

聖維那扭轉問題的物理假定*

錢 偉 長

(北京清華大學)

聖維那^[1] 在他處理彈性柱體扭轉的湊合解法中用了一套物理假定，這套假定相當於下列四個假定：

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \sigma_z = 0. \quad (1)$$

在以後克里勃許^[2] 和伏葛脫^[3] 都曾研究如何簡化這些假定。克里勃許證明了 $\sigma_z = 0$ 這個假定是不必要的。因此聖維那的解法只需要下列假定：

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (2)$$

伏葛脫證明，如果所有六個應力的分量都不是 z 的函數，則也可以得到聖維那的同樣結果。

但是哥笛耶^[4] 在一九三七年進一步證明，就是克里勃許的條件也是超過了必需的情況，他證明聖維那解法只要下面三個更放寬的條件便足夠了。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

其實哥笛耶的條件也還是超過了必需的，我們在本文內將證明只用兩個條件，也可以得到聖維那的解法。這兩個條件便是

*1953年8月27日收到

- [1] Saint Venant, M. de, De la Torsion des Prismes, avec des considérations sur leur Flexion, *Mémoires des Savants Étrangers*, **14** (1855).
- [2] Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, (Leipzig, 1862).
- [3] Voigt, W., Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, *Göttingen Abhandlungen*, **34** (1887).
- [4] Goodier, J. N., The characteristic property of Saint-Venant's solutions for the torsion and bending of an elastic cylinder, *Phil. Mag.* **23** (1937), 186-190.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

在證明這個問題以前，我們必須先指出：六個應力分量因為受着位移空間的限制，不能任意擇取；它們之間有六個協調方程，互相約束着，使它們所代表的位移是符合物理條件的。這六個協調方程和彈性體的平衡方程，可以寫錄如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0, & (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0, & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

這裏的 μ 代表柏桑比率，而 Θ 及 ∇^2 代表下列各式：

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (8)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (9)$$

我們的基本假定 (4) 促使平衡方程 (5) 變成

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

假如把 (10) 的第三式對 z 微分一次，再利用 (4)，我們立刻得到

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

現在把 (6) 式中三式相加, 我們得到

$$\nabla^2 \Theta = 0. \quad (12)$$

再利用 (11), 這式可以寫成

$$\nabla_1^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (13)$$

這裏的符號 ∇_1^2 代表下式:

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (14)$$

又如把 (6) 中第三式對 z 微分兩次, 再利用 (11) 的結果, 我們可以證明

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (15)$$

再把 (13) 對 z 微分兩次, 利用 (11) 和 (15) 的結果, 我們證明了

$$\nabla_1^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (16)$$

假如我們把 (10) 的第一第二兩式對 z 微分兩次, 我們得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (17)$$

方程 (16) 和 (17) 是決定未知數 $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$ 的三個方程, 它們和平面應力問題的微分方程是一樣的。它們的解法很有名; 即是命

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

則 (17) 式便得到滿足。若將 (18) 代入 (16), 即得有名的雙調和方程

$$\nabla_1^2 \chi = 0. \quad (19)$$

所以函數 χ 是由 (19) 式決定的。 $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2}$ 的邊界條件和 σ_x , σ_y , τ_{xy} 的邊界條件是一樣的。所以這個問題和平板在邊緣上不受外力作用下的內部平面應力問題完全相等。這種內部平面應力應該到處都等於零。因此,我們立刻可以得到結論:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

於是,從 (6) 的第三式內,我們可以證明

$$\nabla_1^2 \sigma_x = 0. \quad (21)$$

更進一步,從 (13) 式裏我們可以得到

$$\nabla_1^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (22)$$

這個方程和 (10) 中第一、第二兩式構成求 σ_x , σ_y , τ_{xy} 的三式; 它們的邊界條件是柱體四週未受作用。這是真正的平面應力問題。因此,我們無須再經具體計算,我們可以證明

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (23)$$

如把 (23) 式代入 (6) 式和 (7) 的第一式,我們證明 σ_z 是由下列各式決定:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0. \quad (24)$$

所以 σ_z 一定可以寫成下式:

$$\sigma_z = A_1 + A_2 x + A_3 y + z (B_1 + B_2 x + B_3 y). \quad (25)$$

這式子裏的這些個 A 和 B 都是常數,他們可以用柱體的頂端條件來決定。

一個柱體在受到純扭轉時,我們有三個頂端條件是和 σ_z 有關係的。即是在 $z = 0$ 和 $z = l$ 時

$$\iint \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint x \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint y \sigma_z dx dy = 0. \quad (26)$$

把 σ_z 的 (25) 式代入 (26)，用 S 代表柱體的正截面面積， $\bar{x}$, $\bar{y}$ 代表正截面重心的座標， I_x , I_{xy} , I_y 分別代表對於各軸的慣性力矩，我們得到：

$$\left. \begin{aligned} A_1 S + A_2 \bar{x} S + A_3 \bar{y} S &= 0, \\ A_1 \bar{x} S + A_2 I_x + A_3 I_{xy} &= 0, \\ A_1 \bar{y} S + A_2 I_{xy} + A_3 I_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + l B_1) S + (A_2 + l B_2) \bar{x} S + (A_3 + l B_3) \bar{y} S &= 0, \\ (A_1 + l B_1) \bar{x} S + (A_2 + l B_2) I_x + (A_3 + l B_3) I_{xy} &= 0, \\ (A_1 + l B_1) \bar{y} S + (A_2 + l B_2) I_{xy} + (A_3 + l B_3) I_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

這是求 A_1 , A_2 , A_3 和 B_1 , B_2 , B_3 的六個齊次的一次聯立方程，我們不難證明它的係數所組成的行列式不等於零。因此，這些常數都等於零，所以

$$\sigma_z = 0 \quad (29)$$

和

$$\theta = 0. \quad (30)$$

到此，在整個問題裏，只有兩個未知數 τ_{xz} 和 τ_{yz} 不等於零。他們應該滿足 (7) 式的後兩式和 (5) 式的第三式，即

$$\nabla_1^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla_1^2 \tau_{yz} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (31)$$

這些式子就是柱體扭轉問題的聖維那解法所用的式子。

ASSUMPTIONS IN SAINT-VENANT'S SOLUTION FOR THE TORSION OF AN ELASTIC CYLINDER*

CHIEN WEI-ZANG

(Tsing Hua University)

ABSTRACT

In this paper, it is proved that Saint-Venant's solution for torsion can be obtained from the following simplified assumptions:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0.$$

These assumptions are much more simplified than those given by Saint-Venant in 1855, A. Clebsch in 1862, W. Voigt in 1887, and J. N. Goodier in 1937.

*Received August 27, 1953.