

應力函數或扭曲函數爲三次多項式形式的扭轉問題*

葉 開 沅

(北京大學力學專業)

一. 引 言

關於一單連通區域所組成的截面的柱體的自由扭轉問題是聖維那¹(Saint-Venant)^[1]首先加以解決的。這在彈性力學的領域中是一件劃時代的工作。他所用的是湊合解法 (semi-inverse method)。這種解法是先假設了應力函數 Ψ ,[†] 使適合方程

$$\nabla_1^2 \Psi = -2 \quad (1)$$

及邊界條件

$$\text{在 } C \text{ 上 } \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\text{其中 } \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

C 是柱體截面所規定的區域 R 的邊界, 位於 X, Y 平面上, 見圖 1.

有了應力函數後, 便可求出應力的分佈, 位移, 扭轉力矩(或抗扭剛度), 扭轉問題因而全部解決。下面公式對本文是非常有用的:

$$\tau_{xx} = \alpha G \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\alpha G \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4)$$

*1953 年 8 月 27 日收到

[1] Saint-Venant, B. de, "Mémoire sur la Torsion des Prismes", *Paris Mémoires des Savants étrangers*, 14 (1856), 233-560.

[†]先假設扭曲函數 φ 或它的共軛函數 ψ , 所得的結果是一樣的, 因 Ψ, φ, ψ 三者中間有一定的關係。

$$M = \iint_R (x \tau_{xy} - y \tau_{xx}) dx dy, \quad (5)$$

或

$$M = 2\alpha G \iint_R \Psi dx dy, \quad (6)$$

$$M = \alpha D, \quad (7)$$

$$\psi = \Psi + \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (8)$$

其中 α 是每單位長度的扭轉, G 是剪力模數, M 是扭轉力矩, D 是抗扭剛度, ψ 是扭曲函數 φ 的共軛函數, τ_{xx} , τ_{xy} 是剪應力分量.

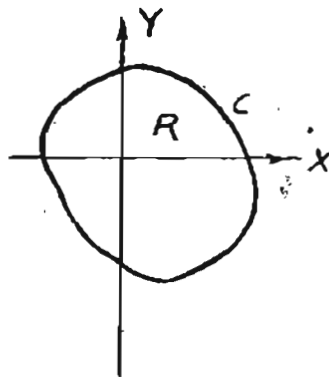


圖 1.

本文所假設的應力函數是具以下形式的三次多項式:

$$\Psi = \sum_{K=0}^3 (C_K Z^K + \bar{C}_K \bar{Z}^K) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (9)$$

這裏 C_K , $\bar{C}_K$ 為任意複數, 兩者互為共軛, Z 和 $\bar{Z}$ 各為

$$Z = x + iy, \quad \bar{Z} = x - iy.$$

(8) 式和 (9) 式比較, 我們可得出

$$\psi = \sum_{K=0}^3 (C_K Z^K + \bar{C}_K \bar{Z}^K).$$

由上式可看出 ψ 是調和函數, 它適合方程

$$\nabla_1^2 \psi = 0,$$

因此

$$\nabla_1^2 \Psi = -2.$$

在本文中，我們將要討論的是一個很古老的問題，聖維那對這類的問題曾有過相當的貢獻，但他對這方面並沒有加以系統化的研究。

三次多項式在 $\Psi = 0$ 時所形成的閉合邊界不外三種情形，便是 (i) 由三條直線相交而成的，(ii) 由一條直線及一條二次直線相交而成，(iii) 本身是一條三次曲線。本文依照這樣的情形分下面四部份來討論：

1) 證明若三次多項式的邊界為三條直線組成時，此種邊界必為一正三角形，而且解答是唯一的。

2) 討論以正三角形柱體扭轉後生成的等應力線為柱體截面邊界的扭轉。

3) 扭轉柱體截面邊界是由一條直線和一條二次曲線相交而成的。在這裏我們證明出來這條二次曲線僅有雙曲線是可能的，同時求出以這種形狀的柱體扭轉後生成的等應力線為邊界的扭轉力矩。

4) 由三次曲線組成的閉合截面的扭轉問題。

在本文中，我們解決了幾種新形狀的扭轉問題，比較重要的是第 3 和第 4 部份中所求出來的，它們和近代航空工程中的某些翼形 (airfoil) 非常近似。

二. 求證若三次多項式的邊界為三條直線所組成時，此種邊界必為一正三角形，而且解答是唯一的。

把第 (9) 式展開，我們得出

$$\begin{aligned} \Psi = & a_1 (x^3 - 3xy^2) + a_2 (3x^2y - y^3) + a_3 (x^2 - y^2) + a_4 xy + \\ & + a_5 x + a_6 y + a_7 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (10)$$

這裏 $a_1, a_2, \dots, a_7$ 都是常數。

假如扭轉截面的邊界是由三條直線組成時，這邊界可用下面的方程來表示：

$$(x - b_1)(x + b_2y + b_3)(x + b_4y + b_5) = 0, \quad (11)$$

其中 $b_1, b_2, \dots, b_5$ 是實數。

由方程 (10)，我們知道在 C 上， $\Psi=0$ ，因此

$$a_1(x^3 - 3xy^2) + a_2(3x^2y - y^3) + a_3(x^2 - y^2) + a_4xy + a_5x + a_6y + a_7 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0. \quad (12)$$

