

壓 延 理 論*

錢 偉 長 陳 至 達

(清 華 大 學)

一、緒 論

應用於金屬軋的壓延理論必須對下述實驗事實有合理的解釋:

- (1) 輥與材料間的壓力分佈情況[註 1].
- (2) 壓延負荷及外摩擦力的關係[註 2].
- (3) 壓延負荷及輥直徑的關係[註 3].
- (4) 壓延負荷及軋原厚度的關係[註 4].
- (5) 施加前向及後向拉力對壓延負荷降低的關係[註 5].
- (6) 壓延溫度及壓延速度對壓延負荷的影響[註 2, 6].

* 1952 年 8 月 29 日收到.

- [註 1] Siebel, E., and Lueg, W., *Mitt. K. W. Inst. Eisenf.*, 15 (1933), 1-14.
Lueg, W., "Distribution of pressure and flow of material in the surface of material in contact with the rolls", *Stahl u. Eisen*, 53, 6 April, 1933.
- [註 2] Pomp, A., and Lueg, W., "The influence of the rolls, rolling speed and width of strip on the deformation of cold rolled strip", *Mitt. K. W. Inst. Eisenf.*, 17 (1935), 219-30.
- [註 3] Lueg, W., and Pomp, A., "The influence of roll diameter on the cold rolling of strip steel", *Mitt. K. W. Inst. Eisenf.*, 17 (1935), 63-7.
- [註 4] Rudbakh, V. N., and Severdenko, V. P., "Influence of external friction on the deformation of metal in rolling", *CNTIML*, 1936.
- [註 5] Hayes, A., and Burus, R. S., "The cold rolling of mild steel sheet and strip", *Trans. Amer. Soc. of Metals*, 25 (1937), 129.
- [註 6] Pomp, A., and Lueg, W., "Experiments on the rolling of carbon and silicon steels at medium temperature", *Mitt. K. W. Inst. Eisenf.*, 15 (1933), 81-97.

理論方面, Siebel (1924) 對於壓延現象首先着手研究, 他的理論著稱為摩擦峯理論[註 7], 然而因採納過多的簡化假設, 理論壓力分佈情況平均比實驗所得為低。

其後二十多年內, 對於壓延現象仍在尋求着滿意的解釋, 這方面的工作有 von Karmán[註 8], W. Trink[註 9], A. I. Tselikov[註 10] 及 A. Nadai[註 11] 等, 他們對於這一個問題取得進一步的瞭解。

在壓延過程, 因相關因素甚多, 故一般壓延理論包含下列的簡化假設:

- (1) 受壓延的軋沒有橫向擴展。
- (2) 材料中原在一垂直截面者, 在壓延過程中仍在一垂直截面。
- (3) 受壓延的材料為不可壓縮的, 而可用 von Mises-Hencky 的塑性屈服條件。
- (4) 軋和材料常為滑動接觸, 其接觸區內有一中性點而非中性區, 且假設材料與軋之外摩擦係數為常數。
- (5) 軋之彈性變形, 或稱軋之壓平 (flattening) 可忽略不計。
- (6) 受壓延的材料有等向均質性, 且屈服強度變化在壓延過程中不計, 或忽略加工硬化的影響。
- (7) 材料在穩定狀態下通過軋間, 材料流動時的慣性作用不計。

E. Orowan[註 12] 提供一個更完善的理論, 他放棄了原在一垂直截面者在壓延過程中仍為一垂直截面的假設, 並假設軋與材料接觸區存在有中性區。他假定材料在軋間的壓縮狀態基本上與一塑性體在二粗糙平行平板中的壓縮狀態相似, 因

[註 7] Siebel, E., Berichte des Walzwerksausschusses, Verein deutscher Eisenhüttenleute.

[註 8] von Karmán, Th., "The theory of rolling", *Z. ang. Math. u. Mech.*, 5 (1925), 139-41.

[註 9] Trinks, W., "Rolling pressure in hot rolling", *Blast Furnace and Steel Plant*, 25 (1937), 1005-8; "The mechanics of rolling", *Ibid.*, 25, 285.

[註 10] Tselikov, A. I., "Effect of external friction and tension on the pressure of the metal on the rolls in rolling", *Metallurgy*, No. 6, (1939), 61-76.

[註 11] Nadai, A., "The force required for rolling steel strip under tension", *Jo. of Applied Mechanics*, pp. A-54-A62, *Amer. Soc. Mech. Engrs.*, June 1939.

[註 12] Orowan, E., "The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling", *Proc. I. Mech. E.*, 150: 4 (1943), 140-67.

