金屬的恒溫斷裂條件*

劉 叔 儀

（北京鋼鐵學院）

提 要

本文引用黏性物體 (viscous material) 斷裂的能量條件，來決定金屬在恒溫狀態 (isothermal condition) 下的斷裂力學條件．根據分析結果，金屬在平均張力與平均壓力 (average tension and average compression) 下，應服從不同的力學條件；在平均張力下，這條件是平均張力與八面切應力 (octahedral shear stress) 間的橢圓關係；在平均壓力下，是平均壓力與八面切應力間的雙曲線關係．這兩個條件的數值，靠金屬的體積彈性係數、切彈性係數、固態表面能與其中微小裂口的半徑而定．和實驗事實比較，在平均壓力下，理論與實驗結果很接近；在平均張力下，兩者間有些差別，但變化趨勢，仍然一致．由這兩條件在應力空間中的表示，證明了最大畸變能 (maximum distorsion energy) 不可能用作金屬斷裂條件．再引用連續體的普遍應變硬化 (strain hardening) 函數與上述結果，得到兩個延度 (ductility) 的表示，和實驗事實在質上一致，沒有作量的比較．

一．引 言

金屬恒溫斷裂力學條件學說，流行的有好幾個．如下所示，這些假說，不外是以某應力函數來作斷裂發生的條件：

1） 最大正應力學說：以為當 $S_1 = K_f$ 時，斷裂即發生．

2） 最大彈性應變學說：以為當 $S_1 - \mu(S_2 + S_3) = K_f$ 時，斷裂即發生．

3） 最大切應力學說：以為當 $S_1 - S_3 = K_f$ 時，斷裂即發生．

4） 最大流體靜張力 (maximum hydrostatic tension) 學說[1]：此派認為當 $S_1 + S_2 + S_3 = K_f$ 時，斷裂即發生．

以上 S 為主應力，μ 為泊松比 (Poisson's ratio)，K_f 為一軸應力的"斷裂應

*1951 年 8 月 28 日收到

[1] Bridgeman, P. W., "The Tensile Properties of Several Special Steels and Certain other Materials under Pressure", *Jour. Appl. Phy.* **17** (1946), U.S.A.

力". 這些學說遇到的困難是某條件只適用於某一小範圍之應力狀態內,決定各條件的常數 K_f, 爲一空想的斷裂應力[2], 沒有明確的意義. 這類學說, 多半是仿效連續體範性形變 (plastic deformation) 條件[3,4], 後者中有一個和實驗事實相近的學說,即最大畸變能學說. 但在斷裂現象中, 根據實驗事實, 畸變能條件不適用[5]; 本文中將從理論上證明,這條件完全不存在於金屬斷裂現象中.

廣泛地說,決定金屬斷裂的應力函數,爲應力空間中之曲面,其正確形式還沒有找到. 顯然,找這條件的一個正確路徑是從裂口傳播的能量關係上去着手. 這得引用到黏性物體斷裂問題中用到的能量條件.

黏性物體的斷裂, 早已有典型的學說[6,7], 一般以爲這類物體的實驗斷裂應力遠低於理論數值的原因, 是其中有微小裂口存在. 同樣的現象在金屬中也存在;同樣的解釋,在質上也正確; 但金屬的斷裂與黏性物體的斷裂, 有基本不同之點, 即金屬的斷裂與範性形變在同一過程中發生. 因此, 黏性物體的斷裂學說, 不能照樣用來分析金屬斷裂的全部過程,可是,裂口傳播的基本能量條件觀念,用於延性或脆性斷裂, 同樣是正確的. 原作者[7] 分析玻璃的斷裂問題, 所用的裂口傳播能量條件,可以寫作

$$\frac{de}{dx} = \frac{dF}{dx}, \tag{1}$$

其中 e 爲裂口周圍一定體積內的彈性應變能, F 爲裂口上下兩面的總表面能, x 爲裂口在傳播方向上的尺寸. 根據這不穩定條件。原作者算出橢圓裂口在平面應力狀態與平面應變狀態下的傳播正應力. 後來,一個作者[8] 將原作者理論擴充到三度空間,算出圓裂口的傳播正應力 T_c 如次:

---

[2] Ludwik, P., "Elemente der Technologischen Mechanik", Berlin, 1909.

[3] Nadai, A., "Plasticity", McGraw Hill, U.S.A., 1931.

[4] Siebel, "Plastic Forming of Metals", Steels, U.S.A., 1933-1944.

[5] Dorn, J. E., "The Effect of Stress State on the Fracturing Strength of Metals", Fracturing of Metals, ASM, 1948.

[6] Griffith, A. A., "The Phehomenon of Rupture and Flow of Solids", *Phil. Trans. Loyal. Soc. London*, 1920.

[7] ————, "The Theory of Rupture and Flow in Solids", *Proc. 1st. Intern. Cong. Appl. Mech.* 1924.

[8] Sack, R. A., "Extension of Griffith's Theory to Three Dimensions", *Proc. Phy. Soc. London*, **58** (1946).

$$T_C = \sqrt{\frac{2Ea}{Cr_0}}, \tag{2}$$

E 爲楊氏係數，a 爲固體單位表面能，r_0 微小裂口半徑，c 爲一常數，值近於一，正確數值爲 $4(1-\mu^2)/\pi$. 這些結果的得來，都經過冗長的計算. 同樣結果，可以從簡單方法得出[9]，假設裂口周圍在裂口傳播時，受到應力解除的體積是以 r_0 爲半徑的球，球內單位應變能爲一常數 $T_c^2/2E$，產生裂口表面變化的能量，來自這球中應變能變化的一大部份 c'，c' 之值近於 1，根據不穩定條件，與上述各假設，得到

$$T_C = \sqrt{\frac{2Ea}{C'r_0}}. \tag{3}$$

這些分析，目的都是在從裂口傳播的能量條件來決定斷裂的正應力條件. 如上所述，金屬恆溫斷裂的一般條件，不是最大正應力條件. 本文宗旨在於引用同樣觀念，來對金屬的恆溫斷裂力學函數，作一個近似的決定. 在本文中，對這問題的基本看法，是這樣：

在原則上，上述不穩定條件可應用於延性斷裂，但應用正確與否，在於應變能之計算. 這有兩個情形應該分別討論：一是恆溫狀態下的延性斷裂；一是非恆溫狀態下的延性斷裂，其極端情形爲恆能延性斷裂. 在恆溫狀態下，熱能不蓄於試樣內，所以延性應變能在傳播條件中可以不考慮；但在非恆溫狀態下，由延性應變能而來之熱能，部份或全部蓄於試樣內，故在傳播條件中應該算入，這個問題暫不在本文中討論.

不問應力狀態如何，受力金屬在能量滿足"長大傳播"條件時，斷裂即發生. 在恆溫狀態之下，傳播條件中之應變能，爲應變硬化階段中的彈性應變能，忽略範性形變對彈性係數的影響，則裂口傳播時之彈性應變能，可由當時的應力狀態決定. 如應力應變間有一普遍應變硬化函數存在，在裂口傳播的能量條件，不但決定當時的應力狀態，也決定當時的應變狀態，那就是說，也決定延度.

