

# 雙餘割平方式波束天線\*

鮑家善

(南京大學物理系)

## 提要

本論文討論如何利用簡單衍射理論，計算改良拋物面反射器天線輻射之圖型。此反射器可將一無方向性輻射源之能量聚集於任何形狀之波束中。此原理可以應用在地面上或船面上尋求飛機高度雷達天線之設計。在此類雷達中，天線之方位圖型必須為“雙餘割平方”式；其特性為自波束對稱軸線起，至其兩端，輻射一次路程之功率，與方位角之餘割平方成正比。得此圖型之最簡易方法為置一狹窄之鉛垂金屬條於一截形拋物面反射器之中心，金屬條之寬度，可改變波束之方向性；其支距，即金屬條與反射器之距離，可影響兩反射波之位相。故改變金屬條之寬度及其支距，可得欲得之圖型。

利用衍射及干涉理論，計算金屬條及截形拋物面所生之總圖型為：在方位面內，輻射強度  $J_H$  與水平角  $\theta$  之關係為：

$$J_H = A A^* \left[ \frac{\sin^2(15\pi \sin \theta)}{(15\pi \sin \theta)^2} - 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} \right. \\ \left. \left( \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} - \frac{\sin(15\pi \sin \theta)}{15\pi \sin \theta} \right) \right],$$

$A$  為輻射波振幅， $A^*$  為  $A$  之複共軛數。計算之結果與實驗之結果，頗為一致。

## 一、緒論

微波天線具有狹窄之波束，較高之天線利益，及優良之鑑別率；故可用以測量目標之方向及距離。但將一狹窄波束之天線在一三維空間中作有規則之掃描，以定目標之位置時，掃描方法非常複雜。有時因機械問題之困難，用此種天線測目

\* 1951 年 11 月收到

標之位置不太實際，在此種情形下，最好用一不對稱波束之天線，或扇形波束天線，可使掃描問題簡化。通常用一不對稱之截形拋物面反射器，雖可得一扇形波束；但此方法，並不理想，鮮被應用。第一：目前飛機鮮有作高於四萬呎之飛翔，故若用此種截形拋物面天線輻射之波束搜尋目標時，一部份能量投於飛機不達之區域，以致浪費。第二，當目標移動時，此種天線所產生之反射信號之強度，並不均勻。若能改變天線波束之形狀，則用一較小之天線，可得相同之射程。例如，用一扇形波束之天線圍繞一鉛垂軸線轉動時，可定目標之水平位置。此種雷達多用餘割平方式天線，其特性為輻射一次路程之功率與仰視角之餘割平方成正比。又如