將 (11) 式展開，我們得到

$$\begin{aligned} x^3 + (b_2 + b_4)x^2y + b_2b_4xy^2 + (b_3 + b_5 - b_1)x^2 + \\ + (b_3b_4 + b_2b_5 - b_1b_2 - b_1b_4)xy - b_1b_2b_4y^2 + \\ + (b_2b_5 - b_1b_3 - b_1b_5)x - b_1(b_3b_4 + b_2b_5)y - b_1b_3b_5 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

將 (12) 式和 (13) 式比較，我們得到下面的方程組：

$$\left. \begin{aligned} b_2 + b_4 &= \frac{3a_2}{a_1}, \\ b_2b_4 &= -3, \\ \frac{a_2}{a_1} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

解方程組 (14)，我們得到

$$b_2 = \pm \sqrt{3}, \quad b_4 = \mp \sqrt{3}. \quad (14.A)$$

因此方程 (11) 可寫成以下的形式：

$$(x - b_1)(x + \sqrt{3}y + b_3)(x - \sqrt{3}y + b_5) = 0. \quad (15)$$

方程 (15) 可當作是由三組直線族所組成的，第一組平行於 Y 軸，第二組與 X 軸成 30° ，第三組與 X 軸成 150° (圖 2)，組成扭轉柱體邊界的三條直線各分別隸屬於此三直線族，因此柱體截面邊界必為正三角形，而且絕對不包含其他形狀的三角形。

這問題的解法，讀者可參閱彈性力學書^[2]。

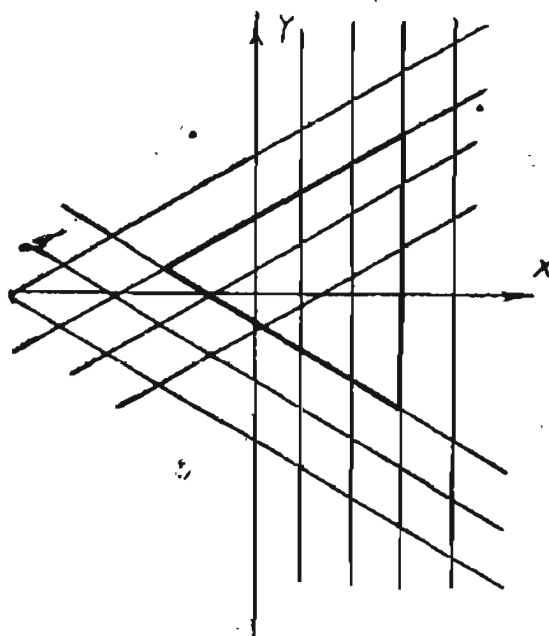


圖 2.

三. 以正三角形柱體扭轉後生成的等應力線為邊界的柱體的扭轉

正三角形如圖 3 所示，我們令應力函數是

$$\psi = -\frac{1}{6b}(x^3 - 3xy^2) + \frac{2}{3}b^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{k}{6b}, \quad (16)$$

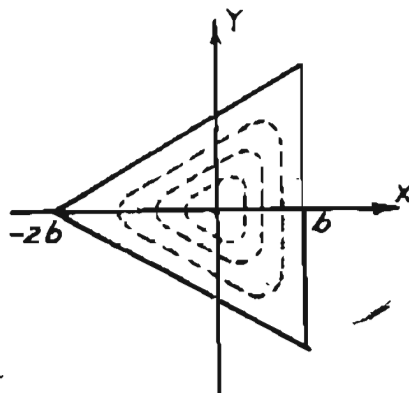


圖 3.

[2] Sokolnikoff, I. S., Mathematical Theory of Elasticity, first edition, pp. 119-142, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1946.

其中 k 是待定常數，這樣規定的截面邊界形狀，便是圖 3 中所示的虛線部份，也就是等應力線。

將常數 k 換置為另一常數 λ ，使有下列的關係：

$$\text{在 } C \text{ 上, } \Psi = 0.$$

$$\text{令 當 } y = 0 \text{ 時, } x = \pm \lambda b, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

由方程 (16) 即可得出

$$k = b^3 (\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4). \quad (17)$$

以 k 代入方程 (16)，我們得到

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{6b} [3by^2 - 3xy^2 + x^3 + 3bx^2 - b^3 (\lambda^3 + 3\lambda^2)] \\ &= -\frac{1}{6b} \left\{ 3by^2 - 3xy^2 + (x - \lambda b) [x^2 + b(3 + \lambda)x + b^2(\lambda^2 + 3\lambda)] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

這種形狀的柱體的剪應力分量、等應力線、扭轉函數均與正三角形截面相同。現在我們來求其與後者唯一不同的扭轉力矩。

由公式 (5)，我們得到

$$\begin{aligned} M &= -\alpha G \iint_R \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \alpha G \iint_R \left[\frac{1}{2b} (x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (19)$$