因爲多晶體內的應力狀態不能描寫，一般材料試驗結果，都是由於金屬爲均勻連續體的假設得來的，本文也援例用這假設. 因此，所指微小裂口不是原子脫

[9] Zener, C. M., "Elasticity and Anelasticity of Metals", Univ. of Chicago Press, 1948.

節 (atomic dislocation)，而是 (3) 式中的圓裂口. 以下計算,採用 (3) 式導演法.

二. 恆溫下的裂口傳播能量條件

以下要用到三個不變數: 平均正應力 (average normal stress)，八面切應力 τ_0，和八面切應變 (octahedral shear strain) γ_0[10]，三者在主坐標系中的表示如次:

$$\theta = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3), \tag{4}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2}, \tag{5}$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \tag{6}$$

以上，ε 爲主應變. 當 $\theta > 0$ 時，θ 所代表之應力狀態叫做平均張力; $\theta < 0$ 時,叫做平均壓力. 根據連續體範性形變理論,決定應變硬化的應力函數爲應力張量的二次不變數[10,11]，其中一個學說[10]，以八面切應力 τ_0 爲決定應變硬化的應力函數. θ 爲控制彈性體積變化的力學函數,流體靜應力 (hydrostatic stress) 在斷裂中能解除,所以 θ 在斷裂現象中很重要,甚至有人用它作斷裂條件[1]，因爲在金屬中，斷裂與範性形變爲同一現象的兩個方面，所以從此可以得到一個簡單的推論，即 τ_0 和 θ 爲控制金屬斷裂現象的兩個主要力學變數. 而在連續體彈性學中,受力體內的總單位彈性應變能 U，恰好是用這兩個函數來表示:

$$U = U_v + U_s = \frac{\theta^2}{2K} + \frac{3\tau_0^2}{4G}, \tag{7}$$

$U_v = \dfrac{\theta^2}{2K}$ = 單位體積內的彈性體積應變能 (strain energy for change in volume),

$U_s = \dfrac{3\tau_0^2}{4G}$ = 單位體積內的彈性畸變能 (distorsion energy),

[10] Nadai, A., "Plastic Behaviors of Metals in the Strain-Hardening Range", *Jour. Appl. Phy.* U.S.A., 1937.

[11] Dorn, J. E., "Ductility of Metals under General Conditions of Stress and Strain", ASM, 1947.

K 爲體積彈性係數，G 爲切彈性係數．由此，裂口傳播條件可以寫作：

$$\frac{dE_v}{dx}+\frac{dE_s}{dx}=\frac{dF}{dx}, \tag{8}$$

E_v 與 E_s 各爲裂口周圍一定體積內的彈性體積應變能和同樣體積內的彈性畸變能．(8) 式的應用，需要進一步討論，因爲裂口傳播的條件，不一定就是斷裂的條件，裂口在 (8) 式的能量關係滿足時，也可能作負傳播而部份或全部封閉，這是 (8) 式可能情形之一：

$$\frac{dE_v}{dx}+\frac{dE_s}{dx}=\frac{dF}{dx}<0. \tag{9}$$

(9) 式的顯著例子是裂口周圍流體靜壓力 (hydrostatic pressure) 解除時，上下兩部體積膨脹，後果是裂口部份或全部封閉．因此，(9) 式所代表的是斷裂不發生的條件．和它相反的情形是

$$\frac{dE_v}{dx}+\frac{dE_s}{dx}=\frac{dF}{dx}>0. \tag{10}$$

(10) 式才是斷裂發生的條件，但 (10) 式所代表的不是一個單獨的情形，可能的情形有三種：

$$\frac{dE_v}{dx}>0,\quad \frac{dE_s}{dx}>0; \tag{I}$$

$$\frac{dE_v}{dx}>0\geqslant\frac{dE_s}{dx}; \tag{II}$$

$$\frac{dE_s}{dx}>0\geqslant\frac{dE_v}{dx}. \tag{III}$$

這就說明爲什麼金屬在不同的應力狀態下，服從不同的斷裂力學條件，因爲裂口傳播的基本能量條件就不止一個．這三個可能的條件所存在的應力狀態，可以從 (9)、(10) 兩式看出，完全從現象上去想也許很混雜．比較 (9)，(10) 兩式，得一個簡單的結論：凡是正的應變能變化都利於裂口傳播；凡是負的應變能變化都利於裂口封閉．根據這結論，(III) 情形中的 E_v 變化利於裂口封閉，能產生利於裂口封閉的 E_v 變化的應力狀態，不是流體靜壓力，就得是其他平均壓

力狀態,所以 (III) 種情形,存在於 $\theta \leqslant 0$ 的應力狀態裏. 在 (I), (II) 兩種情形中, E_v 變化利於裂口傳播, 能夠產生這種變化的應力狀態, 不是流體靜張力, 就得是其他平均張力狀態,所以 (I), (II) 兩種情形相當於 $\theta \geqslant 0$ 的應力狀態. 根據以上推論,這可能的三個斷裂能量條件及其所存在之應力狀態,如表 1 所示:

表 1

斷裂的能量條件	應力狀態
(I): $\left\lvert \frac{dE_v}{dx} \right\rvert + \left\lvert \frac{dE_s}{dx} \right\rvert = \frac{dF}{dx} > 0$	$\theta \geqslant 0$
(II): $\left\lvert \frac{dE_v}{dx} \right\rvert - \left\lvert \frac{dE_s}{dx} \right\rvert = \frac{dF}{dx} > 0$	$\theta \geqslant 0$
(III): $\left\lvert \frac{dE_s}{dx} \right\rvert - \left\lvert \frac{dE_v}{dx} \right\rvert = \frac{dF}{dx} > 0$	$\theta \leqslant 0$

(III) 和 (I), (II) 兩種情形的劃分,是根據應力解除後;體積變化對裂口傳播的影響來判斷的;但 (I), (II) 兩種情形之間,劃分的條件不顯明. (I), (III) 兩種情形在經驗之內, (II) 種情形是否與金屬斷裂有關仍是問題.

