

具複聯通截面柱體的扭轉問題的變分解法*

林 鴻 蓀

(中國科學院數學研究所)

一. 引 言

把一具單聯通截面的柱體的扭轉問題化爲一變分問題來處理,並利用所謂直接方法來求近似解,這是衆所週知的。但有一些作者,僅從邊值問題與對應的變分問題的數學等價性出發,而在基本的力學原則的敘述中採用令人混淆的方式,美國索科爾尼珂甫 (I. S. Sokolnikoff) 所著的“彈性理論”一書^[1]便是一顯著的例子。當然可以想像,用變分方法來處理複聯通域中的扭轉問題在文獻中是爲數不多的。我們旨在從基本變分原則的基礎上來討論複聯通域中的扭轉問題,用一二特例說明呂茲 (Ritz) 方法及伽遼金 (Галеркин) 方法是完全可以應用到這問題上來的。

二. 最小勢能原則及扭曲函數

考慮一佔有由曲面 S 所包圍的有限體積 V 的各向同性彈性體的無窮小變形的靜力問題。 S 上的邊界條件分爲兩類: 在 S 的一部分 S_T 上表面作用力 T_i 爲指定, 在另一部分 S_u 上表面位移 U_i 爲指定。 $(e_{ij}^0, \sigma_{ij}^0)$ 代表真實狀態, 即是說, (σ_{ij}^0) 是一組滿足平衡方程的應力分量, 並且在 S_T 上滿足應力邊界條件, (e_{ij}^0) 是一組由位移 (u_i^0) 引出的應變分量, (u_i^0) 在 S_u 上滿足位移邊界條件。應力與應變之間還滿足虎克定律。設 (e_{ij}^*) 爲一組由滿足 S_u 上的邊界條件的位移 (u_i^*) 引出的應變分量。設 (σ_{ij}^*) 是一組按照如真實狀態中同樣的應力應變關係由 (e_{ij}^*) 求出的應力分量。注意 (σ_{ij}^*) 不需要滿足平衡方程或應力邊界

* 1953 年 8 月 27 日收到

[1] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity* (1946), 第五章。

條件, $(e_{ij}^*, \sigma_{ij}^*)$ 稱爲一許可狀態. 於是有下列最小勢能原理: 在所有許可狀態中, 真實狀態使體系的勢能取最小值:

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* e_{ij}^* dV - \int_{S_T} T_i u_i^* dS \geq \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 e_{ij}^0 dV - \int_{S_T} u_i^0 dS. \quad (1)$$

在這定理的證明中, 不需要限制許可狀態是隣近於真實狀態, 而只需要證明

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* e_{ij}^* - \sigma_{ij}^0 e_{ij}^0) \geq (e_{ij}^* - e_{ij}^0) \sigma_{ij}^0$$

等式僅在 $e_{ij}^* = e_{ij}^0$ 時成立. 注意在 (1) 式中, σ_{ij}^* 是作爲 e_{ij}^* 的函數表示出來的.

在聖維那 (Saint-Venant) 原來提出來的扭轉問題中, 假設柱體的橫截面 (我們取爲 $x y$ 平面) 都是同樣扭曲的. 我們取如

$$u^* = -\alpha^* z y, \quad v^* = \alpha^* z x, \quad w^* = \alpha^* \varphi^*(x, y) \quad (2)$$

形狀的位移, 其中 α^* 爲一可能的單位長扭轉角度, $\varphi^*(x, y)$ 對應於一定的扭曲. 這樣我們所取的許可應變狀態是

$$e_{xz}^* = \frac{\alpha^*}{2} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right), \quad e_{xy}^* = \frac{\alpha^*}{2} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right), \quad (3)$$

其餘應變分量爲零. 應變能在這許可狀態中取值

$$w = \frac{l G \alpha^{*2}}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy, \quad (4)$$

此處 l 爲柱體之長度, G 爲剪係數而 R 代表柱體的截面域.