又由公式 (6)，我們得到

$$\begin{aligned} M &= 2\alpha G \iint_R \Psi dx dy \\ &= \alpha G \iint_R \left[\frac{1}{3b} (3xy^2 - x^3) - (x^2 + y^2) + \frac{b^2}{3} (\lambda^3 + 3\lambda^2) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

不論由 (19) 式或由 (20) 式，所得到的數值是完全相同的。因此我們可由這二個式子中將 $(x^3 - 3xy^2)$ 消去，而得出

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_R \frac{\alpha G}{5} [b^2 (\lambda^3 + 3\lambda^2) - (x^2 + y^2)] dx dy \\
 &= \frac{\alpha G}{5} [b^2 (\lambda^3 + 3\lambda^2) S - I_0].
 \end{aligned} \quad (21)$$

這裏 S 是扭轉柱體截面面積， I_0 是截面對於原點的極轉動慣量，這兩個數量是很容易用圖解法求得的。

積分 (21) 也可求之如下：先將一切長度均以 b 為單位量度之，並令

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \lambda^3 + 3\lambda^2, \quad Y = \sqrt{\frac{\xi^3 + 3\xi^2 - D}{3(\xi - 1)}}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \xi = \frac{x}{b}, \\
 A, B &= -\frac{1}{2}(3 + \lambda) \pm \frac{1}{2}\sqrt{3(3 + \lambda)(1 - \lambda)} < 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

以上述各值代入 (21)，我們得到

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2\alpha G b^4}{5} \int_A^1 d\xi \int_0^Y (D - \xi^2 - \eta^2) d\eta \\
 &= \frac{2\alpha G b^4}{45\sqrt{3}} \int_A^1 \frac{[-10\xi^5 - 34\xi^4 + (9D - 16)\xi^3 + (38D - 16)\xi^2 + (8D - 16)\xi + (8D - 9D^2 - 16)] d\xi}{(\xi - 1)(\xi - \lambda)(\xi - A)(\xi - B)} + \\
 &\quad + \frac{2\alpha G b^4}{45\sqrt{3}} \int_A^1 \frac{(8D - D^2 - 16) d\xi}{(\xi - 1)\sqrt{(\xi - 1)(\xi - \lambda)(\xi - A)(\xi - B)}}.
 \end{aligned} \quad (23)$$

此處應注意： λ, A, B 是方程 $\xi^3 + 3\xi^2 - D = 0$ 的三個根。

(23) 式是屬於超橢圓積分的類型。它應該化為橢圓積分的基本形式^[3]，然後由橢圓積分表查出所需的結果^[4]。

首先我們將 (23) 式中 ξ 的高次冪項的次數減低，並利用下列的積分公式：

$$\begin{aligned}
 &\int_A^1 \frac{d\xi}{(\xi - 1)\sqrt{(\xi - 1)(\xi - \lambda)(\xi - A)(\xi - B)}} \\
 &= \frac{2}{(B - 1)\sqrt{(1 - A)(\lambda - B)}} \left[K \left(\sqrt{\frac{(\lambda - A)(1 - B)}{(\lambda - B)(1 - A)}} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

[3] Goursat, Mathematical Analysis, Vol. 1, pp. 226-33.

[4] Friz Jahnke & Eugene Emde, Table of Functions with Formulae and curves (Funktionentafeln), pp. 52-8, Dover Publications, New York, 1943.

$$+ (\lambda - B) E \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{(\lambda - A)(1 - B)}{(\lambda - B)(1 - A)}} \right) \Big]. \quad (24)$$

這裏 K 是第一類全橢圓積分而 E 是第二類橢圓積分。

(23) 式可寫成

$$M/M_0 = F_1 \int_A^\lambda \frac{(\xi^2 + \xi) d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} + F_2 K \left(\sqrt{\frac{(\lambda - A)(1 - B)}{(\lambda - B)(1 - A)}} \right) + F_3 E \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{(\lambda - A)(1 - B)}{(\lambda - B)(1 - A)}} \right) \quad (25)$$

此處的 $P(\xi)$, F_1 , F_2 , F_3 , 和 M_0 各為:

$$\left. \begin{aligned} P(\xi) &\equiv (\xi - 1)(\xi - \lambda)(\xi - A)(\xi - B) = \\ &= \xi^4 + 2\xi^3 - 3\xi^2 - D\xi + D; \\ F_1 &= (73D - 130)/486; \\ F_2 &= [(11 - 43B)D + (27B - 23)D^2 + 64B]/243(1 - B)\sqrt{(1 - A)(A - B)}; \\ F_3 &= \frac{4}{243(B - 1)} \sqrt{\frac{\lambda - B}{1 - A}} (8D - D^2 - 16); \\ M_0 &= \frac{9\sqrt{3}}{5} \alpha G b^4. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

而 M_0 也就是正三角形截面的扭轉力矩。

現在我們再來求積分

$$I = \int_A^\lambda \frac{(\xi^2 + \xi) d\xi}{\sqrt{P(\xi)}}. \quad (27)$$

如令

$$S = \frac{\xi - \beta_1}{\xi - \beta_2} \quad \text{或} \quad \xi = \frac{\beta_2 S - \beta_1}{S - 1}, \quad (28)$$