三. 恒溫斷裂的力學條件

採用 (3) 式的導演法, 以 r_0 爲微小裂口在開始傳播時的半徑,相當於表 1 中之 x, 其周圍能放出應變能的體積爲以 r_0 爲半徑的球, 這球內的平均應力狀態以 θ 和 τ_0 來描寫. 兩者在裂口開始傳播時, 已經受到應變硬化, 其數值用 θ_F 和 τ_F 來代表,二者滿足裂口傳播的能量條件. 爲簡單起見,略去 (3) 式計算中所用的值近於 1 的常數,也就是假設在裂口開始傳播時,上述體積內的全部應變能變化,用以產生裂口表面變化. 這樣,從彈性體積應變能與彈性畸變能的表示和表 1 中所示三斷裂能量條件,經過簡單計算,得到相當於前述三種情形的斷裂力學條件如次:

$$\frac{\theta_F^2}{K} + \frac{3\tau_F^2}{2G} = \frac{2\alpha}{r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{11}$$

$$\frac{\theta_F^2}{K} - \frac{3\tau_F^2}{2G} = \frac{2\alpha}{r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{12}$$

$$\frac{3\tau_P^2}{2G} - \frac{\theta_P^2}{K} = \frac{2\alpha}{r_0}, \quad \theta \leqslant 0. \tag{13}$$

由彈性係數間之關係，以上三式可化爲：

$$(1-2\mu)\theta_F^2 + (1+\mu)\tau_F^2 = \frac{2E\alpha}{3r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{14}$$

$$(1-2\mu)\theta_F^2 - (1+\mu)\tau_F^2 = \frac{2E\alpha}{3r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{15}$$

$$(1+\mu)\tau_F^2 - (1-2\mu)\theta_F^2 = \frac{2E\alpha}{3r_0}, \quad \theta \leqslant 0. \tag{16}$$

在應力空間中，以上三式化爲：

$$(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - 2\mu(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1) = \frac{2E\alpha}{r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{17}$$

$$(4-2\mu)(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1) - (1+4\mu)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{6E\alpha}{r_0}, \quad \theta \geqslant 0; \tag{18}$$

$$(1+4\mu)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - (4-2\mu)(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1) = \frac{6E\alpha}{r_0}, \quad \theta \leqslant 0. \tag{19}$$

在 τ-θ 平面中，這三個可能的斷裂條件爲一橢圓及兩對雙曲線，三者共同長軸之半 a，短軸之半 b，及長短軸之比各爲：

$$a = \sqrt{\frac{2K\alpha}{r_0}} = \sqrt{\frac{2E\alpha}{3r_0(1-2\mu)}}, \tag{20}$$

$$b = \sqrt{\frac{4G\alpha}{3r_0}} = \sqrt{\frac{2E\alpha}{3r_0(1+\mu)}}, \tag{21}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{3K}{2G}} = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-2\mu}}. \tag{22}$$

三者存在部份（見表 1）如圖 1 所示．在應力空間內，(I)，(III) 兩斷裂應力曲面與範性形變中所用八面切應力條件或最大畸變能條件有相似之處當 $\mu = \frac{1}{2}$ 時，兩者除等號後常數外，其餘完全與畸變能條件相同，但只有 $\mu = \frac{1}{2}$ 時相同；而金屬的泊松比總是小於 $\frac{1}{2}$，這說明爲什麼最大畸變能條件不存在於金屬斷裂

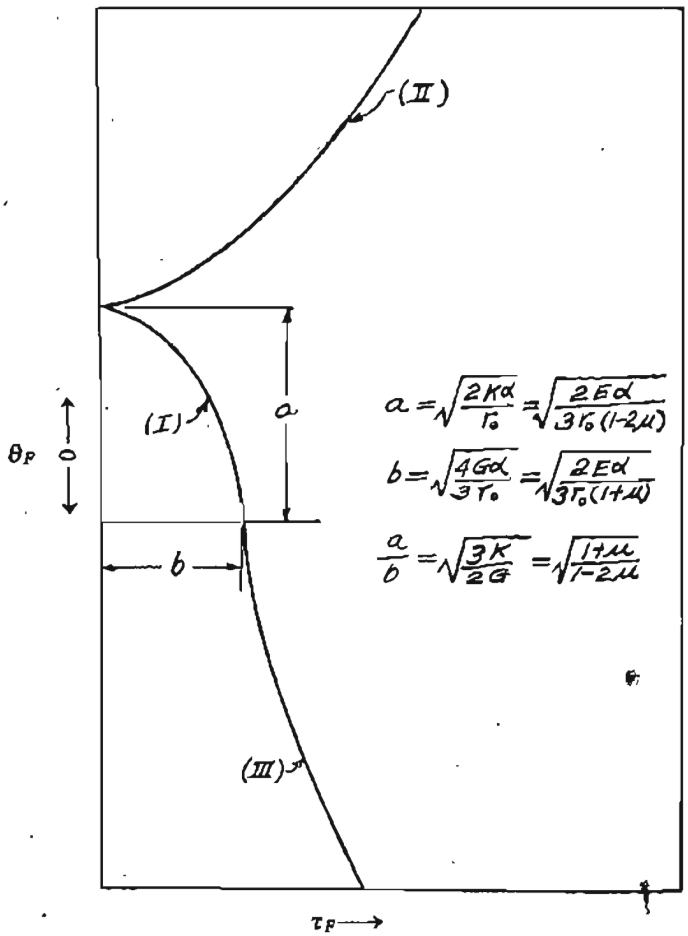

圖 1. 金屬斷裂的力學條件

現象中. (18) 式當 $\mu \geqslant \frac{1}{5}$ 時, 在平面問題中不存在,所以, (II) 種情形也許只是一個數學的可能性,和斷裂問題的關係還待實驗事實來作論據.

四. 實 驗 事 實

以上得到斷裂力學條件,是微小裂口周圍平均應力狀態在裂口開始傳播時的數值, 而實驗中所測到的在大多數情形下是裂口已經長得很大時的數值. 嚴格地說,兩者是不能相較的. 但裂口邊緣, 從傳播開始直到斷裂最後階段, 一直是非常尖銳.其尖銳度可以視爲不變. 因此, 裂口尖端在傳播過程中, 帶着大致相同的應力狀態掃過所經之處. 所以,實驗所測量到的斷裂平均應力狀態,與裂口在剛開始時的平均應力狀態只差一定倍數,看試樣大小而定,試樣愈大,這差別愈大. 實驗結果與上述斷裂條件雖然不能作數值上的準確比較, 但實驗函數與理

論函數的形式是否相同，這是可以比較的，(22) 式提供這樣一個比較的基礎；如果實驗事實與理論一致，則實驗應力函數 $\theta_F = f(\tau_F)$ 應爲橢圓或雙曲線，其常數滿足 (22) 式．下面是一些常温下的恆温斷裂實驗記載：

圖 2 至圖 4 是三種鎂合金管在二軸應力下的斷裂實驗結果[12]．圖 5 至

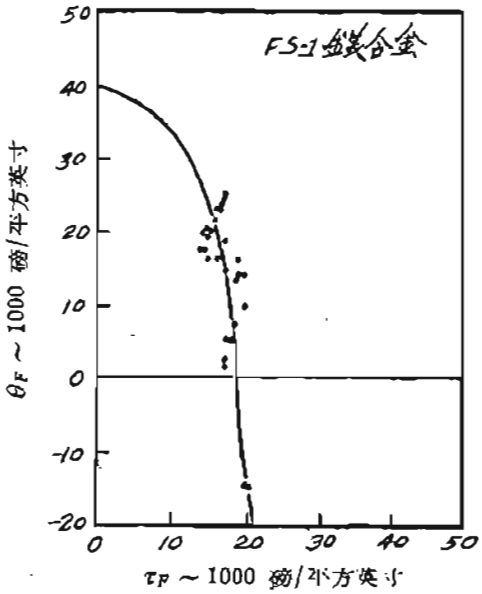

圖 2.