在取如 (2) 式給出的位移時, 我們實際上肯定聖維那扭轉問題中 S_T 是 S 的全部, 這是因爲通常所取位移邊界條件 (一端固定另一端扭轉角度 $L\alpha$) 是不能自圓其說的. 在側面上 T_i 等於零; 在兩端的應力邊界條件所有含混之處是由下述斷言而避免 (這條件實際上是與聖維那原則等價的): 勢能中一部分

$$- \int_{S_T} T_i u_i dS$$

代表外力勢能之降低而等於用一具指定力矩 M 的力偶扭轉角度 $l\alpha^*$ 。於是按照最小勢能原理

$$U = \frac{lG\alpha^{*2}}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy - Ml\alpha^* \quad (5)$$

在真實狀態中取最小值。

對 α^* 而言，這是一個通常的極小問題，給出

$$M = \alpha G \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \quad (6)$$

作為真實單位長扭轉角 α ，指定力矩 M 及真實扭轉函數 $\varphi(x, y)$ 之間的關係。 $\varphi(x, y)$ 必須這樣選擇，使泛函

$$I(\varphi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \quad (7)$$

取最小值。

按照變分法中的奧斯特洛格拉斯基 (Остроградский) 定理，得出 $\varphi(x, y)$ 所滿足的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{在 } R \text{ 中}, \quad (8)$$

及自然邊界條件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad \text{在 } C \text{ 上}, \quad (9)$$

此處 C 為 R 的邊界， n 為朝外的法方向， s 為沿 C 的切線方向。

若 R 為一複聯通區域，則 C 可包括一外邊界 C_0 以及內邊界 $C_1, C_2 \dots C_m$ 。

若以 D 表示抗扭強度 $\frac{M}{\alpha G}$ ，得到抗扭強度的一個上界

$$D \leq I(\varphi^*). \quad (10)$$

取 $\varphi^* = 0$ 在 R 中，則 $I(\varphi^*) = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ ，即截面的極慣性力矩。

因此，除圓形或圓環截面之外，總有

$$D < \iint_R (x^2 + y^2) dx dy. \quad (11)$$

有幾點值得注意：

(1) 在最小勢能原理的應用中，我們實際上只比較許可應變狀態。而這是求抗扭強度的上界的自然方法。有些作者考慮狄黎克雷 (Dirichlet) 積分

$$Q(\varphi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy;$$

但從物理觀點上來看，並不是直接的方法。

(2) 在比較中我們並沒有提到應力狀態。一般地說，

$$\begin{aligned} I(\varphi^*) &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \\ &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy + \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \iint_R \left(y \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

若我們取 φ^* 為一詣函數，則上式等於

$$\begin{aligned} I(\varphi^*) &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy \\ &\quad + \int_c \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} ds - \int_c \varphi^* \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) ds \\ &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy \\ &\quad + \int_c \varphi^* \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

若進一步限制 φ^* ，使

$$\int_c \varphi^* \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] ds = 0. \quad (12)$$

則

$$I(\varphi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy; \quad (13)$$

顯然

$$I(\varphi) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy.$$

故僅在 φ^* 是一詣函數且 (12) 成立的條件下, 我們才可以說

$$\begin{aligned} & \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy \\ & \leq \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

這時我們才比較應力狀態。(12) 式是一與在狄黎克雷問題中適用的特里弗茲 (Trefftz) 方法相應的直接方法之基礎。它相當於一個放鬆的邊界條件。

(3) 我們這樣來求扭轉問題的近似解, 在複聯通域的情況中, 有極大的便利, 因為一般地說近似函數 $\varphi^*(x, y)$ 不需要滿足任何邊界條件。

(4) 我們可以指出一個求複聯通截面的抗扭強度的上界的方法。設 R_1 為一複聯通域, 從一單聯域 R_0 中掘去單聯通域 $R_2, R_3, \dots, R_m$ 而形成。設 $\varphi_0(x, y)$ 為 R_0 的真實扭曲函數。以 $D_0, D_1, D_2, \dots, D_m$ 分別代表 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_m$ 的抗扭強度, 則有

$$\begin{aligned} D_0 &= \iint_{R_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \\ &= \sum_{i=1}^m \iint_{R_i} \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \\ &> \sum_{i=1}^m D_i; \end{aligned} \quad (15)$$