以 (28) 式中的 ξ 代入 (27) 式, 使 $P(\xi)$ 轉換成 $P_1(S)$, β_1 和 β_2 的大小適足使 $P_1(S)$ 中的 S 奇次項消失, β_1 和 β_2 的值應為

$$\beta_1, \beta_2 = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3\lambda(\lambda + 2)}. \quad (29)$$

(27) 式的結果是

$$I = F_4 \gamma_1 E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}}{\gamma_1} \right) + \frac{F_5}{\gamma_1} K \left(\sqrt{\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1}} \right), \quad (29A)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+2)} + \sqrt{3}}{\sqrt{(1-\lambda)(\lambda+3)}}; \\ \gamma_2 &= \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+2)} - \sqrt{3\lambda}}{\sqrt{\lambda+2} + \sqrt{3\lambda}}; \\ F_4 &= \frac{3(\lambda-1)[(\lambda+1)\sqrt{3\lambda(\lambda+2)} - 2\lambda(\lambda+2)]}{4\Delta}; \\ F_5 &= \frac{(1+\lambda)(\lambda+3)\sqrt{3\lambda(\lambda+2)}}{4\Delta}; \\ \Delta &= \sqrt{-(1-\beta_2)(\lambda-\beta_2)(A-\beta_2)(B-\beta_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

因此 M 即可求得〔由 (25) 式和 (29A) 式〕。

最大應力發生在 $(0, \lambda b)$ 點，它的值是

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha G b \lambda}{2} (\lambda + 2). \quad (31)$$

四. 由一條直線和一條二次曲線相交而成的扭轉柱體截面邊界

這種邊界可用下面的方程來表示：

$$(x + c_1 y + c_2)(x^2 + c_3 y^2 + c_4 y + c_5) = 0, \quad (32)$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_5$ 均為實數，可為正也可為負。如 $c_3 > 0$ ，則二次曲線的軌跡為一橢圓；如 $c_3 = 1$ ，則為圓；如 $c_3 < 0$ ，則為雙曲線；如 $c_3 = 0$ ，則為拋物線。因之方程 (32) 包含了這一類型邊界的所有可能情形。

將 (32) 式展開，我們得出

$$\begin{aligned} x^3 + c_3 x y^2 + c_1 x^2 y + c_1 c_3 y^3 + c_2 x^2 + c_4 x y + \\ + (c_1 c_4 + c_2 c_3) y^2 + c_5 x + (c_1 c_5 + c_2 c_4) y + c_2 c_5 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

比較方程 (12), (33), 我們得出:

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= -3; & (a) \\ c_1 &= 3a_2/a_1; & (b) \\ c_1 c_3 &= -a_2/a_1; & (c) \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

解方程 (34) (a), (b), (c), 我們得到

$$c_1 = 0, \quad c_3 = -3;$$

因此 (32) 式可寫成

$$(x + c_2)(x^2 - 3y^2 - c_4 y + c_5) = 0. \quad (35)$$

由上式可看出扭轉柱體的截面的邊界是雙曲線的一支和一條平行於 Y 軸的直線相交而成的。

我們可令 $c_2 = -b$, $c_4 = 0$, $c_5 = -\lambda^2 b^2$; 則應力函數可寫成

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2b} (x^2 - 3y^2 - \lambda^2 b^2)(b - x) = \\ &= \frac{1}{2b} (3xy^2 - x^3 + bx^2 - 3by^2 + \lambda^2 b^2 x - \lambda^2 b^3), \quad (\lambda < 1) \end{aligned} \quad (36)$$

其中 b, λ 為任意實數; 若 $\lambda = 0$, 截面邊界便是正三角形, 它的兩邊便是上述雙曲線的漸近線。在這一類型的截面邊界中, 除上述形狀外, 絕對不包含其他的形狀, 因此 (35) 式所規定的截面形狀是唯一的 (圖 4)。

由公式 (4), 我們可求出剪應力分量

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{3aGy}{b} (x - b), \\ \tau_{xy} &= \frac{aG}{2b} (3x^2 - 3y^2 - 2bx - \lambda^2 b^2). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

我們不難求出在 $(b, 0)$ 點, 剪應力為最大, 在這點應力的值是

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha G \cdot b}{2} (1 - \lambda^2). \quad (37A)$$

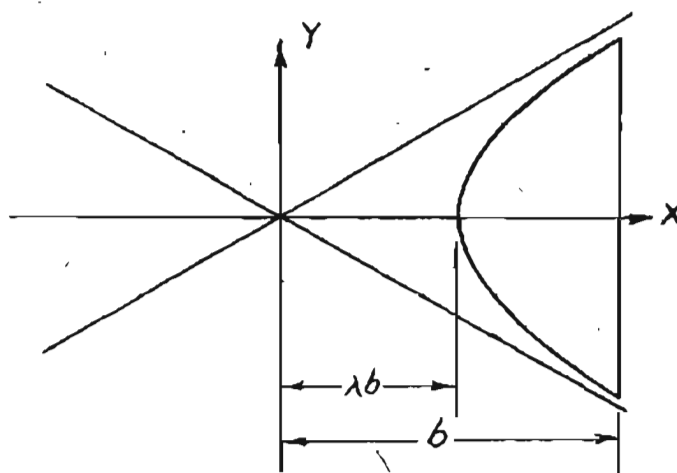


圖 4.

