]^{-5/2}. \quad (18)$$

(18) 式為一熟知的結果, 並有實驗證明.

(17) 式所代表的另一極端情況, 即 $a \rightarrow 0$, 相當於很小的黏性係數或很大的 b_0 . 在 $t = t_0$ 附近的湍流耗散定律的近似形式可直接由 (16) 式積分得出, 結果是

$$\frac{b}{b_0} = \left[1 + \frac{7(t - t_0) b_0^{7/10}}{10 A^{1/5}} \right]^{-10/7}. \quad (19)$$

這和第一部份公式 (23) (如果令 $b_a = 0$) 除去在標度長的數字乘數上差別以外, 完全一致. 因此, 我們可以相信公式 (17) 所代表的湍能耗散定律有較已存在的定律更廣的適用範圍.

最後我們對交換函數的性質作一些說明. 因為 $c_3 = 0$, 我們有

$$T(\xi) = \left(\frac{c_2}{b^{1/2}} \frac{dL}{dt} - \frac{\nu}{b^{1/2}L} \right) 2 \xi^2 f(\xi), \quad (20)$$

或

$$T_r(k, t) = \left(c_2 L \frac{dL}{dt} - \nu \right) 2 k^2 F(k, t). \quad (21)$$

在上式括弧內的 $c_2 \frac{dL}{dt} - \nu$ 可以解釋作渦黏性係數, 這一係數在耗散湍流中是時間 t 的函數, 它和特性長度與特性長度的擴散率有關. 如果在湍流耗散的最後期, 渦黏性係數接近於零, 那麼

$$c_2 L \frac{dL}{dt} = \nu, \quad \text{即} \quad L^2 = \frac{2\nu t}{c_2}. \quad (22)$$

將 (22) 式代入 (12) 式得後期的湍譜為

$$F(k, t) = c k^{-1} e^{-2\nu k^2 t}, \quad (23)$$

c 為一常數, 它和洛揚斯基不變量有關.

在研究過程中, 作者曾和周培源教授作了多次有價值的討論, 特此誌謝.

ON THE DECAY OF TURBULENCE

CHUANG FENG-KAN

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper consists of two parts. The first part gives a description of the motion of large eddies in a turbulent flow. The non-stationary character of the large eddies is emphasized. Up to present, there appears to be some confusion regarding the law of turbulence decay, especially the variation of the microscale with time. This paper introduces a new characteristic length for large eddies which leads to a new decay law valid at the initial period. The apparent discrepancies between Kolmogoroff's decay law and Lin's decay law are seen to be due to different expansions of the present one. It is hoped that the physical picture described herein would give some further insight into the structure of turbulence. In the second part, an analysis similar to that adopted by Sedov for the correlation coefficients is applied to the turbulent spectrum. New results are obtained, in particular the transition of the decay law from the initial period to the final period.