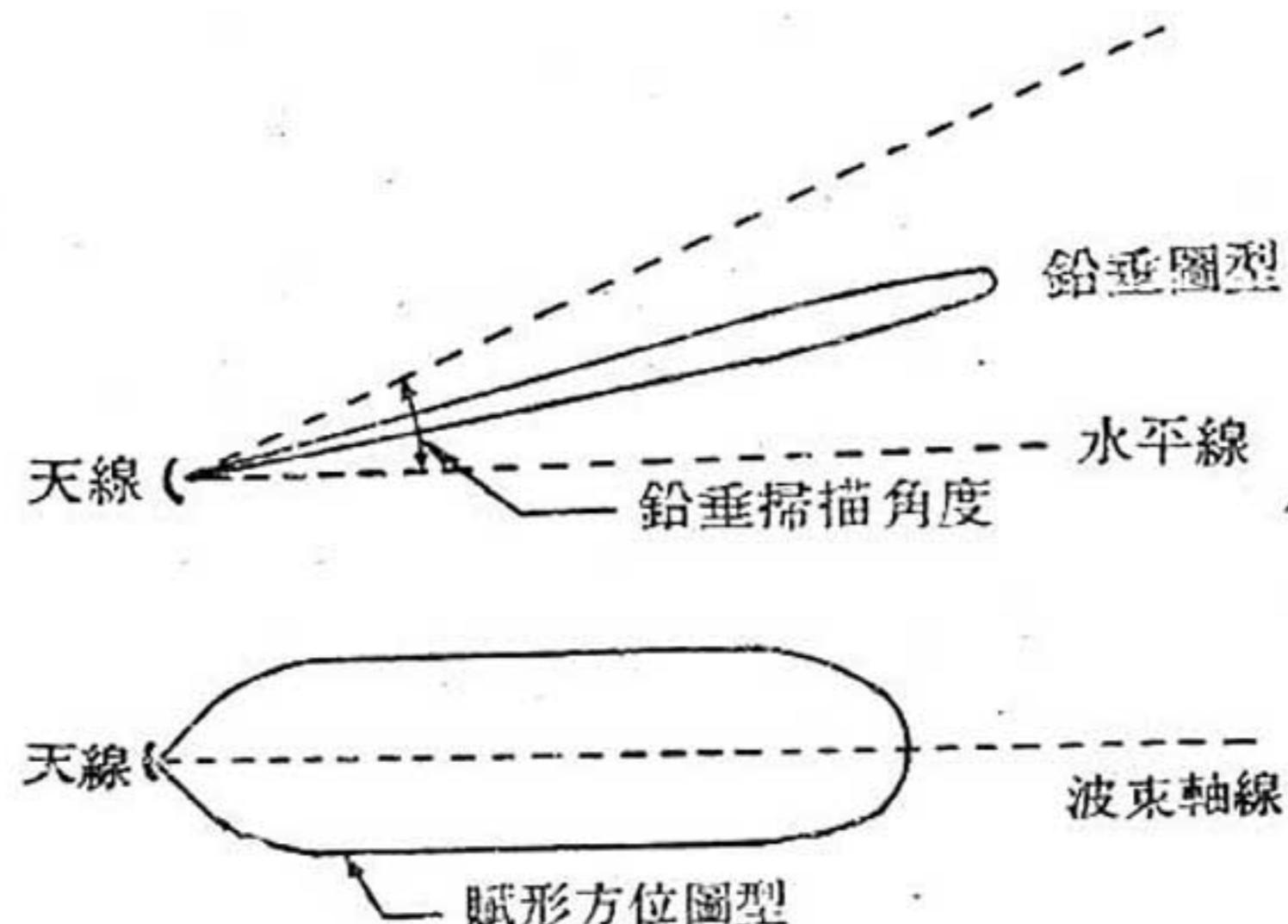


圖 1. 尋求飛機高度之“懶尾”式波束天線輻射圖型

用一扇形波束之天線圍繞一水平軸線作迅速掃描時，可測目標之高度。此種雷達必須具有一狹窄之鉛垂波束，使天線在鉛垂面內有較優之鑑別率。欲使移動之目標在天線之波束內逗留相當時間，以測其高度時，天線之方位波束，必須寬闊。設飛機在一定高度穿過此波束時，射於飛機波能之強度與其距離平方成反比。如方位面之波束為“雙餘割平方”式，或“懶尾”或其特性為自波束對稱軸線起至兩端，輻射一次路程之功率與方位角之餘割平方成正比，（圖 1）則飛機在一定高度飛行時，所受之照度，頗為均勻。

改變反射器或透鏡之形狀，可得欲得的扇形波束。將拋物體反射器之一部向

前傾側，則反射後之波前，亦隨之改變，故得欲得之圖型<sup>[註 1]</sup>。另一方法為置一多單位輻射器於拋物面或拋物柱面反射器內，調節每單位輻射器所發出之波之振幅及位相，亦可得欲得之結果<sup>[註 2]</sup>。此兩種形成扇形波束之方法，可視為一種散聚過程；在天線口徑上所發出之波，並不準直，用不同振幅和不同位相分佈於一定角度內，形成欲得之天線圖型。

用多單位饋還器產生“獅尾”式波束，並非簡易，蓋因在實際應用中，兩端所包含之角度太大，致使饋送器之構造，非常複雜<sup>[註 2]</sup>。用雙面率反射器產生此類波束，亦非易事<sup>[註 3]</sup>。最簡易的方法為置一點源饋送器於一改良拋物面反射器內。圖2表示如何應用此原理，產生欲得之圖型。置一鉛垂之狹窄金屬條於一拋物