由公式 (5)，我們求得扭轉力矩

$$\begin{aligned} M &= \iint_R (x \tau_{xy} - y \tau_{xx}) dx dy = \\ &= \frac{\alpha G}{b} \int_{\lambda b}^b dx \int_0^{\sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2 b^2}{3}}} [3x^3 - 2bx^2 - \lambda^2 b^2 x - y^2 (9x - 6b)] dy = \\ &= \frac{\alpha G \sqrt{3} b^4}{18} \left(\frac{2 - 9\lambda^2 - 8\lambda^4}{5} \sqrt{1 - \lambda^2} + 3\lambda^4 \log \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

扭轉函數和它的共軛函數各為

$$\varphi = \frac{1}{2b} (y^3 - 3x^2 y + 4bxy + \lambda^2 b^2 y), \quad (39)$$

$$\psi = \frac{1}{2b} [3xy^2 - x^3 + 2b(x^2 - y^2) + \lambda^2 b^2 x - \lambda^2 b^3]. \quad (40)$$

等應力線的方程是

$$(3y^2 - x^2 + \lambda^2 b^2)(x - b) = 2bK, \quad (41)$$

其中 K 是常數。

扭轉柱體截面的凹凸 (warping) 方程是 $\varphi = \text{常數}$, 圖 5 和圖 6 所表示的便是等應力線和凹凸。

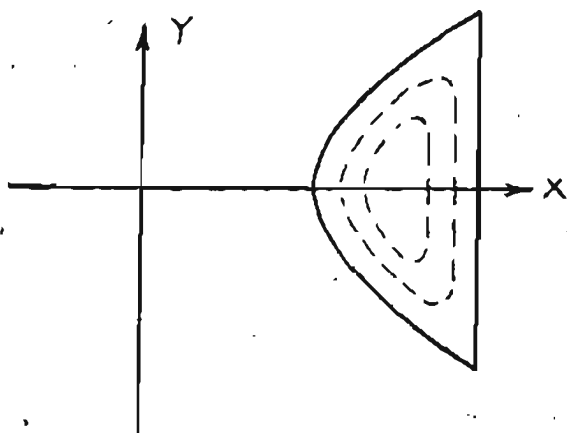


圖 5. 等應力線

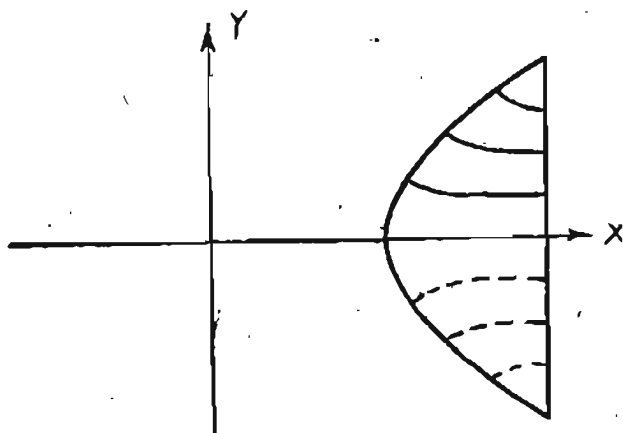


圖 6. 凹凸線

和前面的正三角形截面相同, 我們可得出以圖 5 中等應力線為邊界的扭轉柱體的應力函數

$$\Psi = \frac{1}{2b} [3xy^2 - x^3 + bx^2 - 3by^2 + \lambda^2 b^2 x - \lambda^2 b^3 - K], \quad (42)$$

其中 K 是待定常數; 若將 K 換置成另一常數 ϵ , 使它們有下列的關係:

在 C 上 $\Psi=0$, 令當 $y=0$ 時

$$x = \epsilon b \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}{3} \leq \epsilon \leq 1 \right).$$

以上述 x, y 的值代入方程 (42)，我們有

$$-\epsilon^3 b^3 + \epsilon^2 b^3 + \lambda^2 \epsilon b^3 - \lambda^2 b^3 - K = 0.$$

所以

$$K = b^3 (1 - \epsilon) (\epsilon^2 - \lambda^2).$$

方程 (42) 可寫成

$$\psi = \frac{1}{2b} \left\{ 3y^2 (x-b) - (x-\epsilon b) [x^2 - b(1-\epsilon)x + b^2(\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2)] \right\}. \quad (43)$$

這種形狀扭轉柱體的剪應力分量、等應力線、扭轉函數和它的共軛函數，均與前面所求的相同〔方程 (37)，(39)，(40) 和 (41)〕，現在我們來求扭轉力矩。

由公式 (5)，我們得到

$$M = \frac{\alpha G}{2b} \iint_R (3x^3 - 2bx^2 - \lambda^2 b^2 x + 6by^2 - 9xy^2) dx dy. \quad (44)$$