此乃能應用 L. Prandtl 的解答[註 13]。他把棍與材料的整個接觸區分為三區：後向滑動區 (backward slipping region), 貼附區 (sticking region), 前向滑動區 (forward slipping region)。在滑動區內, 外摩擦現象遵守普通的摩擦定律, 當摩擦力超過屈服剪應力時, 則材料與棍並行。

Orowan 的方法和實驗的符合程度較佳, 然而壓力的尖峯仍然存在。且對材料在棍間的流動情況未加闡明。

下面我們提出一個新理論, 基本上假設材料在棍間為塑質黏性流, 而在滑動區和貼附區的相連點, 流量率和水平壓力為連續的。

二、運動方程式

見圖 1, 一原厚度為 h_1 之軋材料經兩軸平行而半徑為 R 之兩圓筒形棍所壓延至終厚度 h_2 。令作用於受壓延材料之一小元上之水平應力為 σ , 剪應力為 τ , 而

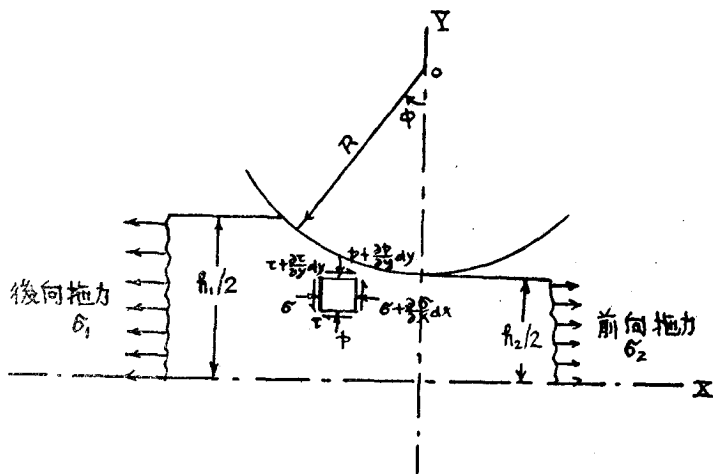


圖 1

垂直方向之應力為 p , 一般言之, σ, τ, p 為 x, y 之函數。今假定材料在棍間為塑質狀態, 應力之關係滿足 von Mises-Hencky 之屈服條件, 即

[註 13] Prandtl, L., *Z. ang. Math. u. Mech.*, 3, 401.

$$(p - \sigma)^2 + 4\tau^2 = K^2, \quad (1)$$

上式中 $K = 1.15 K_0$, K_0 為簡單拉力之屈服強度。再之, 一材料小元 $dx dy$ 在水平方向之應力平衡方程式為

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (2)$$

略去慣性作用的影響。今假設受壓延的鈹為薄的, 則可令 σ 沿厚度不變。

將 (2) 對 y 積分,

$$\tau = \frac{d\sigma}{dx} y + c_1(x), \quad (3)$$

$c_1(x)$ 係積分常數。再假設材料係塑質黏性的, 而在鈹間之運動情況與黏性流體的剪變流相似。如以 η 表黏度係數, u 表流之水平速度, 則

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

將 (4) 代入 (3), 並積分一次, 可得

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{d\sigma}{dx} y^2 + \frac{1}{\eta} c_1(x) y + c_2(x) \quad (5)$$

上式之 $c_2(x)$ 為另一積分常數; $c_1(x), c_2(x)$ 可按邊界條件決定之,

$$u = U(x) \quad \text{在} \quad y = \pm \frac{h(x)}{2}, \quad (6)$$

$U(x)$ 為材料在接觸面附近運動速度之水平成份。由此

$$c_1(x) = 0, \quad c_2(x) = U(x) - \frac{1}{2\eta} \frac{d\sigma}{dx} \frac{h^2}{4}. \quad (7)$$

故

$$u = \frac{1}{2\eta} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\sigma}{dx} + U(x). \quad (8)$$

我們應注意材料假定為不可壓縮的，故單位時間流經任一截面的材料量乃固定；

$$\text{流量率 } Q = \int_{-h/2}^{h/2} u dy = \text{常數}, \quad (9)$$

或

$$Q = -\frac{1}{12\eta} \frac{d\sigma}{dx} h^3 + U(x)h. \quad (10)$$

由(3),(6),(10)可得

$$\frac{d\sigma}{dx} = 12\eta \left(\frac{U(x)}{h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) = 2 \frac{\tau_1}{h}, \quad (11)$$

$$\tau = 12\eta \left(\frac{U(x)}{h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) y, \quad (12)$$

(11) 式之 τ_1 表示在接觸面水平方向之剪應力，

$$\tau_1 = 6\eta \left(\frac{U(x)}{h} - \frac{Q}{h^2} \right). \quad (13)$$

方程式 (11), (12) 對所有 x 值均合用，不論在滑動區或貼附區。取 (11), (12) 式中之 σ, τ 值，則 p_1 可由 (1) 求得。由此法求得之 τ, p, σ 函數只近似地滿足軋厚度小時的運動方程式。