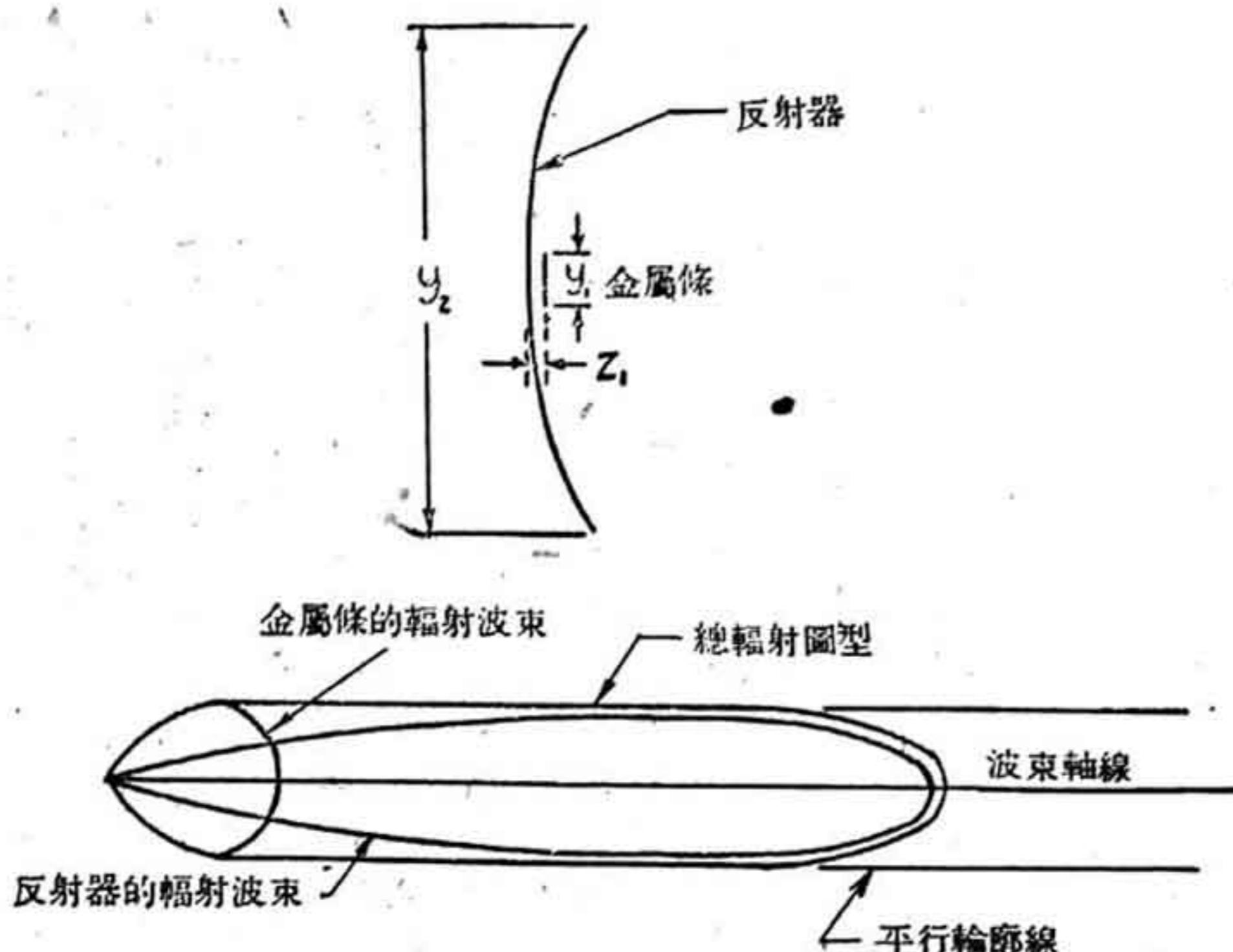


圖 2. 置一金屬條於反射器的中心產生“獅尾”式波束

[註 1] S. Silver, *Microwave antenna, theory and design*, § 13.3 (McGraw-Hill, New York). L. J. Chu, "Microwave beam-shaping antennas", Research Laboratory of Electronics, M. I. T., Report No. 40, June 1947.

[註 2] S. Silver and C. S. Pao, "Paraboloid antenna characteristics as a function of feed tilt", Radiation Laboratory, M. I. T., Report No. 479, Feb. 1944.

[註 3] A. S. Dunbar, "Calculation of doubly curved reflectors for shaped beams", *Proc. I. R. E.* 36 (1943), 1239-1296.

面反射器之中心，金屬條之寬度可影響波束之方向性；金屬條與反射器之距離可影響兩反射波之位相。故改變金屬條之寬度及其與反射器之距離，可得欲得之波束。

## 二. 口徑——場方法

欲應用電磁波理論，求得天線輻射圖型之正確解答，絕非易事。目前只有在幾種簡單情況下：例如，反射器之形狀為一球形、圓柱形、或平面，及原能源之電場及磁場分佈情況頗為簡單時，始可求得正確之解答。如反射器之形狀為任意形狀時，吾人只能求其近似的答案。目前已有數種近似方法，求得微波天線輻射圖型，且得滿意之結果<sup>[註 4]</sup>。其中以口徑場方法計算此改良拋物面反射器輻射之圖型，最為適宜。

設置一點幅射源（在實際情況中，一電磁喇叭管為一近似點幅射源）於一截形拋物面反射器之焦點；置一鉛垂之狹窄金屬條於反射器之中心，則在方位面內之波束形成欲得之“獺尾”式圖型。此種改良拋物面反射器可以視為由兩個同焦截形拋物面反射器所組成（圖3及圖4）。