又由公式 (6)，我們得到

$$M = \frac{\alpha G}{b} \iint_R [3xy^2 - x^3 + bx^2 - 3by^2 + \lambda^2 b^2 x + b^3 \epsilon (\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2)] dx dy. \quad (45)$$

由 (44) 和 (45) 兩式中，消去 $(x^3 - 3xy^2)$ 項，我們得到

$$\begin{aligned} M &= \frac{\alpha G}{5} \iint_R [x^2 - 3y^2 + 2\lambda^2 bx + 3b^2 \epsilon (\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2)] dx dy \\ &= \frac{\alpha G}{5} \left\{ I_y - 3I_x + [2\lambda^2 b\bar{x} + 3b^2 \epsilon (\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2)] S \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

其中 I_x, I_y 是扭轉柱體截面對於 X 及 Y 軸的轉動慣量， S 是柱體截面積， $\bar{x}$ 為截面面積重心和 Y 軸的距離。

積分 (46) 也可用和第三節相同的方法求得， M 的值是

$$\begin{aligned} M/M_0 &= \frac{2(\lambda^4 + 2\lambda^2 D + D^2)}{1-B} \sqrt{\frac{\epsilon-B}{1-A}} E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{(\epsilon-A)(1-B)}{(\epsilon-B)(1-A)}}\right) + \\ &+ \frac{[(17B-9)\lambda^4 + (41B-25)D\lambda^2 + (54B-46)D^2 - 2(1-B)(D+\lambda^2)]}{4\sqrt{(1-A)(\epsilon-B)}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times K\left(\sqrt{\frac{(\epsilon-A)(1-B)}{(\epsilon-B)(1-A)}}\right) + \frac{\beta_1-\beta_2}{\Delta\gamma_1} \left[\beta_2(F_1+\beta_2 F_2) + \frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{(1-\gamma_1^2)(\gamma_2^2-1)} \right] \times \\ & \times K\left(\sqrt{\frac{\gamma_1^2-\gamma_2^2}{\gamma_1}}\right) + \frac{\gamma_1 F_2 (\beta_1-\beta_2)^3}{\Delta(1-\gamma_1^2)(1-\gamma_2^2)} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\gamma_1^2-\gamma_2^2}}{\gamma_1}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \epsilon(\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2), \\ A, B &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon) \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\epsilon - 3\epsilon^2 + 4\lambda^2}, \\ \beta_1, \beta_2 &= \frac{2\epsilon + \lambda^2 - \epsilon^2}{2\epsilon} \pm \frac{\sqrt{(\epsilon^2 - \lambda^2)(3\epsilon^2 - 2\epsilon - \lambda^2)}}{2\epsilon}, \\ \Delta &= \sqrt{-(1-\beta_2)(\epsilon-\beta_2)(A-\beta_2)(B-\beta_2)}, \\ F_1 &= -(F_2 + \frac{15}{4}\lambda^4 + \frac{15}{2}D\lambda^2), \\ F_2 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda^2 + \frac{19}{4}D - 2\lambda^4, \\ \gamma_1 &= \frac{\sqrt{(\epsilon^2 - \lambda^2)(3\epsilon^2 - \lambda^2 - 2\epsilon)} + \epsilon + \lambda^2}{\epsilon\sqrt{1 + 2\epsilon - 3\epsilon^2 + 4\lambda^2}}, \\ \gamma_2 &= \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2} - \sqrt{3\epsilon^2 - 2\epsilon - \lambda^2}}{\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2} + \sqrt{3\epsilon^2 - 2\epsilon - \lambda^2}}, \\ M_0 &= \frac{2\sqrt{3}}{45} \alpha G b^4. \end{aligned} \quad (48)$$

最大剪應力發生在 $(\epsilon b, 0)$ 點, 它的值是

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha G b}{2} (3\epsilon^2 - 2\epsilon - \lambda^2). \quad (49)$$

五. 由三次曲線組成的閉合截面的扭轉

在扭轉問題中, 截面邊界必須閉合. 因此截面邊界必包含一重點 (double point). 我們令此點是原點, 同時假定截面邊界對於 X 軸是對稱的, 由 (10) 式, 我們即可得出應力函數

$$\Psi = a_1 (3xy^2 - x^3) + (a_3 - \frac{1}{2})x^2 - (a_3 + \frac{1}{2})y^2, \quad (50)$$

其中 a_1, a_3 是常數。

在邊界 C 上, $\Psi=0$, 亦即

$$0 = (a_3 - \frac{1}{2})x^2 - (a_3 + \frac{1}{2})y^2 - a_1(x^3 - 3xy^2). \quad (51)$$

假如我們令過原點的直線是

$$y = mx, \quad (52)$$

以 (52) 式中的 y 代入方程 (51) 中, 我們得到

$$0 = x^2 [(a_3 - \frac{1}{2}) - (a_3 + \frac{1}{2})m^2] + x^3 (3a_1 m^2 - a_1). \quad (53)$$

