

原子核內核子軌道角動量分佈 與核子密度*

楊 立 銘

(北京大學物理系)

一. 導 言

原子核內核子密度分佈情狀的影響已在許多實驗中直接地或間接地顯示出來。例如最近由高能電子與原子核碰撞實驗所測得之微分有效截面^[1]，就不能以假定原子核為負荷質點的理論來解釋，而必須在碰撞理論計算中^[2-5]，把原子核看成有一定大小及一定電荷分佈情況。初步實驗結果與理論比較指出：核內電荷分佈情況近於作者前所建議之一種^[6]。其他如超精細結構^[7]、介原子 (mesic atom) 之能級及負 μ 介子被原子核之吸收^[8] 重核之內轉變^[9] 等，均受核內核子分佈情況的影響。在另一組實驗中，即高能核子或光子與原子核撞擊，當能量 ≥ 100 Mev 時入射粒子波長與核內核子間距離相近，自由行程與原子核半徑相近，因此在核內之撞擊可近似地視為兩體碰撞。此時核內核子動量之分佈直接影響射出粒子之動量與能量分佈^[10-12]，而核內核子動量分佈按湯-費二氏模型 (Thomas-Fermi model) 是可簡單地由核子密度求得的。由上所述可知原子核內

*1953年9月7日收到。

- [1] Lyman, E. M., Hanson, A. O., and Scott, M. B., *Phys. Rev.* **84** (1951), 626.
- [2] Rose, M. E., *Phys. Rev.* **73** (1948), 279; **82** (1951), 389.
- [3] Elton, L. R. B., *Proc. Phys. Soc. (Lon.)* **A63** (1950), 1115; **A65** (1952), 481.
- [4] Acheson, L. K., *Phys. Rev.* **84** (1951), 488.
- [5] Feshbach, H., *Phys. Rev.* **84** (1951), 1206.
- [6] Born, M., and Yang, L. M. (楊立銘), *Nature* **166** (1950), 399; Yang, L. M. (楊立銘), *Proc. Phys. Soc. (Lon.)* **64** (1951), 632.
- [7] Bohr, A., and Weisskopf, V. F., *Phys. Rev.* **77** (1950), 94.
- [8] Wheeler, J. A., *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949), 133.
- [9] Слив Л. А., Ж. Э. Т. Ф. **21** (1951), 770.
- [10] Gladis, J. B., Hess, W. N., and Moyer, B. J., *Phys. Rev.* **87** (1952), 425.
- [11] Hadley, I., and York, H. F., *Phys. Rev.* **80** (1950), 345.
- [12] Henley, E. M., and Huddlesstone, R. H., *Phys. Rev.* **82** (1951), 754.

核子密度分佈問題，是很值得研究的。本文擬在湯-費二氏模型基礎上就原子核內核子軌道角動量分佈與核子密度分佈之互相關係，作進一步之研討。前者究竟在何種程度上決定或限制了後者。

原子核內核子軌道角動量分佈是根據晚近原子核殼層結構理論而來^[13-14]。關於後述理論之多數推論與實驗相符不須在此贅述。惟在分析核內核子軌道角動量分佈時發現普通所指一組結構數 (structure number) 實由兩組并成，此兩組各由於不同的原因構成。其他若干實驗事實亦證實此點。

本文第二節中將導出核內核子軌道角動量任意次方的平均值，並指出角動量分佈不能完全決定核子密度函數。第三節中將就殼層結構理論所決定之角動量分佈討論何種試探函數在何種情形下，可以近似地表示核內核子密度。由此看出核子分佈情況實與一般所公認者不同。本節所得結果與從理論上初步之估計相符。第四節中求出相當第三節中所決定核子密度的核子動量分佈。第五節中除總結結果外並討論若干相關問題。最後在附錄中提出若干實驗證據以說明兩種殼層結構之建議。

二. 原子核內核子軌道角動量任意次方之平均值

由於核內極大之密度及核內平均有效勢能之徐緩變化，湯-費二氏模型之基本要點——局部退化費米氣體——可能是很近似地存在於核內極大部分。以下乃根據湯-費二氏模型計算。假定核內中子與質子的密度可分別以 $\rho_N(r)$, $\rho_P(r)$ 表示。 r 表示核子在核內之位置。 $\rho_N(r)$ 與 $\rho_P(r)$ 各自滿足其規格化條件：

$$\int \rho_N(r) 4\pi r^2 dr = N, \quad \int \rho_P(r) 4\pi r^2 dr = Z, \quad (1)$$

其中 N 與 Z 表原子核內之中子數與質子數。中子與質子各自遵守其包里原理。如令 P_N , P_Z 各表核內 r 附近之局部最大動量，則

$$\rho_N(r) = \frac{8\pi}{3} \frac{P_N^3(r)}{h^3}, \quad \rho_P(r) = \frac{8\pi}{3} \frac{P_P^3(r)}{h^3}. \quad (2)$$

[13] Mayer, M. G., *Phys. Rev.* **75** (1949), 1969; **78** (1950), 16.

[14] Haxel, O., Jensen, J. H. D., and Suess, H. E., *Naturwiss.* **35** (1948), 376; **36** (1949), 153; *Z. Physik*, **128** (1950), 295.