故得

$$D_1 < D_0 - \sum_{i=2}^m D_i. \quad (16)$$

假使 $R_0, R_2, \dots, R_m$ 是抗扭強度已準確求出的截面, 則 (15) 式給出複聯通域 D_1 的一個上界。

注意這估計是不能有系統地改進的。這是上述方法不如直接方法——如在第四節中討論的呂茲方法及伽遼金方法——的地方。

三. 最小餘能原則及應力函數

設 (σ_{ij}^*) 為一組滿足平衡條件的應力分量, 同時也滿足 S_T 上的應力邊界條件. 對應於 (σ_{ij}^*) 有一組應變 (e_{ij}^*) , 這組應變並不一定滿足協和條件. $(\sigma_{ij}^*, e_{ij}^*)$ 稱為一許可狀態. 於是有下列最小餘能原理: 在所有許可狀態中, 真實狀態使彈性體的餘能取最小值, 即

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* e_{ij}^* dV - \int_{S_U} U_i T_i^* dS \geq \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 e_{ij}^0 dV - \int_{S_U} U_i T_i dS, \quad (17)$$

只需要證明

$$\frac{1}{2} (e_{ij}^* \sigma_{ij}^* - e_{ij}^0 \sigma_{ij}^0) \geq (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) e_{ij}^0.$$

注意在 (15) 式中 e_{ij}^* 是作為 σ_{ij}^* 的函數表示出來的.

若 S_T 是整個 S , 或在 S_U 上指定 $U_i = 0$, 則有最小應變餘能定理^[2].

在扭轉問題中, S_T 是 S 的全部, 因此我們應用最小應變餘能定理.

一可能應力狀態是由一應力函數 $\Psi^*(x, y)$ 按下式求得:

$$\tau_{xx}^* = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{xy}^* = -\kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (18)$$

其餘分量均等於零. κ 是任意常數, 我們可以取 $\kappa = \alpha G$. 為了滿足應力邊界條件, 在邊界 C 上必使 Ψ^* 等於一常數. 設 R 為一複聯通域, 則可以取

$$\Psi^* = k_i^* \quad (\text{某一常數}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (19)$$

通常取 $k_0^* = 0$. 必須注意, (19) 並不足以決定解. 因此我們不能說關於 Ψ 的邊值問題是一狄黎霍來問題.

在柱體兩端, 按聖維那原則, 應力的分佈的作用必須靜力地等價於一指定力矩 M . 所以

[2] 錢令希, 中國科學 1 (1950), 449.

$$\begin{aligned}
M &= -\alpha G \iint_R \left(x \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right) dx dy \\
&= 2\alpha G \iint_R \Psi^* dx dy - \alpha G \iint_R \left[\frac{\partial (x \Psi^*)}{\partial x} + \frac{\partial (y \Psi^*)}{\partial y} \right] dx dy \\
&= 2\alpha G \iint_R \Psi^* dx dy + \alpha G \int_C \Psi^* \left(x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds \\
&= 2\alpha G \iint_R \Psi^* dx dy + 2\alpha G \sum_{i=1}^m k_i^* A_i,
\end{aligned} \tag{20}$$

此處 A_i 為由 C_i ($i=1, 2, \dots, m$) 所包圍的面積。最小應變餘能原理要求由真實應力函數 $\Psi(x, y)$ 所代表的真實狀態使應變餘能

$$\begin{aligned}
w_e &= \frac{l}{2G} \iint_R (\tau_{xx}^{*2} + \tau_{yy}^{*2}) dx dy \\
&= \frac{l\alpha^2 G}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy
\end{aligned} \tag{21}$$

在 M 保持為常數的條件下取最小值。這事實上是變分法中的一個等周問題。引進一個拉格朗日 (Lagrange) 因子 λ 而要求真實應力函數 $\Psi(x, y)$ 使

$$\begin{aligned}
&\frac{l\alpha^2 G}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&\quad - \lambda \left[2\alpha G \iint_R \Psi^* dx dy + 2\alpha G \sum_{i=1}^m k_i^* A_i \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