直線 (52) 為曲線 (51) 過原點的切線條件是曲線上的二點在原點相重, 因此

$$(a_3 - \frac{1}{2}) - (a_3 + \frac{1}{2})m^2 = 0. \quad (54)$$

由方程 (52) 和 (54) 消去 m , 我們得到曲線 (51) 過原點的切線方程

$$(a_3 - \frac{1}{2})x^2 - (a_3 + \frac{1}{2})y^2 = 0. \quad (55)$$

切線 (55) 有三種不同的情形^[5], 便是:

(i) $(a_3 - \frac{1}{2})(a_3 + \frac{1}{2}) > 0$, 曲線在原點有一結點,

(ii) $(a_3 - \frac{1}{2})(a_3 + \frac{1}{2}) = 0$, 曲線在原點有一岐點,

(iii) $(a_3 - \frac{1}{2})(a_3 + \frac{1}{2}) < 0$, 曲線在原點有一孤點.

[5] Hilton, Plane Algebraic Curves, pp. 21-9, Oxford university Press, 1919.

在扭轉問題中所需要的是第 (i) 種情形。假如選定的常數 a_1, a_3 是正實數，柱體的截面位於 Y -軸的右半平面 (圖 7)。

若要

$$(a_3 - \frac{1}{2})(a_3 + \frac{1}{2}) > 0,$$

必須

$$a_3 > \frac{1}{2}.$$

由方程 (51)，我們知道：

$$\text{當 } y=0 \text{ 時， } x = \frac{1}{a_1}(a_3 - \frac{1}{2}) \text{ 或 } 0.$$

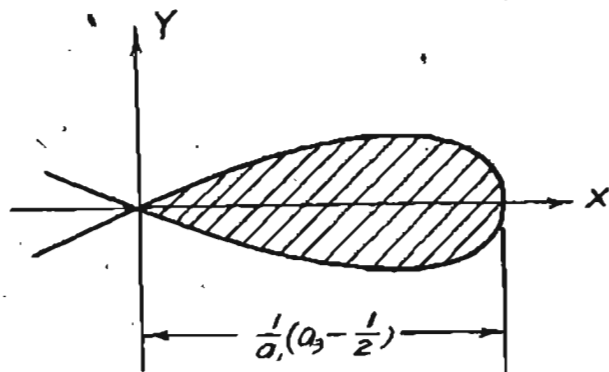


圖 7

爲要使 x 值在 0 與 $\frac{1}{a_1}(a_3 - \frac{1}{2})$ 間， y 有實值，又必須 $a_3 < 1$ ，因此 a_1, a_3 必須適合下列條件：

$$a_1 > 0, \quad \frac{1}{2} < a_3 < 1. \quad (56)$$

若令 $a_3 - \frac{1}{2} = \beta$ ，則應力函數可寫成

$$\Psi = a_1(3xy^2 - x^3) + \beta x^2 - (1 + \beta)y^2 \quad (0 < \beta < \frac{1}{2}). \quad (57)$$

由公式 (4)，我們求出剪應力分量

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= 2\alpha G y (3a_1 x - 1 - \beta), \\ \tau_{xy} &= \alpha G [3a_1(x^2 - y^2) - 2\beta x]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\tau_{sx}^2 + \tau_{sy}^2} \\ &= aG \sqrt{4(3a_1x - 1 - \beta)^2 y^2 + [3a_1(x^2 - y^2) - 2\beta x]^2}.\end{aligned}\quad (59)$$

我們知道最大剪應力發生在邊界 C 上。由 (57)，我們得出

$$y^2 = \frac{a_1 x^3 - \beta x^2}{3a_1 x - 1 - \beta}.\quad (60)$$

以 y^2 代入 (59) 式，我們得到在截面邊界上的剪應力

$$\tau = aG \sqrt{4(3a_1x - 1 - \beta)(a_1x^3 - \beta x^2) + \left[\frac{6a_1^2x^3 - 3a_1(1+2\beta)x^2 + 2\beta(1+\beta)x}{3a_1x - 1 - \beta} \right]^2}.\quad (61)$$

令上面截面邊界上的剪應力是 $\tau = \tau(x)$ ，我們由 $\frac{d\tau(x)}{dx} = 0$ ，即可求出 $\tau_{\max}$ 發生的位置，由此即可求出 $\tau_{\max}$ 的值。

等應力線的方程是

$$3xy^2 - x^3 + \frac{\beta}{a_1}x^2 - \frac{1+\beta}{a_1}y^2 = \text{常數}.\quad (62)$$

扭曲函數和它的共軛函數各為

$$\varphi = a_1(3xy^2 - x^3) + a_3(x^2 - y^2),\quad (63)$$

$$\psi = a_1(y^3 - 3x^2y) + 2a_3xy.\quad (64)$$

扭轉力矩是

$$M = \frac{2}{5} aG [\beta I_y - (1 + \beta) I_x],\quad (65)$$

其中 I_y 和 I_x 是截面面積對於 Y 軸及 X 軸的轉動慣量。

本文所用的方法對於三次以上的多項式仍可應用。

錢偉長教授在完成本文的過程中，予作者以絕大的鼓勵和幫助，謹在這裏向他致以衷心的謝忱。

SAINT-VENANT'S TORSION PROBLEM WITH STRESS FUNCTION IN THE FORM OF A THIRD DEGREE POLYNOMIAL*

YEH KAI-YUAN

(Peking University)