至此， $U(x)$ 及 Q 尚未決定，以後將由接觸面的邊界條件來決定。

值得指出者，在受壓延材料中，有一垂直截面，剪應力為零，其位置可由下式決定

$$h(x)U(x) - Q = 0, \quad (14)$$

在這截面上， σ 按 (11) 為最小，而 p 按 (1) 則為最大。

今如以接觸弧上一點之角座標， ϕ 為獨立變數，則較方便， ϕ 角的量度以連接兩軋之中心線為始線，如此則

$$X = -R \sin \phi, \quad (15)$$

而

$$h(x) = h_2 + 2R(1 - \cos \phi). \quad (16)$$

再之, 我們引用下列參變數:

$$\lambda \equiv \frac{2R}{2R + h_2} \quad (17)$$

$$g \equiv \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{2R}{h_2}, \quad (18)$$

$$l \equiv \frac{\lambda}{1 - \lambda \cos \theta} = \frac{2R}{h_1}, \quad (19)$$

$$\frac{l}{g} \equiv \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda \cos \theta} = \frac{h_2}{h_1} \equiv \text{厚度比率}, \quad (20)$$

$$\beta \equiv \frac{\omega n}{K} \equiv \text{塑質黏性因素}, \quad (21)$$

$$f \equiv \frac{U(\phi) - \omega R}{\omega R} \equiv \text{前向滑動}, \quad (22)$$

$$f_1 \equiv \frac{Q - \omega R h_2}{\omega R h_2} \equiv \text{平均前向滑動}, \quad (23)$$

上書 ω 爲輻之角速度. 由 (23) 及 (17), 可得

$$\frac{Q}{R^2} = 2\omega \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) (1 + f_1) = \frac{2\omega}{g} (1 + f_1). \quad (24)$$

用此等量, (11) 及 (13) 可改寫成無因次形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sigma}{K} \right) &= 3\beta \lambda^2 \cos \phi \left[\frac{(1 - \lambda)(1 + f_1)}{(1 - \lambda \cos \phi)^3} - \frac{U(\phi)}{R\omega} \frac{1}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} \right] \\ &= - \frac{\lambda \cos \phi}{1 - \lambda \cos \phi} \frac{\tau_1}{K} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\tau_1}{K} = 3\beta\lambda \left[\frac{U(\phi)}{R\omega} \frac{1}{1 - \lambda \cos \phi} - \frac{(1 - \lambda)(1 + f_1)}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} \right], \quad (26)$$

又由 (1),

$$\frac{p_1}{K} = \frac{\sigma}{K} + \sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^2} \quad (27)$$

其中開方根號前之符號以壓縮應力取正號為準。

三、前向滑動區

在前向滑動區 $0 \leq \phi \leq \theta_1$ (圖 2), 摩擦力 F 作用於材料面上之方向與壓延方向相反, 而摩擦力與正壓力成正比, 即

$$F = \mu P, \quad (28)$$

μ 為輥面與受壓延材料間之摩擦係數。

表面壓力 P , 摩擦力 F 及接觸面附近材料之內應力的關係可由受壓延的一小元材料在表面附近的力效果平衡條件求得之 (圖 3)。

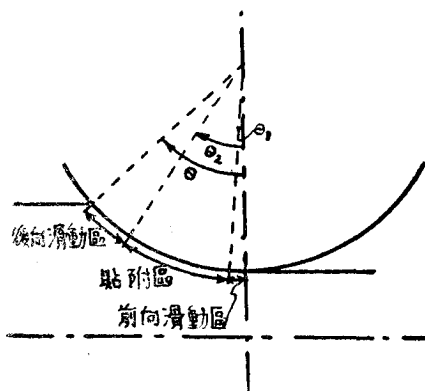


圖 2

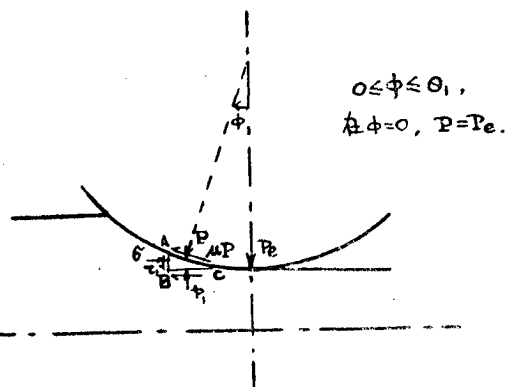


圖 3

一小元材料 ABC 之平衡條件方程式為:

$$\sigma dy - \tau_1 dx - (\mu P \cos \phi - P \sin \phi) ds = 0, \quad (29a)$$

$$p_1 dx - \tau_1 dy + (\mu P \sin \phi - P \cos \phi) ds = 0, \quad (29b)$$

或用下關係
可得

$$dy = ds \sin \phi, \quad dx = ds \cos \phi,$$

$$\sigma \sin \phi - \tau_1 \cos \phi - (\mu \cos \phi + \sin \phi) P = 0, \quad (30a)$$

$$p_1 \cos \phi - \tau_1 \sin \phi + (\mu \sin \phi - \cos \phi) P = 0. \quad (30b)$$

從 (30a, b) 消去 P , 並引用摩擦角 ε , 得

$$(p_1 - \sigma) \cos \phi \sin(\phi + \varepsilon) + \tau_1 \cos(2\phi + \varepsilon) = -\sigma \sin \varepsilon. \quad (31)$$

方程式 (25), (27), (31) 爲決定 $p_1 - \sigma, \tau_1, \sigma$ 之三方程式. 爲簡化問題, 令

$$p_1 - \sigma = K \cos N, \quad 2\tau_1 = K \sin N. \quad (32)$$

如此方程式 (27) 自然滿足. 方程式 (25) 及 (31) 各可寫成下式,

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sigma}{K} \right) = - \frac{\lambda \cos \phi}{2(1 - \lambda \cos \phi)} \sin N, \quad (33a)$$

$$\cos N \cos \phi \sin(\phi + \varepsilon) + \frac{1}{2} \sin N \cos(2\phi + \varepsilon) = - \frac{\sigma}{K} \sin \varepsilon. \quad (33b)$$