令 $n_N(l)$ 表具有 N 中子的原子核內軌道角動量在 l 與 $l + dl$ 之間的中子數, $n_P(l)$ 表質子相應之數量, 則可證明^[15]

$$n_N(l) = \frac{8l}{h} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 P_N^2(r) - \hbar^2 l^2} \frac{dr}{r} = \frac{4l}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 K_N^2(r) - l^2} \frac{dr}{r}, \quad (3)$$

其中 $K_N(r) = P_N(r)/\hbar$. 積分號內平方根必須是實數, 由此決定積分上下限 r_2 及 r_1 . 質子的相應公式可完全相似地寫出.

注意在 (3) 式中及在 N 之規格化方程式 (1) 中, 如以 cr 代 r , 以 ρ_N/c 代 ρ_N , (或以 K_N/c 代 K_N), c 為任意常數, 則二式不變. 由此可見軌道角動量分佈 $n_N(l)$ ($0 < l < (r K_N)_{\max}$) 不能完全確定 $P_N(r)$ 或 $\rho_N(r)$. 雖然如此, 角動量分佈已大大限制了核子分佈密度. 如根據殼層結構所決定之 $n_N(l)$, 由 (3) 與 (1) 求 $P_N(r)$, 其中未定常數 (核半徑) 再利用其他實驗結果如結合能, 或鏡像核 (mirror nuclei) 質量差等來決定, 則 $\rho_N(r)$ 可以完全決定. 按上述步驟求 $\rho_N(r)$ 尚未找到簡單可行辦法, 以下將循另一試探性的與在數學上較簡單的方法進行, 即利用分佈函數 $n_N(l)$ 對 l 的矩而不用 $n_N(l)$ 本身.

設令 $\overline{l_N^k}$ 表在含 N 中子的原子核內一中子軌道角動量 k 次方之平均值, k 為任意整數 (在以下應用中, k 實際上為偶整數), 則

$$\begin{aligned} \overline{l_N^k} &= \frac{1}{N} \int_0^L n_N(l) l^k dl = \frac{4}{\pi N} \int_0^L l^{k+1} dl \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 K_N^2(r) - l^2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{4}{\pi N} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{r K_N(r)} \sqrt{r^2 K_N^2(r) - l^2} l^{k+1} dl, \end{aligned}$$

其中 $L = (r K_N(r))_{\max}$. 上式經簡單積分後變為

$$\overline{l_N^k} = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} (r K_N(r))^{k+3}. \quad (4)$$

應當指出 $P_N(r)$, $n_N(l)$ 與 $\overline{l_N^k}$ 也都是質量數 A 的函數, 因質子在核內的分佈會影響中子的分佈. 以上有關中子的數量與公式均可同樣應用到質子上. 關

[15] Fermi, E., *Z. Physik*, **48** (1928), 73.

於將湯-費二氏模型所決定之核子平均平方軌道角動量與殼層結構所得作比較曾有人做過^[16]，在第三節中將討論他們的結果。本文並不擬求 $P_N(r)$ 之精確解答，而是先假定一種目前所知最為合理之試探函數 $P_N(r)$ ，其中包含參變數，然後用 (4) 式算出 $\overline{I_N^2}$ ，最後將計算結果與由殼層理論所供給之相當數量 $\langle I_N^2 \rangle$ 比較，並從兩者符合程度來決定最初所假定之 $P_N(r)$ ，在所有參變數變化範圍內是否為足夠好的近似函數。本文所用試探函數 $\rho_N(r)$ 仍為作者前所用之一種^[7]，即

$$\left. \begin{aligned} \rho_N(r) &= \rho_N^0 && \text{當 } r < R_0, \\ &= \rho_N^0 e^{-\left(\frac{r-R_0}{a}\right)^2} && \text{當 } r > R_0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

此時 $K_N(r)$ 為

$$\left. \begin{aligned} K_N(r) &= K_N^0 = (3\pi^2 \rho_N^0)^{\frac{1}{2}} && \text{當 } r < R_0, \\ &= K_N^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-R_0}{a}\right)^2} && \text{當 } r > R_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

如令 $r = R_0 x$ ， $K_N(r) = K_N^0 g(x)$ ， $\beta^2 = \frac{R_0^2}{3a^2}$ ，則

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= 1 && \text{當 } x < 1, \\ &= e^{-\beta^2(x-1)^2} && \text{當 } x > 1, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 β 是試探函數中惟一參變數它將是 A 的函數。 β 之值可用來度量核內中心等密度部分厚度與邊緣層厚度之比。將 (8) 式代入 (4) 並令 $k = 2q$ ，得

$$\overline{I_N^2} = \frac{4}{\pi N} \frac{2^q \cdot q!}{(2q+3)!!} (R_0 K_N^0)^{2q+3} I_{2q+3}(\beta), \quad (9)$$

其中 $(2q+3)!!$ 表示 $(2q+3)(2q+1)(2q-1)\cdots$ ，而 $I_{2q+3}(\beta)$ 為一定積分：

[16] Jensen, J. H. D., and Luttinger, J. M., *Phys. Rev.* **86** (1952), 907.