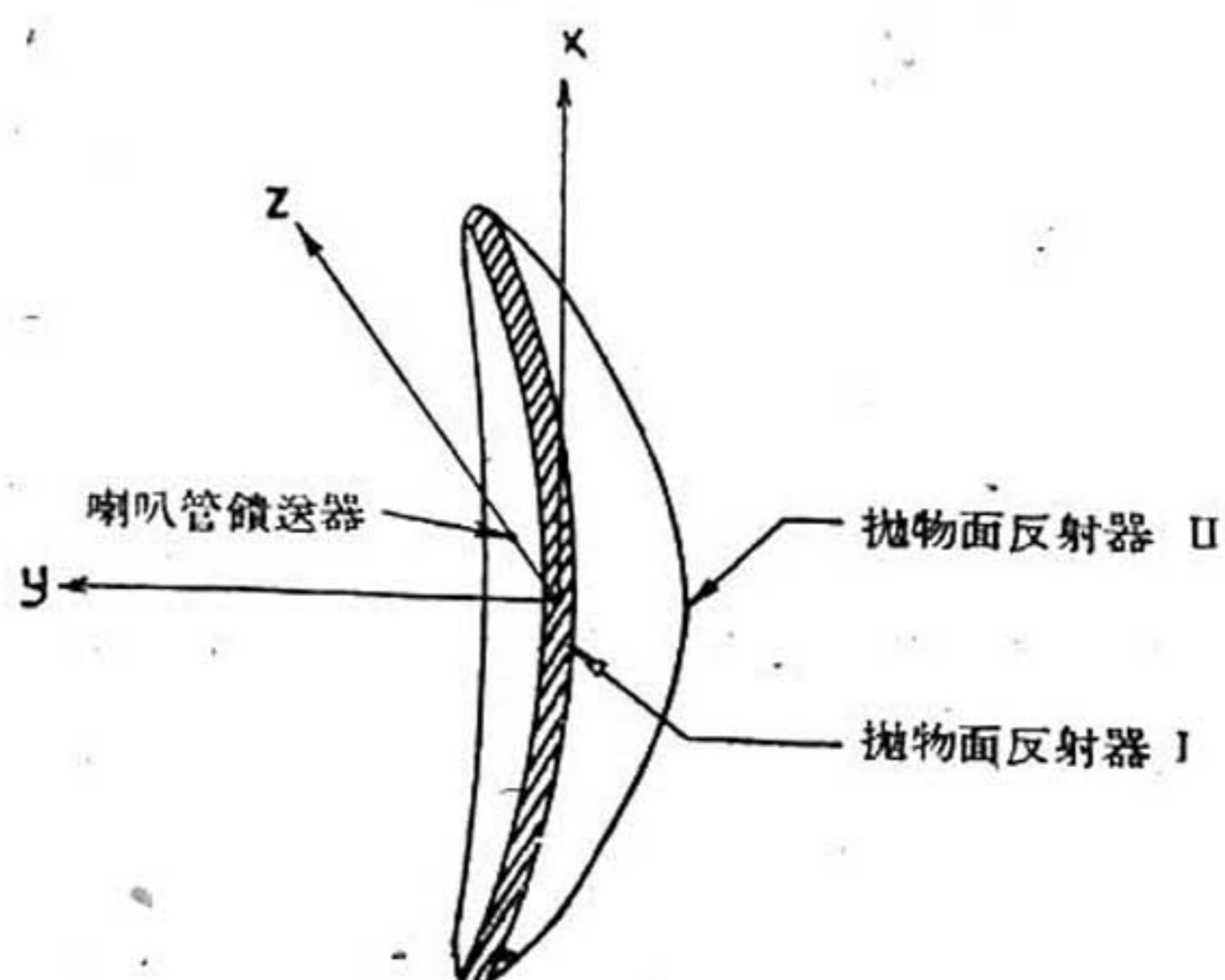


圖 3. “獺尾”式波束天線

<sup>[註 4]</sup> S. Silver, *op. cit.*<sup>1</sup>, §§ 5.4-5.12.