在薄板壓延情形, 因嚙入角 θ 常小, 故 ϕ 常爲小值, 我們可以求找 ϕ 之冪級數的答案, 令

$$\cos N = \cos \xi + A_1 \phi + A_2 \phi^2 + \cdots, \quad (34a)$$

$$\sin N = \sin \xi + B_1 \phi + B_2 \phi^2 + \cdots, \quad (34b)$$

$$\frac{\sigma}{K} = C_0 + C_1 \phi + C_2 \phi^2 + \cdots, \quad (34c)$$

上式 ξ, A_n, B_n, C_n 係待定常數. 將 (34a, b, c) 代入 (33a, b), 並使 ϕ 之同冪項相等, 得

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} g \sin \xi, \\ C_2 &= -\frac{1}{4} g B_1, \\ C_3 &= -\frac{1}{6} g B_2 + \frac{1}{12\lambda} g \sin \xi, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

又

$$\left. \begin{aligned} \cos \xi \sin \varepsilon + \frac{1}{2} \sin \xi \cos \varepsilon &= -C_0 \sin \varepsilon, \\ \cos \xi \cos \varepsilon - \sin \xi \sin \varepsilon + A_1 \sin \varepsilon + \frac{1}{2} B_1 \cos \varepsilon &= -C_1 \sin \varepsilon, \\ A_1 \cos \varepsilon + A_2 \sin \varepsilon - B_1 \sin \varepsilon + \frac{1}{2} B_2 \cos \varepsilon &= -C_2 \sin \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

再之，由 $\sin^2 N + \cos^2 N = 1$ 的關係，可得

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cos \xi + B_1 \sin \xi &= 0, \\ 2 A_2 \cos \xi + 2 B_2 \sin \xi + A_1^2 + B_1^2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

從 (35), (36), (37) 等方程式可逐步解出，

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -\cos \xi - \frac{1}{2\mu} \sin \xi, \\ C_1 &= -\frac{1}{2} g \sin \xi, \\ C_2 &= \frac{1}{2} g \cos \xi Y, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

上式中

$$Y = \frac{1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{g}{\lambda}\right) \mu \tan \xi}{1 - 2\mu \tan \xi}, \quad (39)$$

又

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2 \sin \xi Y, \\ A_2 &= \frac{2Y}{\cos \xi (1 - 2\mu \tan \xi)} \left[-Y + 2 \sin^2 \xi + \frac{1}{4} \mu (1 + g) \sin 2\xi \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -2 \cos \xi \cdot Y, \\ B_2 &= \frac{2Y}{\sin \xi (1 - 2\mu \tan \xi)} \left[2\mu \tan \xi \cdot Y - 2 \sin^2 \xi - \frac{1}{4} \mu (1 + g) \sin 2\xi \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ξ 之值可由加於前向端之前拖力決定之。令 σ_2 為在 $\phi = 0$ 處之前拖力，於是

$$\left(\frac{\sigma}{K}\right)_{\phi=0} = -\frac{\sigma_2}{K} = -\cos \xi - \frac{1}{2\mu} \sin \xi, \quad (42)$$

由此

$$\sin \xi = \frac{2\mu}{1 + 4\mu^2} \left[\frac{\sigma_2}{K} - \sqrt{1 + 4\mu^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{K}\right)^2\right)} \right], \quad (43)$$

並且

$$\cos \xi = \frac{1}{1 + 4\mu^2} \left[4\mu^2 \frac{\sigma_2}{K} + \sqrt{1 + 4\mu^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{K}\right)^2\right)} \right], \quad (44)$$

(43) 及 (44) 式開方根項前的符號由當 $\sigma_2 = 0$ 時, τ_1 的符號定之。在材料離出點的壓延正壓力, 按 (32) 及 (34a) 即可知

$$P_s = p_1 = K \cos \xi - \sigma_2,$$

$$P_s = \frac{K}{1 + 4\mu^2} \left[-\frac{\sigma_2}{K} + \sqrt{1 + 4\mu^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{K}\right)^2\right)} \right] \quad (45)$$

我們由此得出結論說在離出點之壓延正壓力只和摩擦係數、前拖力及材料屈服強度有關，而和輓之尺寸及壓延速度無關。

令 $\sigma_2 = 0$ 於 (43)，於是

$$\frac{P_e}{K_0} = \frac{1.15}{\sqrt{1 + 4\mu^2}} \quad (46)$$

此式指明在離出點之壓延正壓力， P_e 隨輓面粗糙程度增加而降低，這一點尚待實驗證明。又由 (45) 式可知， P_e 因前拖力施加而減低。

以下我們將討論當無拖力時的情形 ($\sigma_2 = 0$)，故

$$\sin \xi = -2\mu m, \quad \cos \xi = m, \quad \tan \xi = -2\mu,$$

上式中

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\mu^2}}.$$

據此，(38)，(39)，(40)，(41) 化為

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 0, \\ C_1 &= \mu g m, \\ C_2 &= \frac{1}{2} g m^3 \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

$$Y = m \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \right], \quad (39a)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -4\mu m^3 \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \right] \\ A_2 &= -\frac{2g}{\lambda} m^5 \left\{ \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \right] \left[1 + 2 \left(2 + \frac{g}{\lambda} \right) \mu^2 \right] \right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (40a)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -2m^3 \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right], \\ B_2 &= \mu \frac{\varepsilon}{\lambda} m^5 \left\{ \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right] \left[4\mu^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) + \left(9 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right] \right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (41a)$$