$$\begin{aligned}
I_{2q+3}(\beta) &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} (x g(x))^{2q+3} \\
&= \frac{1}{2q+3} + \sum_{m=0}^q \frac{m! \binom{2q+2}{2m+1}}{2 \cdot \beta^{2m+2} (2q+3)^{m+1}} + \\
&\quad + \sum_{m=0}^{q+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2m-1)!! \cdot \binom{2q+2}{2m}}{2^m \cdot \beta^{2m+1} (2q+3)^{\frac{2m+1}{2}}}
\end{aligned} \quad (10)$$

但此時 N 之規格化方程可寫成

$$N = \frac{4}{3\pi} (R_0 K_N^0)^3 I_3(\beta). \quad (11)$$

故 (9) 式可寫為

$$\bar{l}_N^{2q} = 3 \left(\frac{3\pi N}{4} \right)^{\frac{2q}{3}} \frac{2^q \cdot q!}{(2q+3)!!} \cdot \frac{I_{2q+3}}{(I_3)^{\frac{2q+3}{3}}}. \quad (12)$$

由上式可知分佈函數對於 l 的任意級矩, 僅是 β 的函數, 也就是說屬於一定比例值 β 的一定形式的 $g(x)$ 函數, 給出一定的 $\bar{l}_N^{2q}$, 自然也給出一定的分佈函數 $n_N(l)$. 顯然這裏逆定理不存在, 因為對於一定的 $g(x)$, 變換 $R_0 \rightarrow R_0 C$, $K_N^0 \rightarrow K_N^0/C$ (C 為任意常數) 改變了 $P_N(r)$, 但 I_k 與 $\bar{l}_N^{2q}$ 不變, 亦即 $n_N(l)$ 不變.

如果對於所有原子核 β 均近於一常數, 則在 $\log \bar{l}_N^{2q} - \log N$ 圖形中, (12) 式為一直線; 直線之位置視 β 之值而定. 以上對中子平均軌道角動量的推論, 可同樣應用於質子, 為簡單計, 將假定質子密度具有同樣的形式函數 $g(x)$, 但

$$\frac{\rho_N(r)}{\rho_P(r)} = \left(\frac{K_N^0}{K_P^0} \right)^3 = \frac{N}{Z}. \quad (13)$$

實際上由於庫倫排斥力作用, 質子與中子之分佈不完全處處成一定比例. 但上述簡單假設所引致錯誤不大.

三. $\beta(A)$ 之決定及其意義

根據邁約爾-任生^[13,14]殼層模型, 原子核內每一核子均可指定一定軌道角

動量與總角動量量子數。本文係引用克林肯拜爾克^[17]所撰表計算下列數值：

$$\langle l_N^q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{N_i=1}^N [l_{N_i}(l_{N_i}+1)]^q, \quad \langle l_p^q \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{Z_i=1}^Z [l_{Z_i}(l_{Z_i}+1)]^q, \quad (14)$$

其中 l_{N_i} , l_{Z_i} 各表第 N_i 中子與第 Z_i 質子的軌道角動量量子數。圖 1 上有 $q=1, 2$ 時 $\log(l_N^q) - \log N$ 及 $\log(l_p^q) - \log P$ 的表示, 其中 $\cdot$ 指中子及質子, 而 $+$ 專指質子。同圖上還有按 (12) 式計算出來的不同 β 值的直線; $\beta=0$ 之直線相當於高斯函數密度分佈。由圖 1 (308 頁) 可看出:

(i) 中子與質子平均軌道角動量值在 N 或 $Z < 50$ 時或 > 82 時基本上一樣, 在 N 或 Z 介於 50 與 82 間時, 稍有差異。

(ii) (5) 式所給形式對於 $A > 30$ 之原子核是能近似地表示核子密度的, 只要 β 是適當的 A 的函數。

(iii) 核子密度 (5) 並非惟一, 而僅是合乎軌道角動量分佈要求的一種函數。對於任何其他建議之核子密度函數, 經由 (4) 式求出 $\overline{l_N^q}$ 及 $\overline{l_p^q}$ 後, 利用圖 1 即可判別其近似程度與是否適用。如龔拔斯^[18]最近建議高斯分佈函數 (相當於 $\beta = 0$), 及任生-陸廷吉^[16] 建議之邊緣層等厚度模型, 相應於兩者的曲線均在圖 1 上表示出來; 前者除了少數輕原子核可適用外, 對 $A > 50$ 之原之核顯然不能適用, 後者在 A 介於 82 與 120 間尚可適用, 但出此範圍即須修正, 特別是輕核方面。

(iv) 根據圖 1 以及其他若干實驗結果, 足以說明原子核存在着兩種殼層結構, 詳情見附錄。

為決定 β 將如何隨 A 改變使得 (12) 所給與殼層理論最為相近, 必先用最小二乘方求得 $\langle l_N^q \rangle$ 之近似曲線, 代入 (12) 左邊後, (12) 式即表示 b 是 A 的隱函數。這樣做將須要頗複雜的計算, 本文為試探性質, 故只取幾個典型厚子核 A_i , N_i 並只利用 $q=1, 2$ 兩曲線, 從圖 1 與圖 2 (309 頁) 中找出相應之 β_i 值。圖 2 表 $f_1(\beta) - \beta$ 及 $f_2(\beta) - \beta$ 曲線。 ($f_q(\beta) = \overline{l_N^q}(\beta) / [I_3(\beta)]^{\frac{2q+3}{3}}$) 所得 $A - \beta$ 曲線見圖 3 (316 頁)。通過這些 A_i , N_i 的 $\log \overline{l_N^q} - \log N$ 及 $\log \overline{l_p^q} - \log N$ 曲線仍在圖 1 中表示。如令

[17] Klinkenberg, P. F. A., *Rev. Mod. Phys.* 24 (1952), 63.