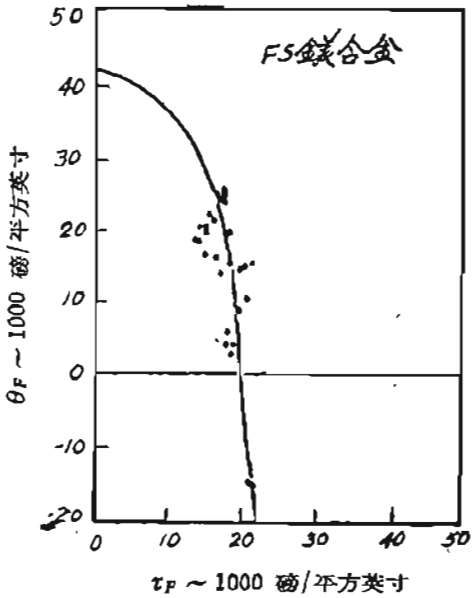

圖 3.

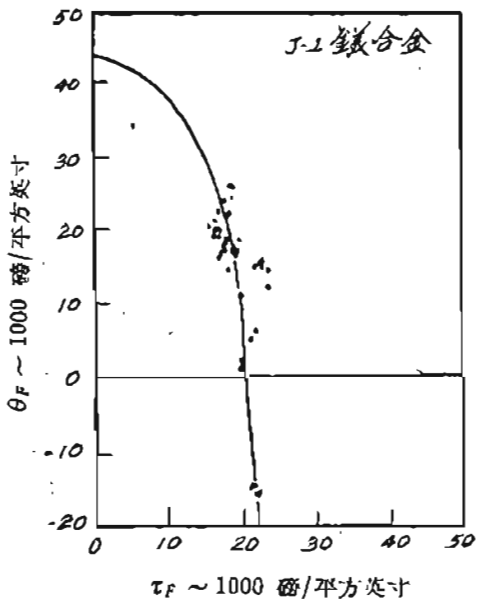

圖 4.

[12] Dorn, J. E., "The Eect of Combined Stress on the Ductility and Rupture Strength of Magnesium Alloy Extrusions", J.A.S., 1944. 或參看參考文獻 [5].

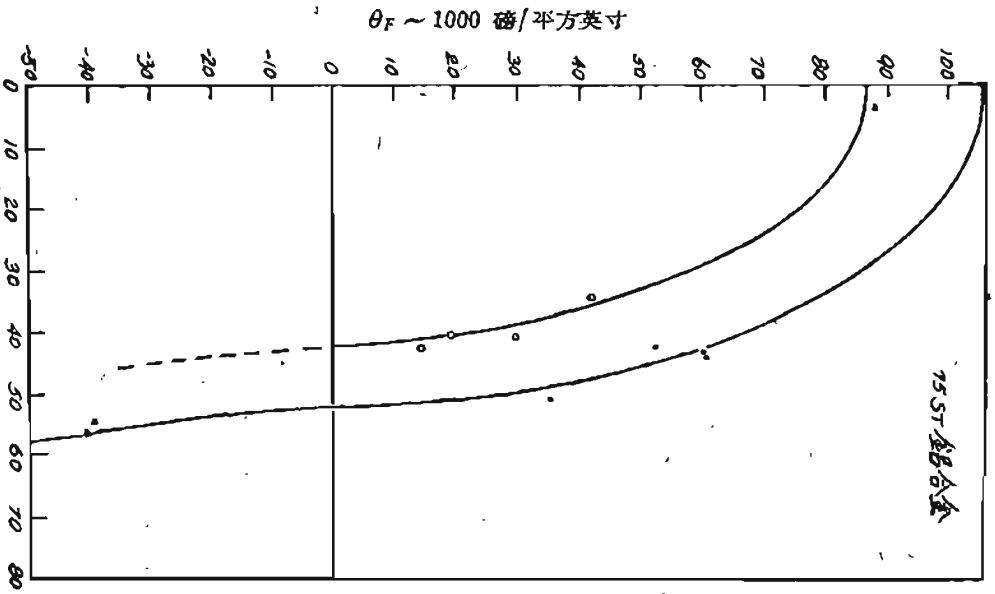
75ST 鋁合金
$\theta_F \sim 1000$ 磅/平方英寸
$\tau_F \sim 1000$ 磅/平方英寸

圖 5.

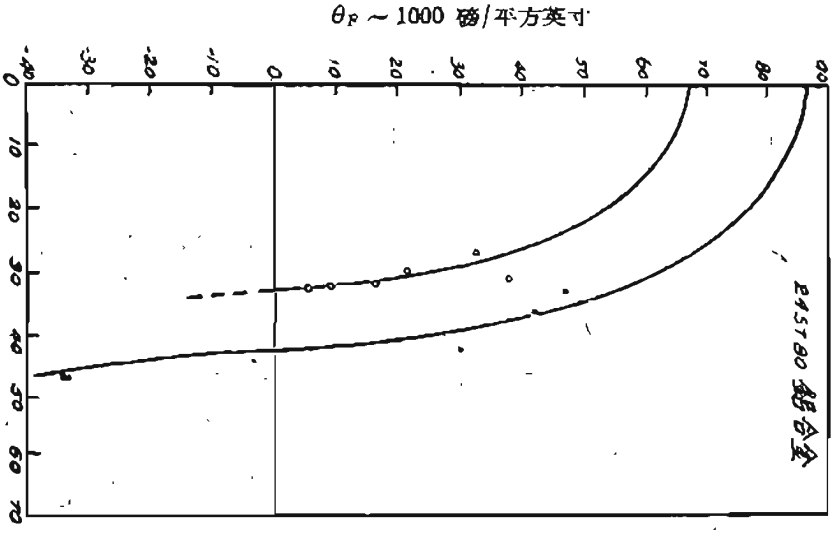
24ST 鋁合金
$\theta_F \sim 1000$ 磅/平方英寸
$\tau_F \sim 1000$ 磅/平方英寸

圖 6.

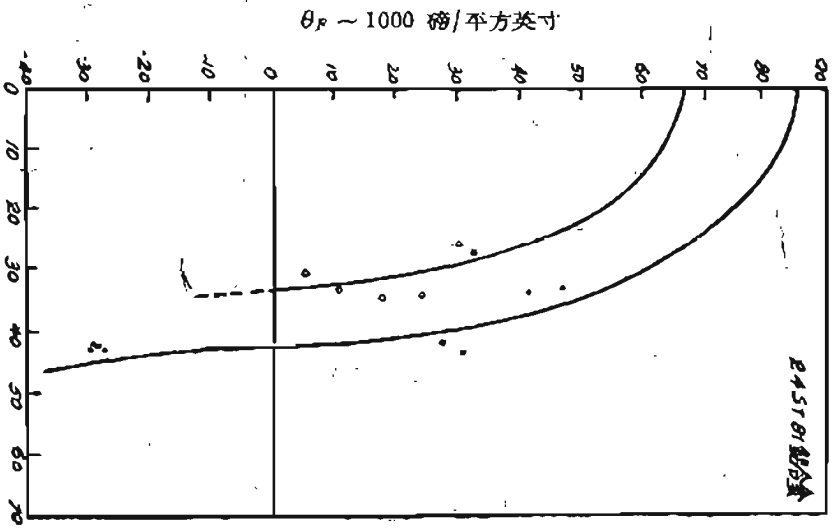
24ST 鋁合金
$\theta_F \sim 1000$ 磅/平方英寸
$\tau_F \sim 1000$ 磅/平方英寸

圖 7.