由 (30a) 或由 (30a, b) 消去 μ , 在前向滑動區內, 角座標為 ϕ 一點之壓延正壓力為

$$P_f = \sigma \sin^2 \phi + p_1 \cos^2 \phi - \tau_1 \sin 2\phi. \quad (47)$$

當 ϕ 小時, 利用 (38a), (39a), (40a), (41a), 最後得

$$\frac{P_f}{K} = P_0 + P_1 \phi + P_2 \phi^2 + \dots, \quad (47a)$$

上式中

$$P_0 = m,$$

$$P_1 = \mu m^3 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - 3 \right),$$

$$P_2 = -m + \frac{1}{2} m^5 \frac{\varepsilon}{\lambda} \left\{ \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right] \left[8\mu^3 + \frac{\varepsilon}{\lambda} - 1 \right] \right\}$$

.....

如 $\phi = 0$, (47a) 簡化為 (46),

至於前向滑動區佔據範圍留待後面決定之。

四、後 向 滑 動 區

在這一區開始點, 受壓延的材料首先和輥面接觸。材料之被拖入輥間主要是由輥面作用於材料上的摩擦力。因此在材料剛進入輥間的一區內, 材料對輥面的相對運動言常有一後向滑動, 這一區我們稱之為後向滑動區。在此區, 作用於材

(49), 並使 $\theta - \phi$ 之同幂項在兩邊相等, 待定係數可逐次解得

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= \frac{1}{2} \cot(2\theta - \varepsilon) \sin \eta + \frac{\cos \theta \sin(\theta - \varepsilon)}{\sin(2\theta - \varepsilon)} \cos \eta, \\ C'_1 &= \frac{1}{2} l \cos \theta \sin \eta, \\ C'_2 &= \frac{1}{4} l \cos \theta B'_1 + \frac{1}{4\lambda} l^2 \sin \theta \sin \eta, \\ C'_3 &= \frac{1}{6} l B'_2 \cos \theta + \frac{1}{6\lambda} l^2 B'_1 \sin \theta + \frac{1}{12\lambda} l^2 (2 \sin^2 \theta \cdot l - \cos \theta) \sin \eta \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

並用 $\sin^2 N + \cos^2 N = 1$ 的關係, 解出 A'_n, B'_n 得

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= -2 Y' \sin \eta, \\ A'_2 &= -B'_2 \tan \eta - 2 Y'^2 \sec \eta, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

上式中

$$Y' = \frac{1}{\cos(2\theta - \varepsilon) - 2 \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \tan \eta} \left\{ \left[\frac{1}{2} l \cos \theta \sin \varepsilon - \sin(2\theta - \varepsilon) \right] \tan \eta - \sin \theta \sin(\theta - \varepsilon) \right\},$$

又

$$\left. \begin{aligned} B'_1 &= 2 Y' \cos \eta, \\ B'_2 &= \frac{2}{\cos(2\theta - \varepsilon) - 2 \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \tan \eta} \left\{ (1 - 2 Y') \sin(2\theta - \varepsilon + \eta) \right. \\ &\quad \left. + 2 Y'^2 \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \sec \eta + \frac{1}{4\lambda} l^2 \sin \varepsilon (\sin \theta \sin \eta + \cos \theta \cos \eta Y') \right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

η 值由施於進入端之後拖力決定之, 令 σ_1 為在 $\phi = \theta$ 處之後拖力,

則
$$C'_0 = -\frac{\sigma_1}{K} \quad \text{當} \quad \phi = \theta,$$

故
$$-\frac{\sigma_1}{K} = \frac{1}{\sin \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta - \varepsilon) \sin \eta + \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \cos \eta \right],$$

應用 $\sin^2 \eta + \cos^2 \eta = 1$ 的關係可求出

$$\sin \eta = -2 \frac{\sigma_1}{K} M^2 \cos(2\theta - \varepsilon) \sin \varepsilon - 2 M \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\sigma_1}{K}\right)^2 M^2 \sin^2 \varepsilon} \quad (54a)$$

$$\cos \eta = -4 \frac{\sigma_1}{K} M^2 \cos \theta \sin(\theta - \varepsilon) \sin \varepsilon + M \cos(2\theta - \varepsilon) \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\sigma_1}{K}\right)^2 M^2 \sin^2 \varepsilon} \quad (54b)$$

上式中

$$M^2 = \frac{1}{\cos^2(2\theta - \varepsilon) + 4 \cos^2 \theta \sin^2(\theta - \varepsilon)}.$$