取最小值。可以看出， λ 在此處等於 $l\alpha$ ，總扭轉角。

因此，在所有許可的 $\Psi^*(x, y)$ 之中， Ψ^* 滿足

$$\begin{aligned}
\delta\Psi &= \Psi^* - \Psi = 0 && \text{在 } C_0 \text{ 上} \\
\delta\Psi &= \Psi^* - \Psi = k_i^* - k_i && \text{在 } C_i \text{ 上} \quad (i=1, 2, \dots, m),
\end{aligned} \tag{23}$$

真實解 $\Psi(x, y)$ 使汎函

$$J(\Psi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 4 \iint_R \Psi^* dx dy - 4 \sum_{i=1}^m k_i^* A_i \tag{24}$$

取最小值。因此有

$$\begin{aligned}
 0 = \delta J &= 2 \iint_R \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial(\delta \Psi)}{\partial y} \right] dx dy \\
 &\quad - 4 \iint_R \delta \Psi dx dy - 4 \sum_{i=1}^m A_i \delta k_i \\
 &= -2 \iint_R \delta \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy + 2 \int_C \delta \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds \\
 &\quad - 4 \iint_R \delta \Psi dx dy - 4 \sum_{i=1}^m A_i \delta k_i \\
 &= -2 \iint_R \delta \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \right) dx dy \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^m \delta k_i \left[\int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - 2 A_i \right],
 \end{aligned}$$

得出 $\Psi(x, y)$ 所滿足的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{在 } R \text{ 中} \quad (25)$$

以及自然邊界條件

$$\int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 2 A_i \quad \text{在 } C_i \text{ 上 } (i = 1, 2, \dots, m). \quad (26)$$

同時有

$$\begin{aligned}
 J(\Psi) &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 4 \iint_R \Psi dx dy - 4 \sum_{i=1}^m k_i A_i \\
 &= - \iint_R \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy \\
 &\quad + \int_C \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - 4 \iint_R \Psi dx dy - 4 \sum_{i=1}^m k_i A_i \\
 &= 2 \iint_R \Psi dx dy + 2 \sum_{i=1}^m k_i A_i - 4 \iint_R \Psi dx dy - 4 \sum_{i=1}^m k_i A_i \\
 &= -2 \iint_R \Psi dx dy - 2 \sum_{i=1}^m k_i A_i = -\frac{M}{aG} = -D, \quad (27)
 \end{aligned}$$

因此有

$$D \geq -J(\Psi^*). \quad (28)$$

這給出抗扭強度的一個下界。但

$$\begin{aligned} Q(\Psi, \Psi^*) &= \iint_R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \Psi^* \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + 2 \Psi^* \right] dx dy \\ &= 2 \iint_R \Psi^* dx dy + \sum_{i=0}^m \int_{c_i} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds \\ &= 2 \iint_R \Psi^* dx dy + 2 \sum_{i=1}^m k_i^* A_i, \end{aligned} \quad (29)$$

故要求 (24) 取最小值等於要求使

$$Q(\Psi^*, \Psi^*) - 2Q(\Psi, \Psi^*)$$

取最小值。設在 Ψ^* 處取 $c\Psi^*$ ，決定 c 使

$$c^2 Q(\Psi^*, \Psi^*) - 2c Q(\Psi, \Psi^*)$$

取最小值，得出

$$c = \frac{Q(\Psi, \Psi^*)}{Q(\Psi^*, \Psi^*)}.$$

故

$$J(\Psi) \leq -\frac{[Q(\Psi, \Psi^*)]^2}{Q(\Psi^*, \Psi^*)}$$

或

$$D \geq \frac{\left(2 \iint_R \Psi^* dx dy + 2 \sum_{i=1}^m k_i^* A_i \right)^2}{\iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}. \quad (30)$$

有幾點值得注意：

(1) 在應用最小餘能原理時，我們只比較應力狀態。而求扭強問題中抗扭強度的下界時，我們考慮泛函 $J(\Psi^*)$ 的最小問題。這實際上是由變分法中的等周問題化出來的。