ABSTRACT

The free torsion problem, solved by Saint-Venant with semi-inverse method, is well known in the theory of elasticity. In this paper we discuss this problem systematically by considering a cylindrical bar whose cross section is a simply connected region under twist moment M , and assume that the stress function Ψ is in the form of a third degree polynomial, that is

$$\Psi = \sum_{K=0}^3 (C_K Z^K + \bar{C}_K \bar{Z}^K) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (\text{A})$$

where C_K are complex numbers, $\bar{C}_K$ their corresponding conjugates, and

$$Z = x + iy, \quad \bar{Z} = x - iy.$$

The stress function satisfies the following differential equation and boundary condition:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= -2, \\ \Psi &= 0, \text{ on } C. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

This paper consists of four parts:

1) We prove that the cross section, formed by three straight lines possessing simple solution as in (A), is an equilateral triangle and the solution is unique.

2) We find out the solution of the torsion problem of a bar whose cross section is formed by the lines of shearing stress of the previous equilateral triangle and obtain the following results:

*Received August 27, 1953.

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{1}{6b} [3by^2 - 3xy^2 + x^3 + 3bx^2 - b^3(\lambda^3 + 3\lambda^2)] \\ &= -\frac{1}{6b} \left\{ 3by^2 - 3xy^2 + (x - \lambda b) [x^2 + b(3 + \lambda)x + b^2(\lambda^2 + 3\lambda)] \right\}, \quad (C)\end{aligned}$$

$$M = \frac{\alpha G}{5} [b^2(\lambda^3 + 3\lambda^2)S - I_0], \quad (D)$$

where b is one-third height of the equilateral triangle, λ a constant ($0 \leq \lambda \leq 1$), S the area of the cross section of the bar, α the twist per unit length, G the shear modulus, and I_0 the polar moment of inertia with respect to the origin.

The twist moment is expressed in terms of the first and second kinds of complete elliptic integrals.

3) The solution for the cross section formed by a straight line and a curve of second degree polynomial is obtained. It is also proved that this quadratic curve must be a branch of hyperbola. The following expressions are our results:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{2b} (x^2 - 3y^2 - \lambda^2 b^2) (b - x) \\ &= \frac{1}{2b} (3xy^2 - x^3 + bx^2 - 3by^2 + \lambda^2 b^2 x - \lambda^2 b^3), \quad (\lambda < 1) \quad (E)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{3\alpha G}{b} y(x - b), \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha G}{2b} (3x^2 - 3y^2 - 2bx - \lambda^2 b^2),\end{aligned} \right\} \quad (F)$$

$$M = \frac{\alpha G \sqrt{3} b^4}{18} \left(\frac{2 - 9\lambda^2 - 8\lambda^4}{5} \sqrt{1 - \lambda^2} + 3\lambda^4 \log \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \right), \quad (G)$$

$$\varphi = \frac{1}{2b} (y^3 - 3x^2 y + 4bxy + \lambda^2 b^2 y), \quad (H)$$

$$\psi = \frac{1}{2b} [3xy^2 - x^3 + 2b(x^2 - y^2) + \lambda^2 b^2 x - \lambda^2 b^3], \quad (I)$$

where b and λ are constants, τ_{xy} and τ_{xx} the shear stress components, φ the torsion function and ψ its conjugate function.

For the cross section, bounded by the lines of shearing stress of the above cross section, the twist moment is

$$M = \frac{\alpha G}{5} \left\{ I_y - 3I_x + [2\lambda^2 b\bar{x} + 3b^2 \epsilon (\epsilon^2 - \epsilon - \lambda^2)] S \right\}, \quad (J)$$

where ϵ is a constant, I_x and I_y moments of inertia with respect to X and Y axes, and $\bar{x}$ the distance between the center of gravity of the cross section and Y axis.

As before we have also the twist moment in terms of elliptic integral.

4) The last part gives the solution of the torsion problem of a bar whose cross section is formed by a curve of a third degree polynomial.

The stress function is

$$\Psi = a_1 (3xy^2 - x^3) + \beta x^2 - (1 + \beta) y^2, \quad (K)$$

where a_1 and β are constants under the condition

$$a_1 > 0, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (L)$$

The shear stress components are

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\alpha G y (3a_1 x - 1 - \beta), \\ \tau_{xy} &= \alpha G [3a_1 (x^2 - y^2) - 2\beta x]. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

The torsion function and its conjugate function are respectively

$$\varphi = a_1 (3xy^2 - x^3) + \left(\frac{1}{2} + \beta\right) (x^2 + y^2), \quad (N)$$

$$\psi = a_1 (y^3 - 3x^2y) + (1 + 2\beta) xy. \quad (O)$$

The twist moment is

$$M = \frac{2}{5} \alpha G [\beta I_y - 1 + \beta] I_x. \quad (P)$$