

旋轉矩形板之近似解*

張 福 範

(清 華 大 學)

一. 引 言

旋轉圓形板的應力分析,由於圓對稱,是個極簡易的問題,但如果板的邊界不是圓形,這問題將大為複雜。分析一繞幾何中心以角速度 ω 旋轉的矩形板的應力,即為一例。若板的厚遠小於它的長或寬,則沿板厚各點的應力的變化可以忽略。因此,這問題將是個有體積力作用的兩元問題。要解這矩形邊界的兩元問題,並不是容易的。若以三角級數來解,我們僅能滿足矩形兩邊的邊值;故所得的結果,祇能應用於較狹長的矩形板。但如果板的長和寬相彷彿,則四邊的邊界條件必須完全滿足。對於這類問題,應用變形能最小原理來解可能甚為順利。

二. 應 力 分 析

R 為板以角速度 ω 旋轉時板的單位體積的慣性力。 X, Y , 為這慣性力 R 在 x 與 y 方向分量,於是

$$R = \rho \omega^2 r, \quad X = \rho \omega^2 x, \quad Y = \rho \omega^2 y;$$

式中的 ρ 為板單位體積的質量; r, x, y 均如圖 1 所示。

在矩形的邊界內,應力須適各下列三方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho \omega^2 y = 0, \quad (2)$$

*1952 年 6 月 14 日收到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -2(1 + \mu)\rho\omega^2. \quad (3)$$

解以上的微分方程 (1), (2), (3), 可運用應力函數 ϕ .

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \rho\omega^2 xy.$$

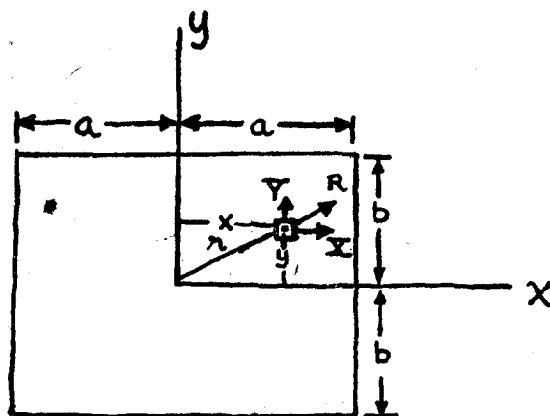


圖 1.

以上由應力函數 ϕ 所表示的三應力, σ_x , σ_y , τ_{xy} , 已滿足方程 (1), (2). 而方程 (3) 將成為

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -2(1 + \mu)\rho\omega^2. \quad (4)$$

這裏, 我們很容易看出, 這問題與薄板在均佈荷重作用下彎曲的問題相似. 要計算板內的應力, 須解方程 (4) 並滿足下列諸邊界條件:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a} &= 0, & \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{y=\pm b} &= 0, \\ \tau_{xy} = \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \rho\omega^2 xy\right)_{\substack{x=\pm a \\ y=\pm b}} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

但解方程 (4), 並適合邊界條件 (5), 並不是容易的. 解這問題的另一方法, 是考慮板的變形能以代替方程 (3) 所表示的變形一致條件

$$\delta V = \iint (\mu \delta X + \nu \delta Y) dy dx, \quad (6)$$

式中的 V 為儲於板內的變形能, μ 與 ν 為板的任何一點在 x 與 y 方向的位移, 而 δX 與 δY 為體積力的很小的改變. 但因體積力保持不變, 故

$$\delta V = 0.$$

這表示應力的正確數值, 應使板內的變形能為最小. 並且, 由於解答的唯一性, 我們可以斷定: 變形能最小條件與變形一致方程是一回事. 厚為一單位長的板, 它的總變形能為

$$V = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2] dy dx.$$

將應力函數 ϕ 代入上式, 得

$$V = \frac{1}{2E} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + 2(1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \rho \omega^2 xy \right)^2 \right] dy dx. \quad (7)$$

於是, 正確的應力函數 ϕ , 須滿足邊界條件 (5), 並使 (7) 式所表示的變形能為最小. 下列這 ϕ 級數, 可由校核而知係適合邊界條件

$$\phi = \frac{\rho \omega^2}{4} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - x^2 y^2) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots). \quad (8)$$

由於應力的分佈與 x, y 軸均對稱, 故 ϕ 級數中祇有 x, y 的偶冪. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 均為常數, 它們的數值將待決定. 將級數 (8) 代入 (7) 式, 得到變形能 V 為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ 的二次方程. 這些常數的數值, 可由 V 為極小這條件求得.

$$\cdot \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \right.$$

$$-\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] + \\ + 2(1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 x y \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \} dx dy = 0. \quad (9)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