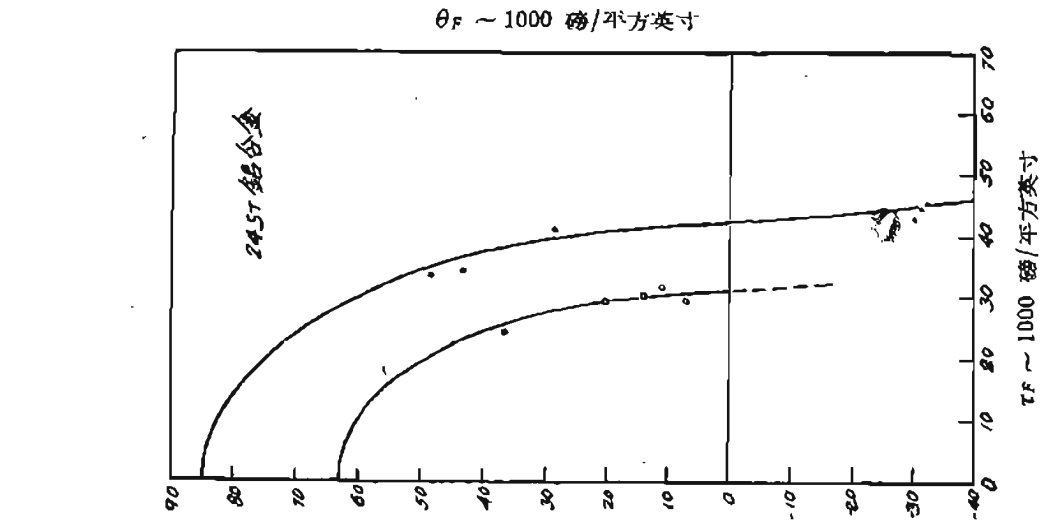
$\theta_F \sim 1000$ 磅/平方英寸
24ST 鋁合金
$\tau_F \sim 1000$ 磅/平方英寸

圖 8.

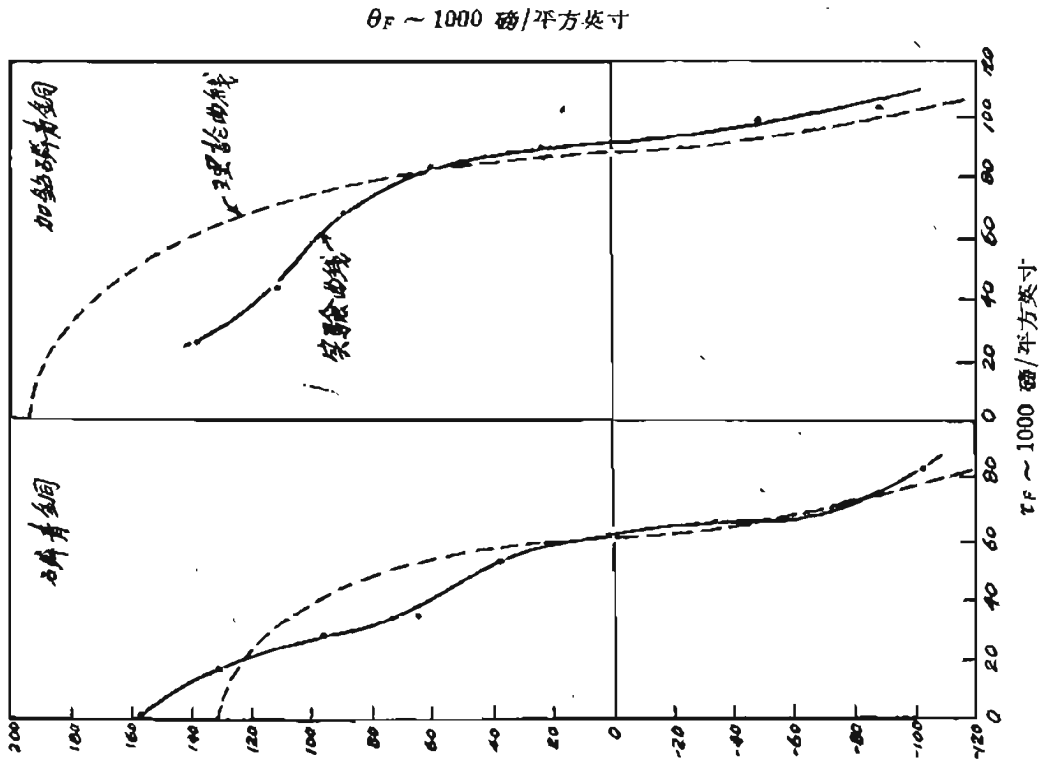
$\theta_F \sim 1000$ 磅/平方英寸
加鉻硬青銅
理論曲線
實驗曲線
硬青銅
$\tau_F \sim 1000$ 磅/平方英寸

圖 9.

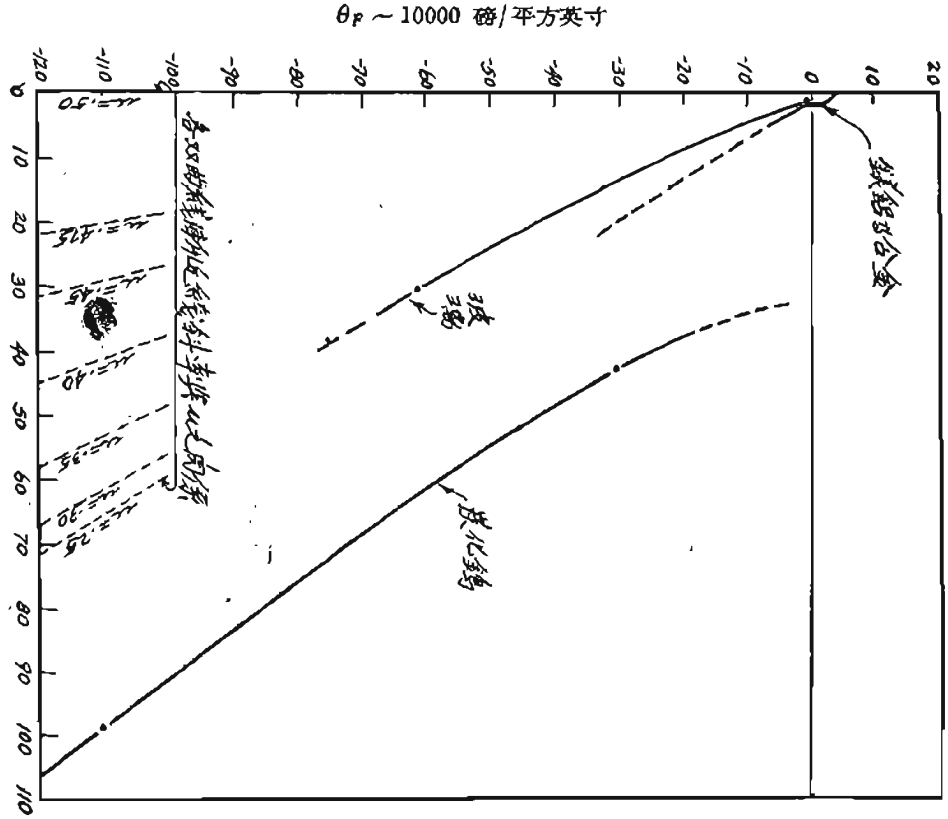

圖 10.