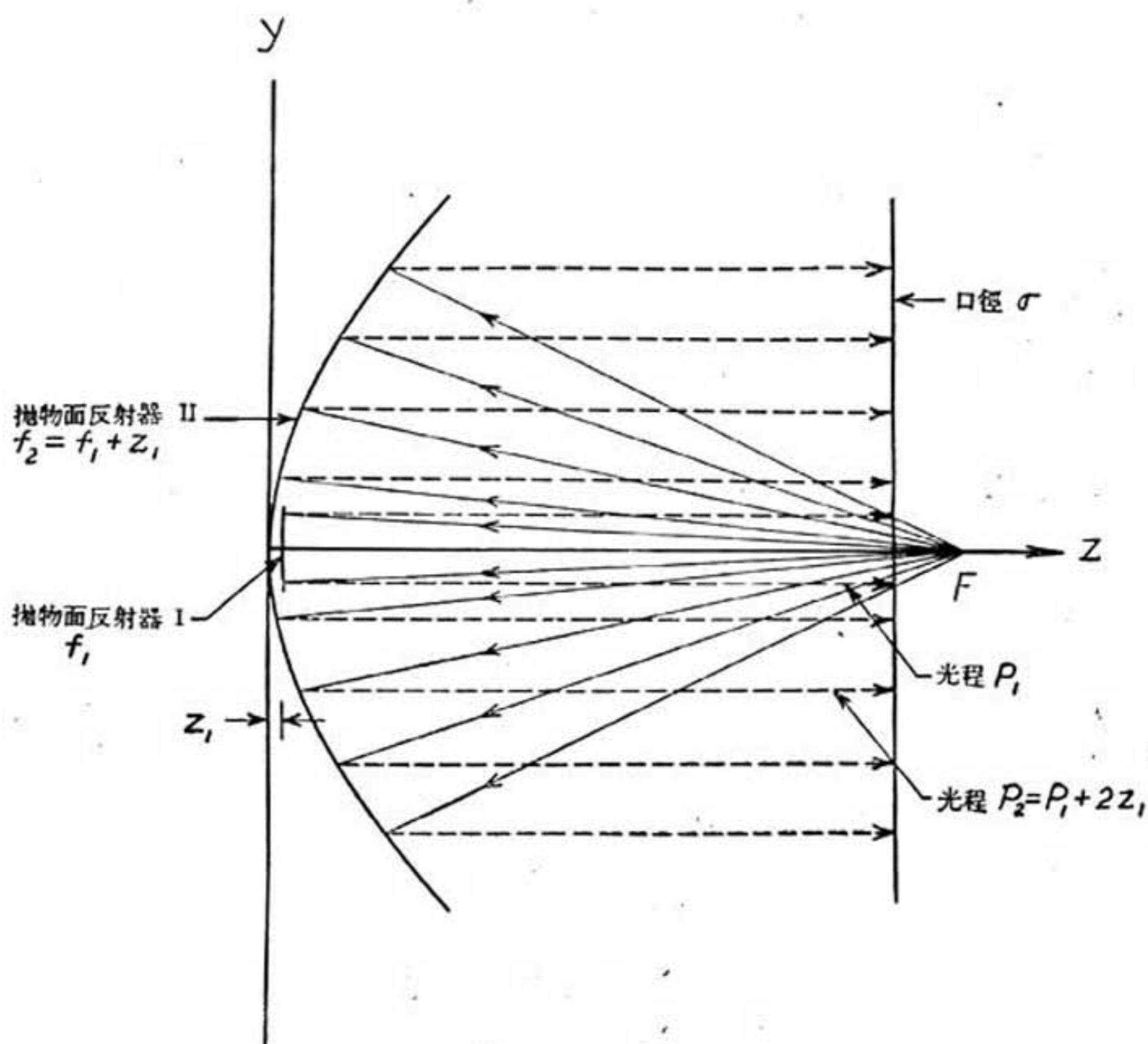
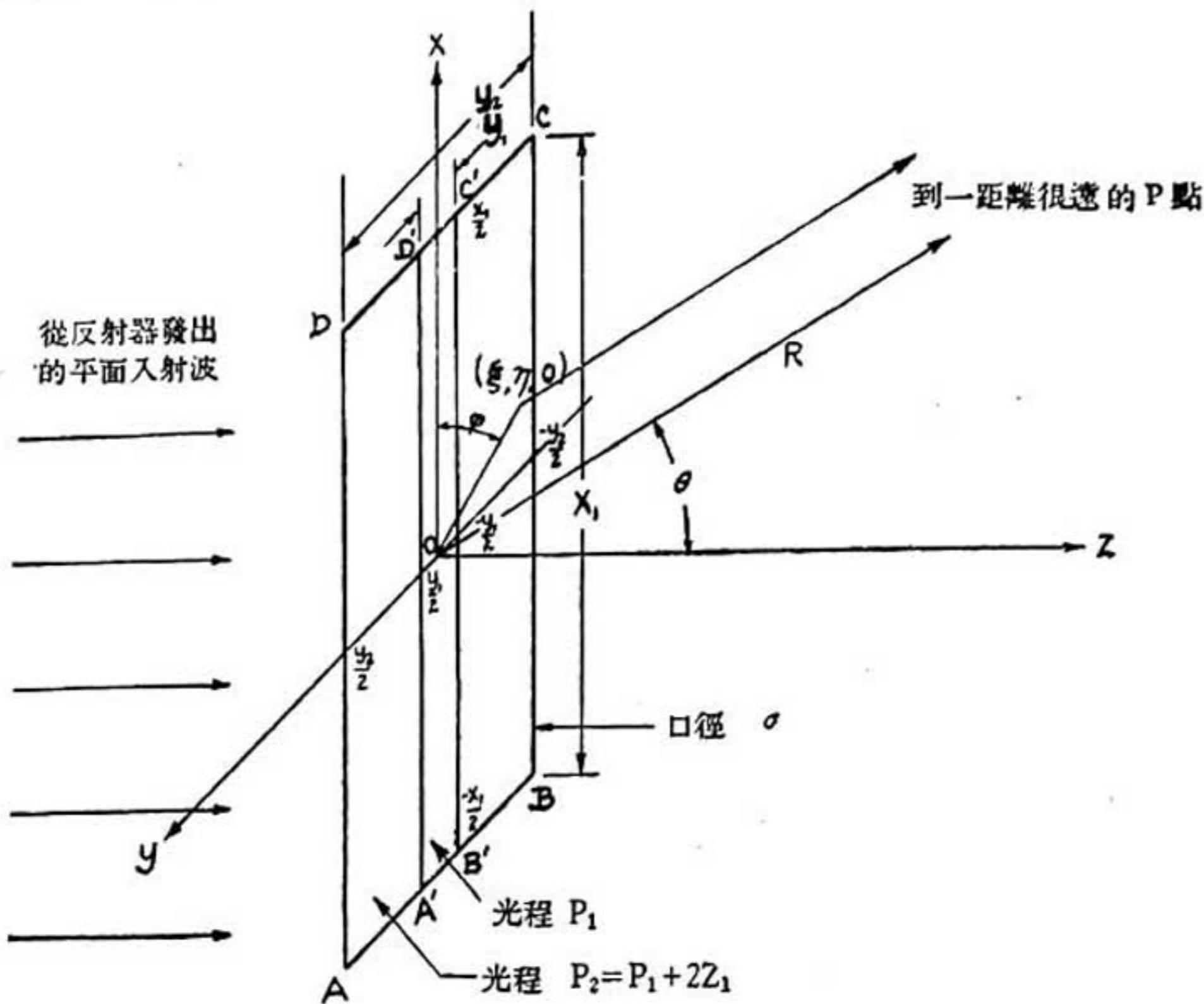