(2) 應力函數的邊值問題，實際上不是一個狄黎霍來問題，因為 k_i 並非事先指定而是作為自然條件 (26) 式的結果而求出的。

(3) 若只取一個參數，則 (30) 式給出最好的結果。當然，可以附加一線性組合，其中每一項在內外邊都等於零，決定牽涉的參數使 $J(\Psi^*)$ 取相對最小值，這是呂茲方法的應用。

四. 呂茲方法及伽遼金方法之應用

我們將用空心正方截面的情況來說明我們的方法。設邊界為 (見圖 1)

$$\begin{aligned} C_0: \quad x = \pm b, \quad y = \pm b; \\ C_1: \quad x = \pm a, \quad y = \pm a. \end{aligned} \quad (31)$$

由於問題的對稱性，只需考慮區域 $AA'B'B$ 。

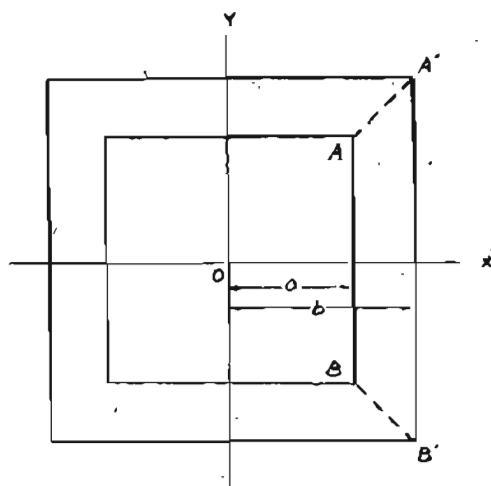


圖 1.

在考慮 $I(\varphi^*)$ 的問題中，仿照呂茲方法慣例，取一由有限個多項式組成的近似函數。

取

$$\varphi^* = \beta xy(x^2 - y^2)$$

代入 $I(\varphi^*)$ 中, 由條件

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0$$

得出

$$\beta = \frac{7}{18} \frac{b^6 - a^6}{b^3 - a^3},$$

因此有抗扭強度的一個上界

$$I(\varphi^*) = \frac{8}{3} (b^4 - a^4) - \frac{56}{135} \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \frac{(b^4 + a^2 b^2 + a^4)^2}{(b^4 + a^4)}. \quad (32)$$

若 $a = 0$, 得出

$$D < \frac{304}{135} b^4,$$

這與準確值相差不過 0.1%. 若 $b - a = t$ 極小, 即是說, 有薄壁的情況, 得到

$$I(\varphi^*) \approx \frac{1188}{135} b^2 t$$

這與通常細管理論給出結果^[3] 極為相近.

在考慮 $J(\Psi^*)$ 的問題中, 先試用一顯然是粗糙的近似

$$\Psi^* = \gamma(b-x) \quad \text{在 } AA'B'B \text{ 中,}$$

有 $\Psi^* = k^* = \gamma(b-a)$ 在 AB 上, γ 是尚待決定的常數. 由 $\frac{\partial J}{\partial \gamma} = 0$ 得出

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{b^2 + ab + a^2}{b + a},$$

因此得出抗扭強度的一個下界

$$-J(\Psi^*) = \frac{16}{9} \frac{b-a}{b+a} (b^2 + ab + a^2)^2. \quad (33)$$

這值並不如威因斯坦 (Weinstein)^[4] 用另一法得出的好. 但在薄壁情況這給出

[3] Timashenko, S. P., *Theory of Elasticity* (1934), p. 270.