[18] Gombás, P., *Acta Phys. Hungar.* 1 (1952), 329; 2 (1952), 223.

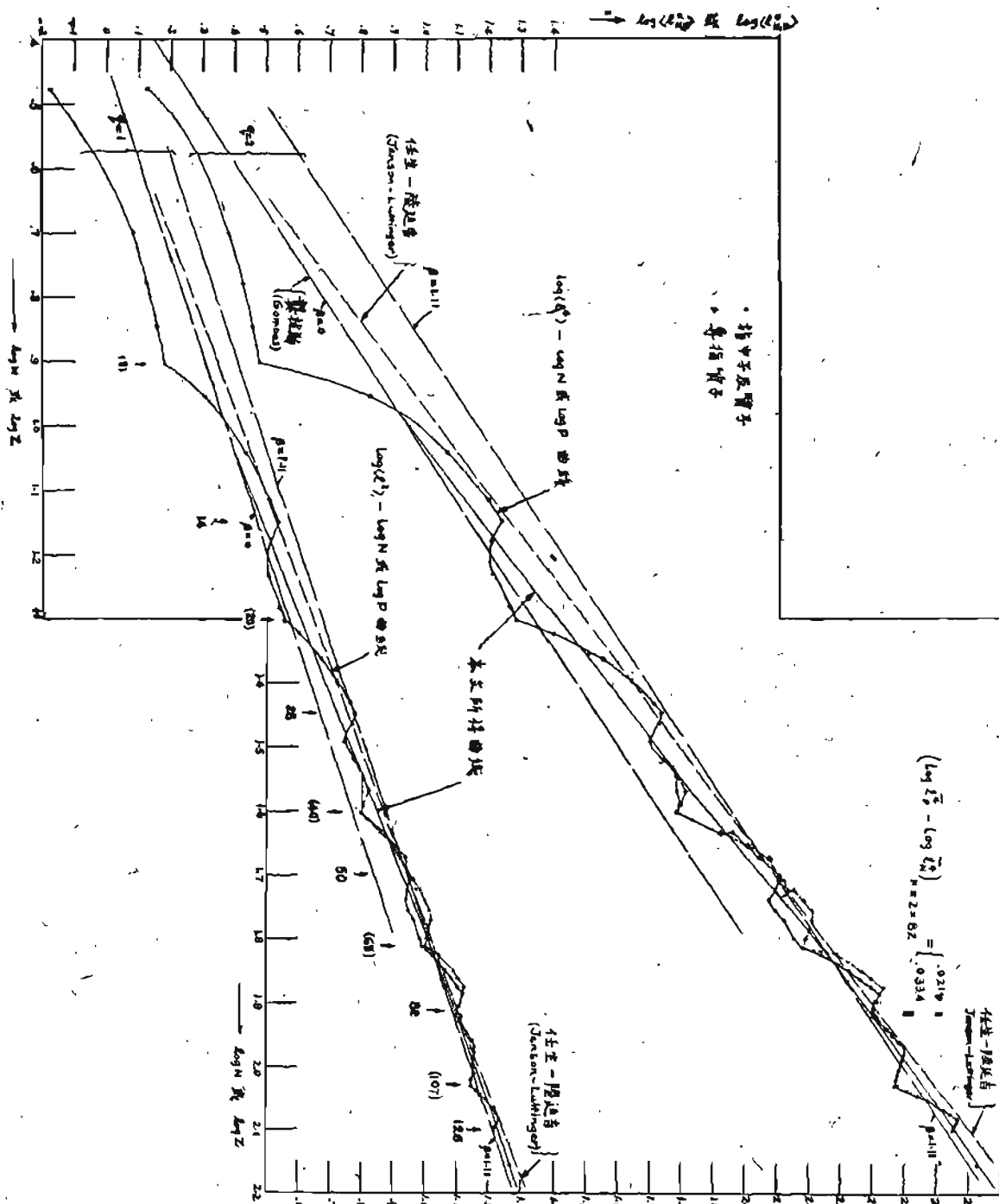


圖 1.

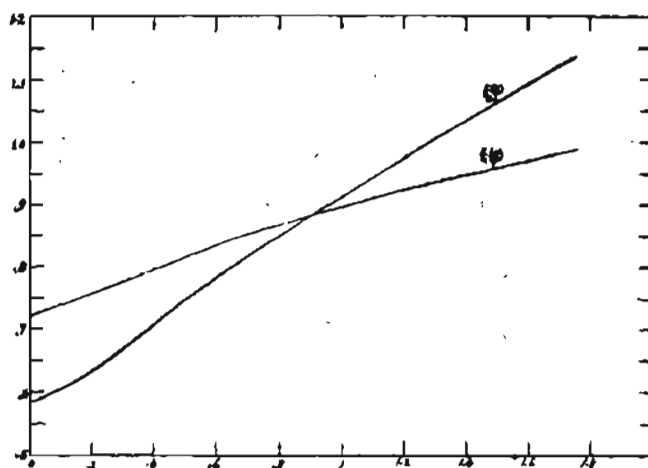


圖 2.