開方根項前的符號乃由 $\sigma_1 = 0$ 時, $p_1 > 0$ 的條件決定之。

以下我們將討論無後拖力時 ($\sigma_1 = 0$) 的情形, 於是

$$\sin \eta = 2 M \cos \theta \sin(\varepsilon - \theta), \quad \cos \eta = M \cos(2\theta - \varepsilon), \quad \tan \eta = \frac{2 \cos \theta \sin(\varepsilon - \theta)}{\cos(2\theta - \varepsilon)}.$$

據此, (51), (50) 及 (51) 化爲

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= 0, \\ C'_1 &= M l \cos \theta \sin(\varepsilon - \theta), \\ C'_2 &= \frac{1}{2} M^3 l \gamma' \cos(2\theta - \varepsilon) + \frac{1}{4 \lambda} M l^2 \sin 2\theta \sin(\varepsilon - \theta), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (51a)$$

上式中

$$\gamma' = -\sin(\varepsilon - \theta) \left[\sin \theta \cos \varepsilon + \cos \theta \sin(2\theta - \varepsilon) - \frac{l}{\lambda} \cos \theta \sin \varepsilon \right],$$

又

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= -4M^3 \gamma' \cos \theta \sin(\varepsilon - \theta), \\ A'_2 &= -4M^3 \cos \theta \cos(2\theta - \varepsilon) \sin \varepsilon \sin(\varepsilon - \theta) \left\{ \left(1 + \frac{l^2 \sin 2\theta \sin(\varepsilon - \theta)}{4\lambda \cos(2\theta - \varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. + M^2 \left[\left(\frac{l^2}{4\lambda} \cos \theta - 2 \right) \gamma' + \frac{\gamma'^2}{2 \cos \theta \sin \varepsilon \sin(\varepsilon - \theta)} \right] \right\} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (52a)$$

且

$$\left. \begin{aligned} B'_1 &= 2M^3 \gamma' \cos(2\theta - \varepsilon) \\ B'_2 &= 2M^3 \sin \varepsilon \cos^2(2\theta - \varepsilon) \left\{ \left(1 + \frac{l^2 \sin 2\theta \sin(\varepsilon - \theta)}{4\lambda \cos(2\theta - \varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. + M^2 \left[\left(\frac{l^2}{4\lambda} \cos \theta - 2 \right) \gamma' - \frac{2 \cos \theta \sin(\varepsilon - \theta)}{\sin \varepsilon \cos^2(2\theta - \varepsilon)} \gamma'^2 \right] \right\} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (53a)$$

在後向滑動區內作用於材料面上之壓延正壓力 P_b 可由 (48a) 求得，或從 (48a, b) 消去 μ 得

$$P_b = \sigma \sin^2 \phi + p_1 \cos^2 \phi - \tau_1 \sin 2\phi. \quad (55)$$

當 $\theta - \phi$ 小時，可將 P_b 展成 $\theta - \phi$ 之冪級數，利用 (52a) (53a) 及 (54a) 得

$$\frac{P_b}{K} = P'_0 + P'_1(\theta - \phi) + P'_2(\theta - \phi)^2 + \dots \quad (55a)$$

上式中

$$P'_0 = M \cos \varepsilon \cos^2 \theta,$$

$$P'_1 = M \cos \theta [2 \cos \theta \sin \varepsilon + l \sin(\varepsilon - \theta)] - 2M^3 \gamma' \cos \theta [\sin(\varepsilon - \theta) + \cos \theta \sin \varepsilon],$$

$$P'_2 = M \left[\sin \varepsilon \sin 2\theta - \cos \varepsilon + \frac{1}{4} l \sin 2\theta \sin(\varepsilon - \theta) \right]$$

$$+ 2M^3 \left[\sin \theta \cos \varepsilon \sin \varepsilon \left(\cos(2\theta - \varepsilon) + \frac{1}{4\lambda} l^2 \sin 2\theta \sin(\varepsilon - \theta) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sin 2\theta \sin \varepsilon - \cos \varepsilon - \frac{1}{4} l \cos \theta \cos (2\theta - \varepsilon) \right) y' - \frac{\cos^2 \theta}{\cos (2\theta - \varepsilon)} y'^2 \Big] \\
& + 2 M^5 y' \cos \varepsilon \sin \theta \cos (2\theta - \varepsilon) \left(\frac{1}{4\lambda} l^2 \sin \varepsilon \cos \theta - 2 \sin \varepsilon - \frac{2 \cos \theta \sin (\varepsilon - \theta)}{\cos^2 (2\theta - \varepsilon)} y'^2 \right), \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

在 $\phi = \theta$,

$$\frac{P_i}{K_0} = \frac{1.15 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - 4\mu \cos \theta \sin \theta + 4\mu^2 \cos^2 \theta}} \quad (56)$$