[4] Weinstein, A., *Proc. III Symposium Appl. Math.* (1950), p. 154.

$$D \approx 8 b^3 \epsilon,$$

即通常細管理論給出的近似值。

若取

$$\Psi^* = \gamma' (b - x) + \delta' (b - x)^2,$$

則 $k^* = \gamma' (b - a) + \delta' (b - a)^2$ 在 AB 上, 而由條件

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma'} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \delta'} = 0,$$

得出

$$\gamma' = b, \quad \delta' = -\frac{1}{2},$$

由此得出

$$D > 2 (b^4 - a^4). \quad (34)$$

這是威因斯坦用另一方法得出的下界。然而, 我們的方法從物理上講是更直接的。

下面我們考慮伽遼金方法的應用。先回到有關 $J(\Psi^*)$ 的變分問題。取

$$\Psi^* = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m, \quad (35)$$

此處 $f_0 = 0$ 在 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 上; $f_i = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) 在 c_0 上, $f_i = \delta_{ij}$ 在 c_j 上 ($i, j = 1, 2, \cdots, m$)。因此

$$\Psi^* = a_j \quad \text{在 } c_j \text{ 上} \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

代入 $J(\Psi^*)$ 之內, 由條件 $\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, m$) 得出

$$\left. \begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^2} + 2 \right) f_0 dx dy &= 0, \\ \iint_R \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^2} + 2 \right) f_i dx dy &= \int_C f_i \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - 2 \delta_{ij} A_i \\ &= \int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - 2 A_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

這可以直接採用因為伽遼金方程。將薄膜類比應用於複聯通域中，我們可以把由 C_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 所包圍的空洞看作無質量的剛性平板，而 (36) 式的物理意義是：多餘壓力分佈在可能位移 f_i 上所作的虛功以及在由內邊界 C_j 所包圍的剛性平板上的多餘壓力所作虛功之總和等於零。

現仍以空心正方截面為例來說明我們的方法。仍考慮區域 $AA'B'B$ 。此處試取

$$f_0 = (b-x)(a-x),$$

$$f_1 = \frac{b^2 - x^2}{b^2 - a^2}.$$

顯然 f_0 在線段 $A'B'$ 上等於零並在線段 AB 上等於零。 f_1 在線段 $A'B'$ 上等於零，而在線段 AB 上等於一。即取

$$\Psi^* = a_0 f_0 + a_1 f_1$$

代入 $\nabla^2 \Psi^* + 2 = \epsilon$ 得到

$$\epsilon = 2 \left(a_0 - \frac{a_1}{b^2 - a^2} + 1 \right).$$

從 (36) 式得到

$$a_0 - \frac{a_1}{b^2 - a^2} = -1,$$

$$(a-b)a_0 - \frac{2a_1 a}{b^2 - a^2} = \frac{a}{4};$$

解之得到

$$a_0 = \frac{a}{4(b-a)}, \quad a_1 = \frac{(b+a)(4b-3a)}{4}.$$

因而得到抗扭強度的一個下界如次：

$$-J(\Psi^*) = 2(b^2 - a^2) \left(b^2 + \frac{ab}{3} - \frac{5}{3}a^2 \right). \quad (37)$$

這在 $b > 8a$ 時較 (34) 式給出的下界為佳，且計算極為簡便。

VARIATIONAL METHODS IN THE PROBLEM OF TORSION FOR MULTIPLY-CONNECTED DOMAINS*

LIN HUNG-SUN

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The problem of torsion of a prismatic body with multiply-connected cross section is considered from the view-point of two basic variational principles in the theory of elasticity, viz., the principle of minimum potential energy and the principle of complementary energy. According to the former, among all admissible states of strain, in the sense of being derived from sets of displacements that satisfy the specified displacement boundary conditions, the true state renders the potential energy of the system a minimum. In the latter, among all admissible states in the sense of satisfying the equilibrium conditions and the specified stress boundary conditions, the true state renders the complementary energy of the elastic body a minimum.