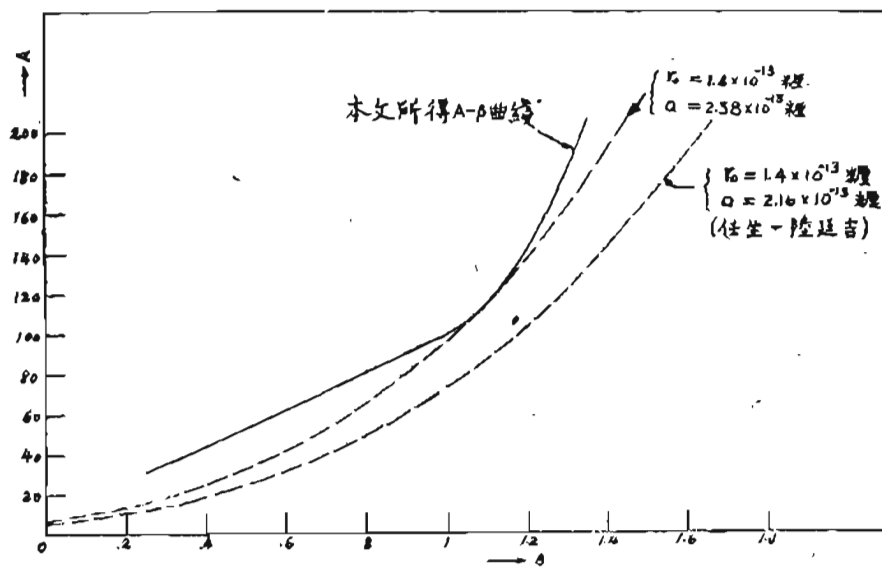


圖 3.

$$\rho_0 = \rho_N^0 + \rho_p^0 = 1 / \frac{4\pi}{3} r_0^3,$$

則 $\rho(r)$ 之規格化條件可寫成

$$A = 3^{5/2} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 I_3(\beta) \beta^3. \quad (15)$$

相當於 $r_0 = 1.4 \times 10^{-13}$ 厘米, $a = 2.16 \times 10^{-13}$ 厘米, 及 $r_0 = 1.4 \times 10^{-13}$ 厘米, $a = 2.38 \times 10^{-13}$ 厘米之曲線, 亦在圖 3 中繪出, 俾便比較。上述第一種情形即相當於任生-陸廷吉所建議者。對於本文所建議模型, $\left(\frac{a}{r_0} \right)$ 之值隨 A 改變, 可由 (15) 式求出。如 $\left(\frac{a}{r_0} \right)_{A=40} = 2.1$, $\left(\frac{a}{r_0} \right)_{A=100} = 1.8$, $\left(\frac{a}{r_0} \right)_{A=200} = 1.7$ 。

應當指出從軌道角動量分佈判斷一種密度分佈是否合宜, 將視由 (12) 式所得 (相當於所有整數值 q) 是否與殼層理論相符。本文只就 $q = 1, 2$ 討論。在前述求 $A-\beta$ 曲線過程中, 曾就 $q = 1, 2$ 兩情形分別求相當於一定 A_i 的 β_i 值, 結果在 $A > 60$ 時, 兩種 β_i 值相差 $\leq 4\%$ A 再小時則差別增大, 當 $A \sim 26$ 時, 差別 $\sim 20\%$ 。足見 (5) 式模型在 $A < 30$ 時已不能適用。

綜上所述, 由圖 3 可以認識到 β 值較一般所認為者為小亦即原子核邊緣層厚度較一般所公認者為大。如假定 $r_0 \sim 1.4 \times 10^{-13}$ 厘米則表面層厚度 a 在 $A \sim 112$ 時有最小值 $\sim 2.38 \times 10^{-13}$ 厘米, 此時中心等密度部分半徑 $R_0 \sim 4.5 \times 10^{-13}$ 厘米。在 $A \sim 200$ 時 $a \sim 2.5 \times 10^{-13}$ 厘米, $R_0 \sim 5.78 \times 10^{-13}$ 厘米; 在 $A \sim 50$ 時 $a \sim 2.64 \times 10^{-13}$ 厘米, $R_0 \sim 2.15 \times 10^{-13}$ 厘米。實際上 ρ_0 (亦即 r_0) 將隨 A 稍改變。另外圖 3 中尚有應注意者即當 $A > 112$ 時, $A-\beta$ 曲線顯著變陡, 這正是我們所要求的, 這樣由 (12) 式所得關於質子的 $\log \bar{I}_p^q - \log Z$ 曲線才能與殼層理論所得者相近。在同樣中子數與質子數的情形, 從 (12) 式可得

$$\frac{\bar{I}_p^q}{\bar{I}_N^q} = \frac{f_q[\beta(A_2)]}{f_q[\beta(A_1)]},$$

其中 A_1, A_2 各為相當於 N 中子與 $Z (= N)$ 質子的質量數。因 $A_2 > A_1$, 而 β 隨 A 增加, 故一般 $\bar{I}_p^q > \bar{I}_N^q$ 與殼層理論相符。當 $N (= Z)$ 不很大時, A_2 與 A_1 相差不大, 而 $f_q(\beta)$ 是 β 的徐緩變化函數, 因此 $\bar{I}_p^q$ 與 $\bar{I}_N^q$ 相差不大。但當 $N = Z = 82$ 時, $A_2 = 208, A_1 = 139$, 如按任生-陸廷吉模型則 $\frac{\bar{I}_p^q}{\bar{I}_N^q} = 1.08$, 按本