圖 4. “懶尾”式天線之中心水平截面圖

爲計算便利起見，假設喇叭管饋送器之原輻射圖型具有下列之特性：在反射器內，其振幅是一常數；在反射器外，其振幅爲零。經過一定時間後，反射波將到達天線口徑  $\sigma$  面上。在此  $\sigma$  口徑外，電磁場之強度爲零。由反射定律得知反射線均與此兩同焦拋物面之軸線平行。但因拋物面 I 與主拋物面 II 之距離爲  $z_1$ ，故在口徑  $\sigma$  處，由拋物面 I 反射之波與拋物面 II 反射之波，位相之差爲  $4\pi z_1/\lambda$  弧度（圖5）。

設口徑  $\sigma$  平面爲  $x\gamma$  平面，在口徑  $\sigma$  處電場之方向，與  $x$  軸線平行。設在口徑內任一點之坐標爲  $(\xi, \eta)$ ， $F(\xi, \eta)$  為在口徑內  $(\xi, \eta)$  點之場強度， $A(\xi, \eta)$  為其振幅， $\Psi(\xi, \eta)$  為其位相，則

$$F(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{-j\Psi(\xi, \eta)} \quad (1)$$



F<sub>(ξ, η)</sub> = 1 在口徑 σ 內  
F<sub>(ξ, η)</sub> = 0 在口徑 σ 外  
圖 5. 經過兩長方孔隙的繞射口徑

在福牢因和斐區域處，衍射場 U<sub>P</sub> 為[註 5]：

$$U_P = \frac{j}{\lambda R} e^{-jkR} \int_{\sigma} F(\xi, \eta) e^{jk \sin \theta (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi)} d\xi d\eta. \quad (2)$$

如被照之口徑為均勻時，則

$$F(\xi, \eta) = A = \text{常數},$$

故口徑 A'B'C'D' 所輻射之振幅圖型為

$$U_{PI} = A \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \right] \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right] e^{j \frac{4\pi z_1}{\lambda}}. \quad (3)$$

[註 5] S. Silver, op. cit. I, p. 173, eq. (9).

口徑  $AA'D'D + B'BCC'$  所輻射之振幅圖型爲

$$U_{PII} = A \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \right] \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right]$$

$$- A \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \right] \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right]. \quad (4)$$

故輻射之總振幅圖型爲：

$$U_P = U_{PI} + U_{PII}$$

$$= A \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \right] \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right]$$

$$- \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} (1 - e^{j \frac{4\pi z_1}{\lambda}}) \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} (1 - \cos \frac{4\pi z_1}{\lambda}) \right]$$

$$= A \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} (1 - \cos \frac{4\pi z_1}{\lambda}) \right]$$

$$+ j A \frac{\sin \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \sin \frac{4\pi z_1}{\lambda}. \quad (5)$$