It is noted that in the Saint-Venant problem, only stress boundary conditions are specified. In the expression for the potential energy, the part representing the drop of potential energy is statically equivalent to the work done by the end moment M on a possible total angle of twist $l\alpha^*$, where l is the length of the prismatic body and α^* is a possible angle of twist per unit length. Corresponding to an admissible state of strain, a set of displacements

$$u^* = -\alpha^* z y, \quad v^* = \alpha^* z x, \quad w^* = \alpha^* \varphi^*(x, y),$$

is taken, where $\varphi^*(x, y)$ corresponds to a possible warping. We obtain directly a relation between M and the true warping function $\varphi(x, y)$:

$$M = \alpha G \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy,$$

where $\varphi(x, y)$ is to make the functional

$$I(\varphi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy$$

*Received August 27, 1953.

a minimum. Here R denotes a cross section in the X Y -plane, and G is the shear modulus. Then we obtain the partial differential equation for $\varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } R,$$

and the *natural* boundary condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad \text{on } C,$$

where C in the case of multiply-connected cross section may consist of an exterior boundary C_0 and several interior boundaries $C_1, C_2, \dots, C_m$. We then obtain an upper

bound for the torsional rigidity $D = \frac{M}{\alpha G}$:

$$D \leq I(\varphi^*).$$

Since no boundary condition is prescribed on $\varphi^*(x, y)$, we can conveniently apply the direct method to obtain approximate results. This is more direct physically than the usual treatment by considering the Dirichlet integral

$$Q(\varphi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

In the application of the principle of complementary energy, we take as an admissible state of stress

$$\tau_{xz} = \alpha G \frac{\partial \Psi^*}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\alpha G \frac{\partial \Psi^*}{\partial x},$$

where $\Psi^*(x, y)$, a possible stress function, is to satisfy the boundary conditions:

$$\Psi^* = 0 \quad \text{on } C_0,$$

$$\Psi^* = k_i^* \text{ (some constant) on } C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Note that the actual constants k_i are not known beforehand.

The variational problem is actually an isoperimetric problem, i.e. to render

$$\frac{l \alpha^2 G}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

a minimum while keeping the moment

$$M = 2 \alpha G \iint_R \Psi^* dx dy + 2 \alpha G \sum_{i=1}^m k_i^* A_i$$

a constant, where A_i is the area surrounded by the interior boundary C_i ($i=1, 2, \dots, m$). Using the Lagrange multiplier method, we can find the true stress function so as to render the functional

$$J(\Psi^*) = \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 4 \iint_R \Psi^* dx dy - 4 \sum_{i=1}^m k_i^* A_i$$

a minimum. Then we obtain the partial differential equation for the true stress function $\Psi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{in } R,$$

and the additional natural boundary conditions:

$$\int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 2 A_i \quad \text{on } C_i \ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Hence we obtain a lower bound for the torsional rigidity:

$$D \geq -J(\Psi^*).$$

Using only one parameter, we find the following lower bound for the torsional rigidity:

$$D \geq \frac{\left(2 \iint_R \Psi^* dx dy + 2 \sum_{i=1}^m k_i^* A_i \right)^2}{\iint_R \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}.$$

As illustrations, the Ritz method is used to obtain lower and upper bounds for the torsional rigidity of the hollow square cross section:

$$C_0: x = \pm b, y = \pm b; \quad C_1: x = \pm a, y = \pm a.$$

The following bounds are obtained:

$$2(b^4 - a^4) \leq D \leq \frac{8}{3}(b^4 - a^4) - \frac{56}{135} \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \frac{(b^4 + a^2 b^2 + a^4)^2}{(b^4 + a^4)}.$$

The Galerkin method is then taken into consideration. We first take

$$\Psi^* = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m,$$

where

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 && \text{on } C_0, C_1, \dots, C_m, \\ f_i &= 0 && \text{on } C_0 \ (i = 1, 2, \dots, m), \\ f_i &= \delta_{ij} && \text{on } C_j \ (i, j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

From the conditions $\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$), we obtain the following equations:

$$\begin{aligned} \iint_R \left[\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^2} + 2 \right] f_i dx dy &= \int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - 2 A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ \iint_R \left[\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^2} + 2 \right] f_0 dx dy &= 0. \end{aligned}$$

These are taken to be the Galerkin equations. A suitable interpretation can be obtained by extending the membrane analogy.

As an illustration, we obtain the following bound for the torsional rigidity of the hollow square cross section:

$$D^* = 2(b^2 - a^2) \left(b^2 + \frac{ab}{3} - \frac{5}{3}a^2 \right).$$