文建議模型則 $\frac{\bar{I}_P}{\bar{I}_N} = 1.05$ ，兩者所引起 $\log \bar{I}_P - \log Z$ 曲線在 $N = Z = 82$ 處高出 $\log \bar{I}_N - \log N$ 曲線之大小均示於圖 1 上。本文建議模型所給出結果與殼層理論較為相近。這裏我們還沒有考慮到 $\rho_p(r)$ 與 $\rho_n(r)$ 不完全符合 (13) 之假設。由於庫倫排斥 $\rho_p(r)$ 將集中於邊緣部分，因此 $\bar{I}_P^2 / \bar{I}_N^2$ 之值較用 (12) 式計算者為大。

圖 3 中指出 $\left(\frac{a}{r_0}\right)$ 之值在 $A \sim 112$ 處為最小。A 增大時， $\left(\frac{a}{r_0}\right)$ 亦增大；A 減少時， $\left(\frac{a}{r_0}\right)$ 增加更多。這種表面層隨 A 之改變在質上可以從理論上說明，從殼層理論出發，一核子在核內可近似地認為存在於某一定“單粒子情態”下。這些情態的波函數可簡單地從薛丁吉方程求得；其中位穴深度幾乎為一常數而寬度約與 A^{1/3} 成比例。不難指出由這些波函數所組成之 $\rho(r)$ ，其邊緣層厚度大約與核子平均結合能平方根成反比因此 a 應在 $A \sim 60$ 附近有極小值，但當 A 增大時，庫倫能，表面能與對稱能皆有使 r_0 增大之傾向，因此這就能將相當於 $\left(\frac{a}{r_0}\right)_{\min}$ 之 A 值增大些。

四. 原子核內核子動量之分佈

試就中子討論。從任何密度分佈 $\rho_N(r)$ ，按湯-費二氏模型立刻可求中子動量分佈函數 $\rho_N(p)$ ：

$$\rho_N(p) d_p = \begin{cases} \int_0^{\bar{r}(p)} \rho_N(r) 4\pi r^2 dr d_p, & p < P_0 = \left(\frac{3\rho_N^0}{8\pi}\right)^{1/3} h, \\ 0, & p > P_0, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\bar{r}(p) = R_0 + a \left(\log \frac{3h^3 \rho_0}{8\pi p^3}\right)^{1/2}$ 。將 (5) 代入 (16)，得

$$\rho_N(p) = 4\pi\rho_0 a^3 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{a}\right) \left(1 - e^{-y_0^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{R}{a}\right)^2\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(y_0) \right\}, \quad (17)$$

其中 $y_0 = \sqrt{\log \frac{3h^3 \rho_0}{8\pi p^3}}$ ， $\Phi(y)$ 表差誤函數。(17) 式所表分佈在 p 小時與高斯分佈相近，後者在實驗中顯示近似地正確^[8]。

五. 結 論 與 討 論

本文主要結論如下：

(i) 軌道角動量分佈情況不完全決定核內核子密度分佈，但供給後者以必須滿足之條件。由軌道角動量決定核子密度只少有一未定常數——如核半徑或核中心密度——這常數必須用牽涉核子間作用力與能量的實驗數量來決定它*。

(ii) (5) 式所述模型中，如 β 為 A 的適當函數，則在 $A > 30$ 的情形下可以近似地表示核子密度分佈。 A 在 30 與 50 間近似程度較差。

(iii) 原子核表面層厚度較一般所認為者為大 ($\sim 2.5 \times 10^{-13}$ 厘米)。表面層厚度 a 隨 A 改變，在 $A \sim 112$ 時為最小，重核中 a 稍增，輕核中 a 增加較大。

在 $A < 30$ 時，(5) 式不能近似表示核子密度的原因可能是高斯函數在邊緣部分減低過快，如在邊緣部分代以簡單指數函數則可能改善。同時當 $A < 40$ 時，湯-費二氏模型本身之適用性亦較差。

本文結論便利了進一步在統計模型中用變分法求原子核總結合能，核半徑等^[18]。任何試探函數首先要滿足軌道角動量分佈的要求。如利用 (5) 式則只有一個未定參變數。應當指出由軌道角動量分佈提出關於核子密度分佈的要求並不敏感。同時由最近龔拔斯所做原子核結合能計算^[18] 亦可看出核子密度對於原子核總結合能亦不敏感，故要想用實驗核半徑或用鏡像核質量差決定核半徑，然後從結合能計算中求出一套在 20 Mev 以下可用的核子間作用力形式與常數的可能性是不大的。