在一遙遠之點  $P$ , 輻射波之強度為:

$$J = U_P \cdot U_P^*$$

$$= A A^* \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)}{\left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \right)^2} \left[ \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)^2} + 2 \left( 1 - \cos \frac{4\pi z_1}{\lambda} \right) \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} - \frac{\sin \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right) \right]. \quad (6)$$

在主面內（即  $xz$  平面與  $yz$  平面），輻射之圖型，最為重要。在  $xz$  平面即電場平面， $\phi = 0$ ，方程式 (6) 簡化為：

$$J_E = A A^* \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi x_1}{\lambda} \sin \theta \right)^2}. \quad (7)$$

在  $yz$  平面即磁場平面， $\phi = \frac{\pi}{2}$ ，方程式 (6) 簡化為：

$$J_H = A A^* \left[ \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \right)^2} + 2 \left( 1 - \cos \frac{4\pi z_1}{\lambda} \right) \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta} \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi y_1}{\lambda} \sin \theta} - \frac{\sin \left( \frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi y_2}{\lambda} \sin \theta} \right) \right]. \quad (8)$$

### 三. 結 果

作者曾於 1945 年應用上述之原理，設計“獅尾”式波束之雷達天線。用此種雷達可在多山地區發現飛機，並可測量飛機的高度。波長為 10 厘米之雷達，其天線為一 20 呎高，5 呎寬，焦距為 5 呎之碟形拋物面反射器，置一金屬阻礙物喇叭管<sup>[註 6]</sup>於此拋物面之焦點，可得一扇形波束。置一狹窄之鉛垂金屬條於拋物面反射器之中心，可得“獅尾”式波束。實驗結果為當金屬條之寬度為 8 吋，其支距為  $\frac{1}{4}$  吋時<sup>[註 7]</sup>，可得欲求之結果。

欲測上述衍射理論是否正確，可將實驗之數值， $x_1, y_1, y_2, z_1$ ，與  $\lambda$  代入方程式(8)。此處，

$$x_1 = 20 \text{ 呎} = 240 \text{ 吋},$$

$$y_1 = 8 \text{ 吋},$$

$$y_2 = 5 \text{ 呎} = 60 \text{ 吋},$$

$$z_1 = \frac{1}{4} \text{ 吋},$$

$$\lambda = 10 \text{ 厘米} = 4 \text{ 吋}.$$

故 
$$J_H = AA^* \left[ \frac{\sin^2(15\pi \sin \theta)}{(15\pi \sin \theta)^2} + 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} \left( \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} - \frac{\sin(15\pi \sin \theta)}{15\pi \sin \theta} \right) \right]. \quad (9)$$

[註 6] C. S. Pao, "Shaping the primary pattern of a horn feed," Radiation Laboratory, M. I. T. Report No. 655, Jan. 1945.

[註 7] C. S. Pao, "The beavertail antenna," Radiation Laboratory, M. I. T., Report No. 1027, April 1946.

圖 6 表示由方程式(9)計算所得之第一次輻射之功率圖型。由此圖中得知此計算之結果與理想之雙餘割平方圖型，頗為一致。

此處必須指出，此種口徑場計算方法，過為簡化。一喇叭管饋送器之原輻射圖型，絕非在反射器內，振幅為一常數；在反射器外，振幅為零。故被照之口徑處，並不均勻。將一鉛垂之金屬條置於拋物面反射器內時，電場面及磁場面之輻射圖型，均受損害。作者曾建議<sup>[註7]</sup>置兩對稱之鉛垂金屬條於拋物面反射器之兩端，該處所受之照度較弱，可得較優之輻射圖型。