若 $\sigma_1 \neq 0$, 也不難求知 P_i/K_0 將比 (56) 式之同一 θ 及 μ 值為低。

在離出點及進入點的壓延正壓力 P_e, P_i 對摩擦係數及嚙入角之關係如圖 5, 圖 6 所示。

至於後向滑動區的佔據範圍留待後面決定。

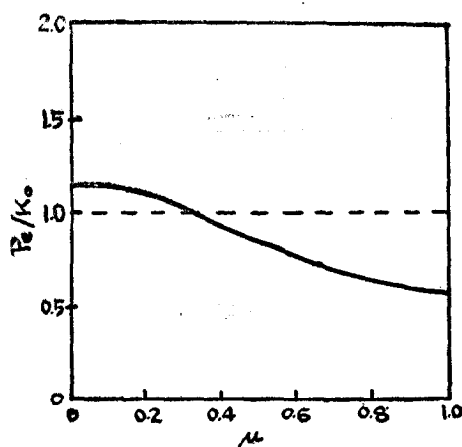


圖 5

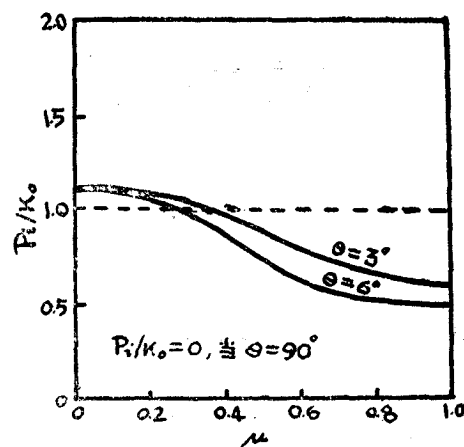


圖 6

五、貼附區

在貼附區內, 材料與棍接觸面間無相對運動, 在此區內壓延正壓力最大, 而材料在接觸面附近水平速度為

$$U(\phi) = R \omega \cos \phi,$$

將此值代入 (25), 得

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sigma}{K} \right) = 3\beta\lambda^2 \cos \phi \left[\frac{(1-\lambda)(1+f_1)}{(1-\lambda \cos \phi)^3} - \frac{\cos \phi}{(1-\lambda \cos \phi)^2} \right],$$

因此

$$\frac{\sigma}{K} = 3\beta\lambda^2 \left[(1-\lambda)(1+f_1) \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{(1-\lambda \cos \phi)^3} - \int_0^\phi \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1-\lambda \cos \phi)^2} \right] + C_i, \quad (57)$$

上式中 C_i 為積分常數.

(57) 式中之積分可計出如下:

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{(1-\lambda \cos \phi)^3} &= \frac{\sin \phi}{2(1-\lambda^2)(1-\lambda \cos \phi)^2} + \frac{(1+2\lambda^2)\sin \phi}{2(1-\lambda^2)^2(1-\lambda \cos \phi)} \\ &+ \frac{3\lambda}{(1-\lambda^2)^{5/2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \tan \frac{1}{2} \phi \right], \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1-\lambda \cos \phi)^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \phi + \frac{\sin \phi}{\lambda(1-\lambda^2)(1-\lambda \cos \phi)} \\ &+ \frac{2(2\lambda^2-1)}{\lambda^3(1-\lambda^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \tan \frac{1}{2} \phi \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

由此等積分, (57) 乃可寫為

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{K} &= 3\beta\lambda \left\{ \left[\frac{\sin \phi}{2(1-\lambda \cos \phi)^2} \left(\frac{1+f_1}{1+\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \phi \right] \right. \\ &+ \frac{\sin \phi}{(1-\lambda^2)(1-\lambda \cos \phi)} \left[\frac{1+2\lambda^2}{1} \left(\frac{1+f_1}{1+\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right] \\ &\left. + \frac{1}{(1-\lambda^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \tan \frac{\phi}{2} \right) \left[3\lambda \left(\frac{1+f_1}{1+\lambda} \right) - 2 \left(2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] \right\} + C_i, \quad (60) \end{aligned}$$

再之; 由 (26),

$$\frac{\tau_1}{K} = 3\beta\lambda \left[\frac{\cos\phi}{1-\lambda\cos\phi} - \frac{(1-\lambda)(1+f_1)}{(1-\lambda\cos\phi)^2} \right]. \quad (61)$$

方程式 (60) 及 (61) 包含二未知量 C_i 及 f_1 , 須由 $\phi = \theta_1$ 及 $\phi = \theta_2$ 位置之邊界條件決定之。為此目的, 最好將 σ/K , τ_1/K 展開成 ϕ 或 $(\theta - \phi)$ 之冪級數。

對於 σ/K , 還是直接由 (57) 式開始較為方便, 將 (57) 之被積函數展成 Taylor 級數, 然後逐項積分, 則得

$$\int_0^\phi \frac{\cos\phi d\phi}{(1-\lambda\cos\phi)^3} = \frac{1}{(1-\lambda)^3} \phi - \frac{1+2\lambda}{6(1-\lambda)^4} \phi^3 + \dots, \quad (62)$$

$$\int_0^\phi \frac{\cos^2\phi d\phi}{(1-\lambda\cos\phi)^2} = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \phi - \frac{1+\lambda}{6(1-\lambda)^3} \phi^3 + \dots \quad (63)$$

因之,

$$\frac{\sigma}{K} = C_0 + C_0'' + C_1''\phi + C_2''\phi^2 + \dots, \quad (64)$$

上式中

$$C_0'' = 0,$$

$$C_1'' = 3\beta g^2 f_1,$$

$$C_2'' = 0,$$

$$C_3'' = -\frac{\beta g^3}{2\lambda} [(1+2\lambda)f_1 + 2\lambda - 1],$$

.....