附錄——關於原子核的兩種殼層結構

普通所指一組結構數 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 在 20 與 28 間顯然有一些變化發生。這裏將舉出一些事實來說明上述一組結構數實為兩組結構數混合而成；這兩組結構數各為

<u>2</u>	<u>8</u>	<u>20</u>	40	65	107
6	14	<u>28</u>	<u>50</u>	<u>82</u>	<u>126</u>

由兩組中數字下劃線的數目合併起來便成通常的一組。可注意的是第二組中之

*這裏有幾種實驗數量如核結合能，核半徑，鏡像核質量差，及從核子散射理論中求出之核子間作用力常數，在利用本文所得核子密度，計算核結合能及鏡像核質量差時，可供互相對校之用。

數字形成三級等差級數^[19]。第一組中如 65 改為 70, 107 改為 112 時亦形成三級等差級數。後者之改變可能是由於在重核中自旋軌道偶合能與庫倫能之擾亂所致。原子核的殼層結構的實驗證據只有從那些原子核性質中去尋找, 即這些性質一般是核子數的有規律變化的函數; 但在某些核子數時, 在這些有規律變化上又疊加上顯著約有系統的偏差。上述第一組結構數是與軌道角動量分佈聯系起來的。而第二組則與能級聯系起來。

首先由圖 1 可以看出, 特別在 $q=2$ 時更明顯, 相對於通過各點的平均曲線有一組顯著的最小的 $\bar{I}^q$ 值, 相當於這些最小 $\bar{I}^q$ 值的核子數——如圖所示——即 8, 20, 40, 65, 107。在這些數字處, 某種屬於一定軌道角動量之情態正好填滿, 緊跟着加進來的核子必須在軌道角動量較高的情態中, 因此引起平均軌道角動量之驟增。第二組結構數在圖 1 中亦有較特殊之表現, 如 14, 28 處為顯著之 $\bar{I}^q$ 最大值, 50 處有不很顯著的 $\bar{I}^q$ 最大值, 隨後在 82, 126 處則無特殊表現。第二組結構數字的表現主要是在有關能量的數量中。第一組結構數字的表現主要是在軌道角動量的分佈中, 在有關能量的數量中, 表現很不明顯或者根本沒有。

關於 50, 82, 126 在有關能量的數量中, 表現顯著的殼層結構, 早已有很多敘述^[13-14]。以下主要說明從能量上分析 28, 14, 6, 更 20, 8 顯著地表現從能量上考慮的殼層結構。主要數據分兩方面, 即結合能及 β -衰變能。

(i) W. 羅與 C. H. 湯斯^[20]曾對 N 與 Z 在 20 附近的原子核質量作過詳盡的分析。他們發現這些原子核 (如 Ca^{39-42} , K^{38-42} , A^{35-41} , Ce^{33-38} , S^{31-37}) 的實驗質量都緊靠着波耳-惠落爾公式^[21]差誤一般小於 0.5 Mev。只有在 Ca^{40} 處有顯著的偏差。比上述公式低 ~ 3.5 Mev。只含 20 中子或只含 20 質子的原子核並無任何質量減小的傾向。 Ca^{40} 之特別穩固可能是於中子與質子的適當配合, 它們正好在此同時填滿 $3d_{3/2}$ 情態。

(ii) 另外一種方式從結合能尋找殼層結構線索是檢查最後一中子, 一質子或一中子-質子對的結合能, 並且為了除去庫倫能, 對稱能, 和奇偶變化的影響, 首先從結合能裏減去庫倫能 (利用鏡核質量差), 然後比較屬於一定中子過剩的偶中子核或偶質子核^[22]。結果發現在 N 或 $Z = 6, 14, 28$ 處有顯著的最大值, 而當 N

[19] Valente, F. A., *Phys. Rev.* **78** (1950), 77.

[20] Law, W., and Townes, C. H., *Phys. Rev.* **80** (1950), 608.

[21] Bohr, N., and Wheeler, J. A., *Phys. Rev.* **56** (1939), 426.

[22] Sanda Jyumpei and Yoshizawa Yasukazu, *Phys. Rev.* **83** (1951), 663.

或 $Z=8, 20$ 時並無特殊變化。M. G. 賴德利希^[23] 亦作過類似的分析, 除了證實 6, 14, 28 處有顯著殼層外, 尚舉出 7 與 11。後者尚沒有解釋。

(iii) 當比較同中子過剩數的各原子核的 β -衰變能時^[24], 發現 $\text{Al}^{28} \rightarrow \text{Si}^{28}$ 與 $\text{Al}^{29} \rightarrow \text{Si}^{29}$ 兩衰變能較附近衰變能特大, 表示 $Z=14, N=14$ 處有殼層結構。

實際上在輕原子核方面, 因 α -集團的影響尚大, 故結構數 6 與 8 之分別不很明顯。如從原子核最低激動能考慮 8 比 6 更有理由屬於能量上的殼層結構。

ORBITAL ANGULAR MOMENTUM DISTRIBUTION IN NUCLEI AND NUCLEAR DENSITY*

YANG LI-MING

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate to what extent the distribution of orbital angular momentum of nucleons in a nucleus implied by the theory of shell structure limits the form of nuclear density. The effect of the latter has shown itself in a number of physical problems, such as the scattering of high energy electrons by nuclei, the hyperfine structure, the absorption of negative μ -mesons by nuclei, internal conversion coefficient in heavy elements, etc.