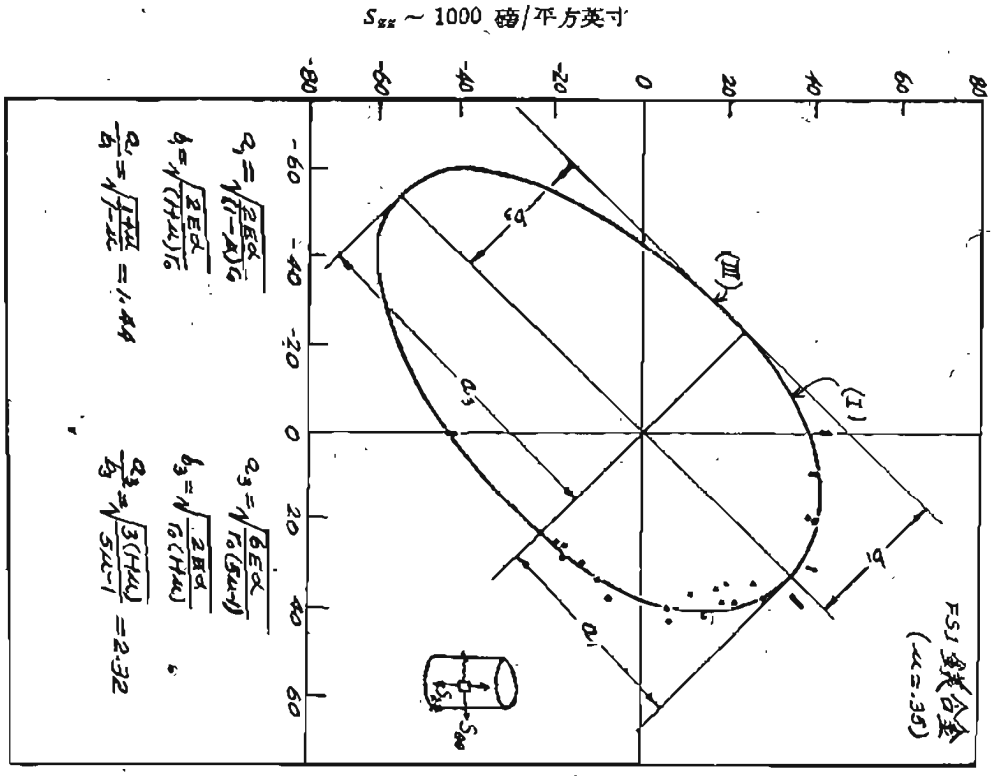

圖 11. 金屬在平面應力狀態下的斷裂條件

圖 8 爲四種鋁合金管在二軸應力下的斷裂實驗記載[13,14]，在這四種合金的試驗結果中，有一共同現象，即在離管軸 45° 以內(圖中黑點)和以外(圖中圓圈)的斷裂應力數值，有相當大的差別，這大概是由於方向性所致，圖中將可以相較部份結果，各歸入一曲線. 圖 9 是兩種青銅在三軸應力下的斷裂實驗結果[15]. 圖 10 是玻璃和炭化鎢各在高流體靜壓力下的壓力斷裂實驗結果[16]. 圖 11 是一個鎂合金的二軸應力斷裂試驗結果和第 (17), (19) 兩式在平面問題中的比較.

從這些實驗結果，可以看出在平均壓力下理論與實驗很接近，尤其是三軸應力下的實驗結果，充分表示第 (III) 斷裂條件的雙曲線性；在平均張力下，理論與實驗結果間有些差別，但變化趨勢仍然一致. 如果考慮到兩者可以作正確比較的程度，這樣的差別是在預料中的. 在這些實驗結果中，第 (II) 種情形不存在，只有一個炭鋼在高流體靜壓力下的張力實驗結果[16]中，θ_F 隨 τ_F 之增加而稍增加，但因爲在該實驗中，θ_F 和 τ_F 的變化範圍太小，很難據以作推論.

用上面的這些實驗結果來計算裂口的半徑，是不會準確的，但如以上理論正確，這樣估計出的數值，應該在可能範圍以內. 從圖中可以決定 a 和 b 的數值，假設這金屬的固態表面能在 1000 C. G. S. 單位左右，這樣由 (20) 或 (21) 式，估計出的裂口半徑數值 r_0，如表 2 所示:

表 2

合　　金	r_0 (cm)
FS, J-1, FS-1, 鎂合金	1.14×10^{-4}
75 ST 鋁合金	3.22×10^{-4}
24 ST, 24 ST 80, 24 ST 81 鋁合金	5.40×10^{-5}
磷青銅	3.18×10^{-5}
加鉛磷青銅	1.45×10^{-5}

這些數值在嵌鑲塊 (mosaic block) 的尺寸範圍內. 這計算結果表示這些金

[13] Thomsen, E. G., "Fracturing of Some Aluminum Alloys under Biaxial Stress", OPRD Report. 或參看 [5].

[14] ———, "Fracturing of 75ST Alumium Alloy under Combined Stress", NACA Report, 1947. 或參看 [5].

[15] McAdam Jr., D. J., "Fracturing of Metals under Combined Stress", Trans. ASM, 1946.

[16] Bridegman, P. W., "Fracturing and Hydrostatic Pressure", Fracturing of Metals, ASM, 1948.

屬的斷裂,是從與嵌鑲塊尺寸相同裂口出發的,也就是說,這些金屬中存在着這樣大小的裂口. 這有兩個可能性: 一是在鑄造或加工過程中產生這樣大小的裂口,這是很可能的,上述各金屬都是加工產品;另一個可能性是嵌鑲塊本身的邊界面就是斷裂開始的地方. 這些推論是從連續體與熱動力學觀點而來的,沒有考慮金屬的結晶構造與原子脫節,但金屬中存在着這種尺寸的裂口,是可以期望的:研究造船鋼板斷裂問題的一些作者[17],相信船在剛造好後,其內鋼板中已有不少非原子脫節的微小裂口,尤其是在鋼板焊結部份更爲顯著.