因此，我們將有 m 個 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ 的綫性方程，以解這 m 個常數。適當的選擇了 ϕ 的函數，我們祇須取級數中的首幾項，就可得到一良好的近似解。若僅取級數 (8) 的首項 α_1 ，則得

$$\phi = \frac{\rho \omega^2}{4} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - x^2 y^2) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

自 (9) 式，得

$$\alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = - \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}.$$

對於一正方形的板，得

$$\alpha_1 = - .04253 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}.$$

應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 為

$$\sigma_x = \rho \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left[\frac{1}{2} + 0.17012 \mu \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \left(3 \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \right],$$

$$\sigma_y = \rho \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left[\frac{1}{2} + 0.17012 \mu \left(\frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \right],$$

$$\tau_{xy} = 0.68048 \rho \omega^2 a^2 \mu \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \left(\frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \frac{xy}{a^2};$$

若 $\mu=0.3$ ，則在 $x=0$ 這截面上的應力 σ_x 與 σ_y ，將在表 1 列出，並如圖 2 中的曲綫 1 所示。

表 1.

$\frac{y}{a} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k = 0.55104$	0.52704	0.45601	0.34091	0.18661	0
$k' = 0.55104$	0.54492	0.52654	0.49592	0.45304	0.39792

$$(\sigma_y)_{x=0} = k \rho \omega^2 a^2, \quad (\sigma_x)_{x=0} = k' \rho \omega^2 a^2.$$

爲了使答案更準確些,可取級數(8)的首三項。於是 ϕ 函數爲

$$\phi = \frac{\rho \omega^2}{4} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - x^2 y^2) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (a_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2).$$

自(9)式,得

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256 b^2}{49 a^2} + \frac{64 b^4}{7 a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64 b^4}{49 a^4} \right) + \\ + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64 b^2}{49 a^2} + \frac{64 b^6}{77 a^6} \right) = - \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}, \\ \alpha_1 \left(\frac{64}{11} + \frac{64 b^4}{7 a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{192}{143} + \frac{256 b^2}{77 a^2} + \frac{192 b^4}{7 a^4} \right) + \\ + \alpha_3 a^2 \left(\frac{64 b^2}{77 a^2} + \frac{64 b^6}{77 a^6} \right) = - \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}, \\ \alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{64 b^4}{11 a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64 b^4}{77 a^4} \right) + \\ + \alpha_3 a^2 \left(\frac{129 b^2}{7 a^2} + \frac{256 b^4}{77 a^4} + \frac{192 b^6}{143 a^6} \right) = - \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}. \quad (10) \end{aligned}$$

對於一正方形的板,解上述這三方程,得

$$\alpha_1 = -0.04040 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -0.01174 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^6}.$$

若 $\mu=0.3$, 則在 $x=0$ 這截面上的應力 σ_x 與 σ_y 的分佈,將在表 2 中列出,及在圖 2 中以曲線 2 表示,並與一內切於正方形的圓形板的徑向與切向應力 σ_r 和 σ_θ 相比較。

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{x=0} &= \rho \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left(0.04144 + 0.01408 \frac{y^2}{a^2} \right) \right], \\ (\sigma_x)_{x=0} &= \rho \omega^2 a^2 \left[\frac{1}{2} + \left(1 - 3 \frac{y^2}{a^2} \right) \left(0.04144 + 0.02144 \frac{y^2}{a^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 0.04226 \frac{y^2}{a^2} \left(\frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

表 2.

$\frac{y}{a} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k = 0.54144$	0.51871	0.45083	0.33905	0.18653	0
$k_1 = 0.4125$	0.3960	0.3465	0.2640	0.1485	0
$k' = 0.54144$	0.53882	0.52890	0.50581	0.45975	0.30494
$k_1' = 0.4125$	0.4030	0.3745	0.3270	0.2605	0.1750

$$(\sigma_y)_{x=0} = k \rho \omega^2 a^2, \quad \sigma_r = k_1 \rho \omega^2 a^2$$

$$(\sigma_x)_{x=0} = k' \rho \omega^2 a^2, \quad \sigma_\theta = k_1' \rho \omega^2 a^2$$

自表 1 及表 2 我們可以看出，各相當的 k 值的差，僅略大於百分之一，各相當的 k' 值的差，除了在邊界上的以外，亦僅略大於百分之一而已。因此，我們可以得到結論：從所假定的函數 ϕ ，祇須取首幾項，就可以得到一很良好的近似解。並且，頗饒趣味的可以看出，由於多了四個角，正方形板在中心的最大應力，要比一內接於正方形的圓形板在旋轉時的最大應力約大百分之三十。沿半徑各點的徑向與切向應力 σ_r 及 σ_θ ，亦繪成曲線在圖 2 中表出，以便與 $x=0$ 這截面上的應力 σ_y ， σ_x 相比較。