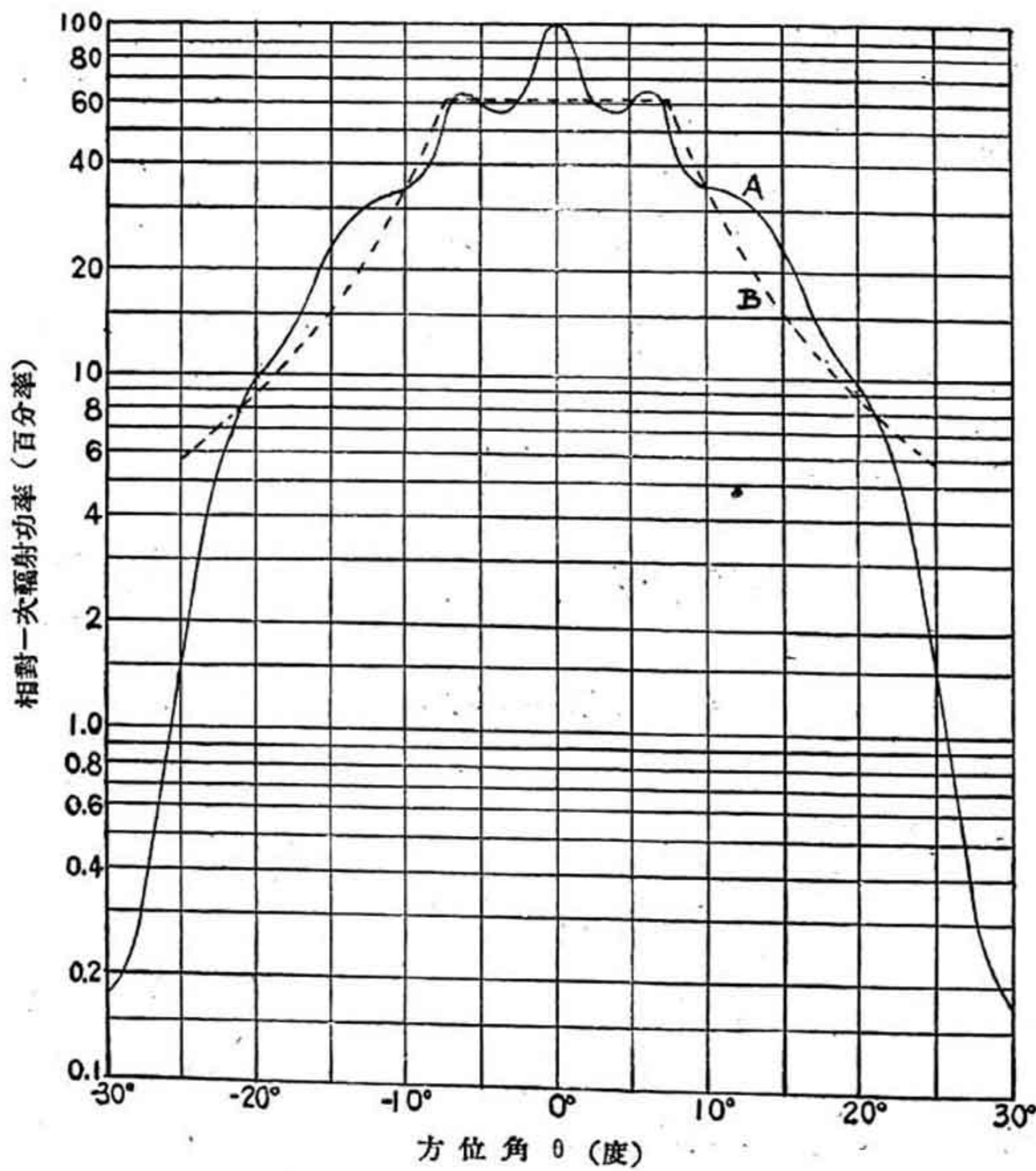


圖 6. 由口徑場理論計算出的“獵尾”式圖型

A. 由方程式(9)計算出的圖型

B. 理想的圖型

## MODIFIED PARABOLOID REFLECTORS FOR SHAPED BEAMS\*

By PAO CHIA-SHAN

*Department of Physics, Nanking University*

### ABSTRACT

A method based upon simple diffraction theory is described for the calculation of modified paraboloid reflectors to produce from a point source a shaped beam of arbitrary shape in one plane and uniformly narrow in the perpendicular planes. A specific application of the shaped beam antennas is in connection with radar antennas designed for height finding. In this case the antenna must have a sharp elevation beam for obtaining precise elevation information and a rapid elevation scan. The beam must be relatively broad in azimuth in order that the target will be held in the beam long enough to obtain height information. If a fixed minimum of illumination is to be achieved at a given linear distance on both sides of the center line of the azimuth beam, the amplitude pattern must have the so-called "double cosecant" or "beavertail" shape.

The beavertail beam is very easily obtained with a reflector modification. The simplest arrangement is a narrow vertical strip down the middle of the reflector set out from the surface of the main reflector by a fraction of a wavelength. The width of the strip affects the total power that it intercepts and the directivity of its pattern. Its offset from the main reflector establishes the phase relationship for amplitude addition which is

Received November 1951.

important in the region where the two amplitudes are of the same order of magnitude. In the actual case at  $\lambda = 10$  cm, a reflector with 20-ft high by 5-ft wide was fitted with a strip running the long way of the reflector. The optimum width of the strip proved to be 8 in., and the offset, 1/4 in.

The aperture-field method is used for calculating the present antenna pattern. In the azimuth plane it is found that the relation between the intensity  $J_H$  of the wave at a distant point and the azimuth angle  $\theta$  is

$$J_H = A A^* \left[ \frac{\sin^2(15\pi \sin \theta)}{(15\pi \sin \theta)^2} + 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} \left( \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{2\pi \sin \theta} - \frac{\sin(15\sin \theta)}{15\pi \sin \theta} \right) \right],$$

where  $A$  is the amplitude of the wave and  $A^*$  is its complex conjugate. The calculated pattern agrees very well with the experimental results.