五. 延 度

裂口在傳播過程中,其邊緣尖銳度大致不變,因此,可以說其尖端應力狀態大致不變. 如果應力狀態與應變狀態間有一般性的應變硬化函數存在,則在裂口上的延度,應該各處是一樣的. 這個推論和實驗事實很相近. 圖 12 是一個中

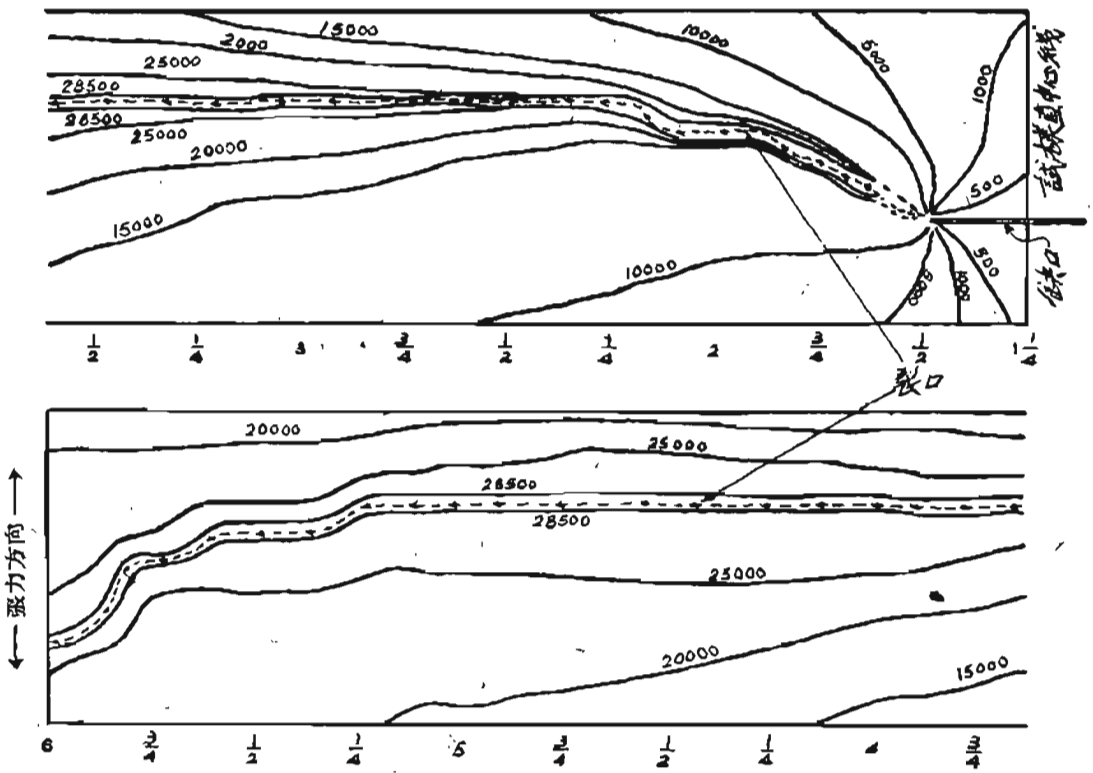

圖 12. 中炭鋼板在缺口張力試驗斷裂後之等能線(長度單位: 英寸; 能量單位: 英寸-磅/立方英寸)

[17] Gensamer, M., Personal Communication in U.S.A., 1950.

炭鋼板在缺口張力試驗斷裂後的等能線[18]，等能線上數值爲單位體積內之範性畸變能，這是根據範性應變 γ_0 的測量得來的，所以等能線也就是"等 γ_0 線"．在裂口附近，等 γ_0 線與裂口平行，這充分表示裂口上的延度各處是一樣．也就是說裂口在達到一定斷裂應力狀態時，也達到一定的應變狀態(延度)．因此可以引用連續體的一個應變硬化函數[10]，$\tau_0 = f(\gamma_0)$ 來對延度作一個估計．在一定溫度與應變率下，金屬的普遍應變硬化函數可以用一指數函數來表示：

$$\tau_0 = a\,\gamma_0^n, \tag{23}$$

a 爲一常數，n 爲應變硬化指數．從 (11)，(13)，(23) 三式，可以得到延度 γ_F 的表示如次：

$$\gamma_F = \left[\frac{2\,G}{3\,a^2}\left(\frac{2\,\alpha}{\tau_0} - \frac{\theta_P^2}{K}\right)\right]^{\frac{1}{2n}}, \qquad \theta \geqslant 0; \tag{24}$$

$$\gamma_F = \left[\frac{2\,G}{3\,a^2}\left(\frac{2\,\alpha}{\tau_0} + \frac{\theta_P^2}{K}\right)\right]^{\frac{1}{2n}}, \qquad \theta \leqslant 0. \tag{25}$$

由此可以看出延度這個性質的複雜，它直接或間接地隨許多因素而變化．這兩個表示充分說明延度這性質，不是一個基本的物理性質，因爲控制它的主要變數是應力狀態 (θ)．(24)，(25) 兩式不能和實驗結果作與前節中相似的比較，γ_F 是代表裂口上的延度，而普通所測量到的，都不是這數值，因爲普通 γ_F 在 .1 以下，理論與實驗結果之間，定義的誤差遠較在應力的情形下爲大．但這兩式至少在質上和許多實驗事實符合：延度隨 θ_F 代數值之降低而增加，這和鋼、鑄鐵、沙石、大理石、鑄青銅、黃銅、鋁[19] 和其他許多金屬的實驗結果相符．在流體靜壓力下，θ 之代數值隨流體靜壓力絕對值之增加而降低，所以延度增加 [1,16]．其他因素如溫度、應變率等對延度的連續影響是由於這些因素對 a, G, n 等常數的連續影響所致．G/a^2 普通在 10^{-4} 左右，溫度變化時，a^2 受的影響最大，與溫度成反方向變化，所以延度與溫度成同方向變化．應變率對這些常數的影響，略

[18] Liu, S. I., and Carpenter, S. T., "Strain Energy Distribution in Notched Tensile Test of Ship Plates", Technical Report 1950, in publication (Jour. Appl. Mech. U.S.A.).

[19] Maier, "Einfluss des Spanungszustandes auf des Formänderungs Vermögen der Metalischen Workstoffe", V.D.I. Berlin, 1935.

與溫度相似,但因爲應變率的影響又視溫度而定,其間關係比較複雜不能由(24)、(25) 兩式中顯明地看出. 金屬先受過壓力後再受張力,它在張力中的延度較不受壓力者大[20],這是由於包與格效應 (Bauschenger Effect) 使 a 的數值降低所致. 金屬在壓力中的延度比在張力中大;在扭力中的延度比在張力中大[21],在(24),(25) 兩式中這是很顯然的.

六. 結 論

根據以上分析及引證實驗事實,可以作以下三項結論:

1. θ 與 τ_0 爲金屬斷裂現象中之主要力學變數.