The investigation is based on the Thomas-Fermi model of the nucleus, according to which one has

$$n_N(l) = \frac{4l}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 K_N^2(r) - l^2} \frac{dr}{r}, \quad (1)$$

where $n_N(l)dl$ is the number of neutrons with orbital angular momentum in l and $l+dl$, $K_N(r)$ is the local maximum momentum of a neutron in unit of $\hbar$, and the limits of integration r_1, r_2 are so determined that the integrand is real†. Instead of solving (1) which is a non-linear integral equation when the left hand side is obtained from the theory of shell structure, we find the moment $N \overline{l_N^k}$ of $n_N(l)$ as follows:

[23] Redlich, M. G., *Phys. Rev.* **83** (1952), 38.

[24] Seidlitz, L., Blauler, E., and Tendam, D. J., *Phys. Rev.* **76** (1949), 861.

*Received September 7, 1953.

†The same thing can be said of the protons, but we will carry through the argument with the neutrons only.

$$N \overline{l_N^k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \left(r K_N(r) \right)^{k+3} \quad (2)$$

When suitable trying function $K_N(r)$ is used, the calculated $\overline{l_N^k}$ can be directly compared with the corresponding quantities $\langle l_N^k \rangle = \sum_{N_i=1}^N l_{N_i} (l_{N_i} + 1) / N$ obtained from data supplied by the theory of shell structure. (Here l_{N_i} is the orbital angular momentum quantum number of the N_i -th neutron, and N the total number of neutrons.) Such comparison will serve as a useful test to any density function that is proposed, but considerations of orbital angular momentum distribution alone do not suffice to determine the angular nuclear density completely. The latter statement follows from an inspection of (2) which shows that the set of all moments $N \overline{l_N^k}$ which characterize the distribution $n_N(l)$ remains invariant when r is replaced by cr and $K_N(r)$ by $K_N(r)/c$, c being an arbitrary constant.

A trying function of the following type is used:

$$\begin{aligned} K_N(r) &= K_N^0 = (3\pi^2 \rho_N^0)^{\frac{1}{3}}, & r < R_0, \\ &= K_N^0 l^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{r-R_0}{a} \right)^2, & r > R_0, \end{aligned}$$

where ρ_N^0 is the neutron density at $r=0$, R_0 is the radius of the central part of constant density and a is regarded as the surface thickness.

For convenience, one puts $r = R_0 a$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R_0}{a}$, then

$$\left. \begin{aligned} K_N(r) &= K_N^0 g(x), \\ g(x) &= 1 & \text{for } x < 1, \\ &= l^{\frac{1}{3}} \beta^2 (x-1)^2 & \text{for } x > 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The only parameter relevant to the requirement of the orbital angular momentum distribution is β which measures the ratio of the linear dimension of the part of constant density to that of the surface layer. Results of the above mentioned comparison is shown in Fig. 1. By making β a suitable function of A , it is seen that (3) is capable of representing approximately the nuclear density of all nuclei with $A > 30$.

In view of the fact that the whole deduction is based on rather crude approximation, it is not attempted to obtain an exact expression of β as a function of A , but rather a

few typical nuclei are chosen for numerical analysis from which an approximate $\beta-A$ curve can be constructed (see Fig. 3). In Fig. 1 and 3 are also plotted curves corresponding to nuclear densities proposed by other authors.

From the $\beta-A$ curve we obtained in Fig. 3, it is seen that the nuclear surface is thicker than what is usually believed. Preliminary estimation shows that the thickness a of about 2.38×10^{-13} cm. for $A \sim 112$ is the smallest. It increases to 2.5×10^{-13} cm. for $A \sim 200$ and to 2.64×10^{-13} cm. for $A \sim 50$. Thus the thickness increases even faster towards light nuclei.

The shape of the $\beta-A$ curve in Fig. 3 accounts better for the difference in orbital angular momentum distributions of neutrons and of protons than the model of constant nuclear surface thickness, analyzed recently by Jenson and Luttinger.

The nuclear density so determined leaves only one undetermined parameter, the nuclear radius or the nuclear density at $r=0$. Provided that the total binding energy is expressible in terms of integrals over the nucleon densities, we have now several categories of empirical data that can be served as a cross check. These are the nuclear radii, the total binding energies, nuclear force law obtained from the nucleon scattering experiments under 20 Mev.

In the appendix, it is pointed out that from the plot of the average orbital angular momentum per nucleon shown in Fig. 1 and some other evidences from nuclear binding energies and β -decay energies, it is proposed that there exist two types of nuclear shell structure one being connected mainly with the filling up of states of given orbital angular momentum (close shells are characterized by small average orbital angular momentum per neutron or proton):

2, 8, 20, 40, 65, 107,

and the other connected mainly with the large separation of energy levels of single particle states in nuclei due to spin-orbit coupling:

6, 14, 28, 50, 82, 126.

The usual set of shell numbers is seen to be a combination of the above two sets, each of which is a third order arithmetic progression except the last two members of the first set which deviate from 70 and 112 expected from the progression, caused presumably by the strong spin-orbit coupling in heavy nuclei.