當板的長度逐漸地增加，應力 σ_x 在 $x=0$ 這截面上的分佈，將逐漸地變得均勻。若 $a=2b$ ，則自 (10) 式，

$$\alpha_1 = -0.07983 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}, \quad \alpha_2 = -0.1250 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4},$$

$$\alpha_3 = -0.01826 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}.$$

若 $\mu=0.3$ ，應力 σ_x 在 $x=0$ 這截面上的分佈為

$$(\sigma_x)_{x=0} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \left[1 - \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(0.04653 + 0.00411 \frac{y^2}{b^2} \right) - 0.00822 \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right].$$

表 3.

$\frac{y}{b} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k = 0.52326$	0.52070	0.51782	0.50097	0.47885	0.45758

$$(\sigma_x)_{x=0} = k \rho \omega^2 a^2.$$

若 $a=3b$, 則自 (10) 式, 得

$$\alpha_1 = -0.07787 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^4}, \quad \alpha_2 = -0.25520 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^6},$$

$$\alpha_3 = -0.02190 \frac{\mu \rho \omega^2}{a^6}.$$

若 $\mu=0.3$, 應力 σ_x 在 $x=0$ 這截面上的分佈為

$$(\sigma_x)_{x=0} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \left[1 - \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(0.02044 + 0.00097 \frac{y^2}{b^2} - 0.00195 \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right) \right].$$

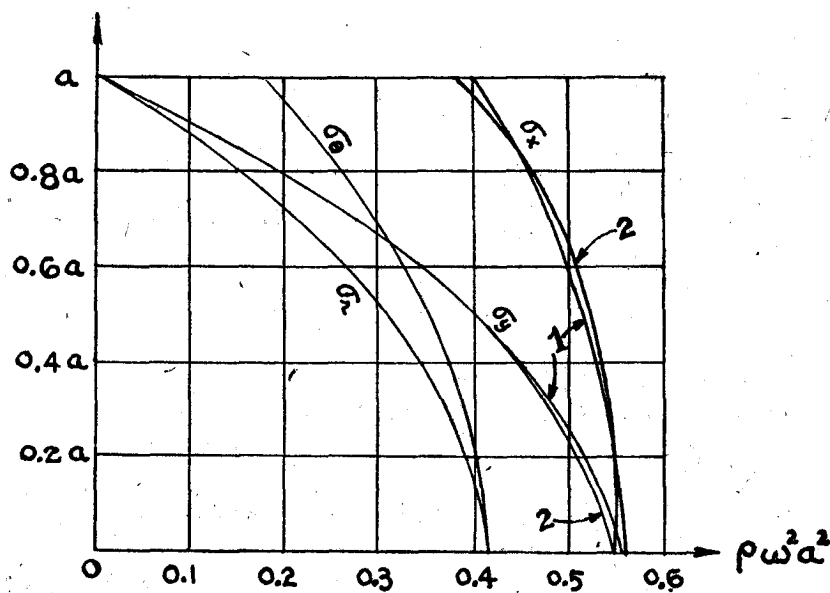


圖 2.

表 4.

$\frac{y}{b} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k = 0.51022$	0.50905	0.50548	0.50005	0.49995	0.47859

$$(\sigma_x)_{x=0} = K \rho \omega^2 a^2.$$

參 考 文 獻

- [1] Timoshenko, An approximate method for the two dimensional problems, *Phil. Mag.*, 1924.
 [2] Southwell, Castigliano's minimum strain energy theory, *Proc. Roy. Soc., London*, 1936.

APPROXIMATE SOLUTION OF A ROTATING RECTANGULAR PLATE*

CHANG FO-VAN

(Tsing Hua University)

ABSTRACT

The analysis of a rotating circular plate is an easy problem because of circular symmetry. However, for the boundary other than circular, the problem will become much more complicated. For example, we may be theoretically interested in the stresses in a rectangular plate, which rotates with respect to its geometric center. If the thickness of the plate is small when compared with its length and width, the variation of stresses throughout the thickness can be neglected. Consequently, we shall have a two dimensional problem with body force acting. To solve a two dimensional problem with rectangular boundary is not always feasible. By using trigonometric series, we can only satisfy the conditions on the two sides of the plate. Accordingly the result can only be of value when the length of the plate is much larger than its width. If both dimensions of the plate are of the same order, the boundary conditions on the four sides must be considered. In the solution of the problem of this kind the principle of minimum strain energy may be successfully applied.

*Received June 14, 1952.