2. 在平均張力與平均壓力下,金屬應服從不同的定溫斷裂條件;在平均張力下,這條件爲 θ 與 τ_0 間之橢圓關係;在平均壓力下,爲二者間雙曲線關係. 斷裂應力狀態數值,靠金屬的體積彈性係數、切彈性係數、固態表面能與微小裂口半徑而定.

3. 從本文中兩個斷裂條件與普遍應變硬化函數,可以得到延度的表示. 控制延度的主要變數是 θ, 所以延度不是金屬的一個基本性質.

本文結論對固體全部現實應力空間的構造與性質提供了全面分析的可能性,將另文討論之[22].

本文中所用多數翻譯名詞,是由中國科學院建議的;文中附圖是王美英代爲繪製;作者謹敬禮致謝.

[20] Liu, S. I., Lynch, J. J., Ripling, E. J., and Sachs, G., "Low Cycle Fatigue on the Aluminum Alloy 23ST in Direct Stress", AIME, Metals Technology, 1948, T. P. No. 2338.

[21] Gensamer, M., "Strength and Ductility of Metals under Combined Stress", ASM, 1945.

[22] 劉叔儀,"關於金屬之現實應力空間", 1953 年 10 月已脫稿,尚未發表.

MECHANICAL CONDITIONS FOR ISOTHERMAL RUPTURE OF METALS*

LIU SHU-I

(Peking Institute of Iron and Steel)

ABSTRACT

The theoretical conditions for brittle rupture were found with one single normal stress as the only mechanical variable. But, for the conditions of ductile rupture, experimental facts demand the specification of some stress states instead of a single stress and certain arbitrary stress functions were taken for this purpose. A theoretical formulation of the conditions for ductile rupture has not been made up to this date. Fundamentally, such problem would be approached from the dislocation theory, but quantitative treatment is difficult in the present state of this theory. Alternatively it may be possible to approach this problem from the view point of relaxation, should the basic phenomenon of strain hardening associated with ductile fracturing be well interrepted from this view point. It is believed that future studies along such lines will throw more light on the understanding of this problem. Yet, it was thought that if one considers the thermodynamic relation among various types of energy involved in ductile fracture instead of simply taking some arbitrary stress functions as criterion, the conclusions thus obtained would be helpful in understanding this problem. Thus this paper was written.

Hydrostatic stress states play a very important role in the fracturing of metals, but the elastic strain energy for volume change (Ev) associated with hydrostatic stress states has not been quantitatively considered in this problem. Taking this into account, the thermodynamic condition for fracturing should be

$$\frac{dE_v}{dx} + \frac{dE_s}{dx} = \frac{dF}{dx}, \tag{1}$$

where E_s is the elastic distortion energy of the crack, F the surface free energy of the crack, and x the growing dimension of the crack. When the sign relation between the strain energy derivatives and the significance of this relation are considered, equation (1) is split into three cases each corresponding to certain range of stress states. For a disk-like crack of radius r_0, the strain energy derivatives can be computed appoximately by a short method wherein the average stress was considered. Mechanically,

*Received August 28, 1951.

this is perhaps too simple, however, since all existing stress measurements for fracturing of polycrystalline materials yield only average values which are more comparable with the theoretical results thus obtained. By doing so, the following conditions for fracturing were obtained:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & (1-2\mu)\,\theta_F^2+(1+\mu)\,\tau_F^2=\dfrac{2Ea}{3r_0}, & \theta\geqslant 0; \\ \text{(II)} & (1-2\mu)\,\theta_F^2-(1+\mu)\,\tau_F^2=\dfrac{2Ea}{3r_0}, & \theta\geqslant 0; \\ \text{(III)} & (1+\mu)\,\tau_F^2-(1-2\mu)\,\theta_F^2=\dfrac{2Ea}{3r_0}, & \theta\leqslant 0; \end{array}\right\} \tag{2}$$

or, in terms of the principal stresses:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & (S_1^2+S_2^2+S_3^2)-2\mu(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)=\dfrac{2Ea}{r_0}, & \theta\geqslant 0; \\ \text{(II)} & (4-2\mu)(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)-(1+4\mu)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)=\dfrac{6Ea}{r_0}, & \theta\geqslant 0; \\ \text{(III)} & (1+4\mu)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)-(4-2\mu)(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)=\dfrac{6Ea}{r_0}, & \theta\leqslant 0; \end{array}\right\} \tag{3}$$

where all stresses are referred to the average values at fracturing and are as follows:

$$\theta_F = \text{mean normal stress} = \frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3),$$

$$\tau_F = \text{octahedral shear strees} = \frac{1}{3}\sqrt{(S_1-S_2)^2+(S_2-S_3)^2+(S_3-S_1)^2},$$

S_1, S_2 and S_3 = principal stresses;

E and μ are Youngs modulus and Poisson's ratio respectively; and a means the surface free energy per unit area of the crack surface.

The obtained conditions are hyperbolic and elliptic in θ and τ with dimensions defined by the physical constants.

Experimental data on biaxial tests and triaxial tests including some tensile tests of brittle material under hydrostatic pressure were compared with the obtained equations.

Comparison of theory with experiment shows that case (II) is only a mathematical possibility without any physical significance, case (I) agrees with experimental data in trend, and case (III) is in good agreement with experimental results and it provides a quantitative interpretation of the well-known fact that fracture stress is consistently

increased by superimposed hydrostatic pressure. The equations were used, together with experimental data, to compute the size of crack; the obtained dimensions are of the same order as those of mosaic blocks.

In addition, the fracture strain γ_F (octahedral shear strain at fracturing) was formulated by using the obtained conditions and the experimental universal strain-hardening function:

$$\tau_0 = a\,\gamma_0^n, \tag{4}$$

where τ_0 and γ_0 are the octahedral shear stress and strain at any stage of strain-hardening, a and n are strain-hardening constants. The resulting equations are:

$$\gamma_F = \left[\frac{2\,G}{3\,a^2}\left(\frac{2\,a}{r_0} - \frac{\theta_F^2}{K}\right)\right]^{\frac{1}{2n}} \quad \text{for } \theta \geqslant 0, \tag{5, a}$$

$$\gamma_F = \left[\frac{2\,G}{3\,a}\left(\frac{2\,a}{r_0} + \frac{\theta_F^2}{K}\right)\right]^{\frac{1}{2n}} \quad \text{for } \theta \leqslant 0, \tag{5, b}$$

where G is shear modulus of elasticity.

Due to the uncertainty of a and r_0 and the difficulty of finding complete systematic data, these two equations were not compared with experimental facts. However, qualitatively, they agree with the known concepts about the effect of stress state on ductility. An important conclusion can be drawn from these two equations, that is, the ductility is a function of stress state, therefore, not a physical property of solids. In conclusion, it can be stated from the above analysis and experimental facts:

That the isothermal condition for fracturing of metal is elliptic in θ and τ_0 for $\theta \geqslant 0$; and hyperbolic for $\theta \leqslant 0$; and

That the fracture strain (ductility) is a function of stress state, therefore, not a physical property of metals.

The obtained equations provide a possibility to study the shape, structure and properties of the realistic stress space of solide; this will be treated in another paper.