又

$$\frac{\cos\phi}{1-\lambda\cos\phi} = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{2(1-\lambda)^2} \phi^2 + \dots, \quad (65)$$

$$\frac{1}{(1-\lambda\cos\phi)^2} = \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1-\lambda)^3} \phi^2 + \dots, \quad (66)$$

因之

$$\frac{v_1}{K} = B_0'' + B_1'' \phi + B_2'' \phi^2 + \dots, \quad (67)$$

上式中

$$B_0'' = -3\beta g f_1,$$

$$B_1'' = 0,$$

$$B_2'' = \frac{3\beta g^2}{2\lambda} (2\lambda f_1 + 2\lambda - 1),$$

.....

(62) 及 (63) 經一變數變換後可改寫為

$$\int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^3} = \int_0^\theta \frac{\cos \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^3} - \int_0^{\theta-\phi} \frac{\cos(\theta-t) dt}{[1 - \lambda \cos(\theta-t)]^3}, \quad (68)$$

$$\int_0^\phi \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} - \int_0^{\theta-\phi} \frac{\cos^2(\theta-t) dt}{[1 - \lambda \cos(\theta-t)]^2}, \quad (69)$$

(68) 及 (69) 兩式中右邊第一個積分已由 (58) 及 (59) 給定,

$$\begin{aligned} \gamma_\theta = \int_0^\theta \frac{\cos \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^3} &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \lambda^2)(1 - \lambda \cos \theta)^2} + \frac{(1 + 2\lambda^2) \sin \theta}{2(1 - \lambda^2)^2(1 - \lambda \cos \theta)} \\ &+ \frac{3\lambda}{(1 - \lambda^2)^{5/2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} \tan \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_\theta = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \theta + \frac{\sin \theta}{\lambda(1 - \lambda^2)(1 - \lambda \cos \theta)} \\ &+ \frac{2(2\lambda^2 - 1)}{\lambda^3(1 - \lambda^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} \tan \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

將 (68) 及 (69) 兩式中右邊的第二個積分內的被積函數展成 t 之 Taylor 級數，然後逐項積分，得

$$\int_0^{\theta-\phi} \frac{\cos(\theta-t) dt}{[1-\lambda \cos(\theta-t)]^3} = \frac{\cos \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^3} (\theta-\phi) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^3} + \frac{3\lambda \sin 2\theta}{2(1-\lambda \cos \theta)^4} \right] (\theta-\phi)^2 + \dots, \quad (72)$$

$$\int_0^{\theta-\phi} \frac{\cos^2(\theta-t) dt}{[1-\lambda \cos(\theta-t)]^2} = \frac{\cos^2 \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^2} (\theta-\phi) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^2} + \frac{\lambda \sin 2\theta \cos \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^3} \right] (\theta-\phi)^2 + \dots. \quad (73)$$

因此，在貼附區內， σ/K 又可以 $(\theta-\phi)$ 之冪級數表示之：

$$\frac{\bar{\sigma}}{K} = C_0 + \bar{C}_0'' + \bar{C}_1''(\theta-\phi) + \bar{C}_2''(\theta-\phi)^2 + \dots \quad (74)$$

上式中

$$\bar{C}_0'' = 3\beta\lambda \left[\frac{\lambda}{g} (1+f_1)\gamma_\theta - \gamma'_\theta \right],$$

$$\bar{C}_1'' = 3\beta l^2 \cos \theta \left[\cos \theta - \frac{l}{g} (1+f_1) \right],$$

$$\bar{C}_2'' = \frac{3\beta l^3}{2\lambda} \left[\sin 2\theta - \frac{l}{g} (1+f_1) (\sin \theta + \lambda \sin 2\theta) \right],$$

.....

再之，

$$\frac{\cos \phi}{1-\lambda \cos \phi} = \frac{\cos \theta}{1-\lambda \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^2} (\theta-\phi) - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \theta}{1-\lambda \cos \theta} + \frac{\lambda(1-3\sin^2 \theta)}{(1-\lambda \cos \theta)^2} - \frac{2\lambda^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{(1-\lambda \cos \theta)^3} \right] (\theta-\phi)^2 + \dots, \quad (75)$$

$$\frac{1}{(1 - \lambda \cos \phi)^2} = \frac{1}{(1 - \lambda \cos \theta)^2} + \frac{2\lambda \sin \theta}{(1 - \lambda \cos \theta)^3} (\theta - \phi) \\ - \left[\frac{\lambda \cos \theta}{(1 - \lambda \cos \theta)^3} - \frac{3\lambda^2 \sin^2 \theta}{(1 - \lambda \cos \theta)^4} \right] (\theta - \phi)^2 + \dots \quad (76)$$

因此在貼附區內, τ_1/K 又可以 $(\theta - \phi)$ 之冪級數表示之:

$$\frac{\tau_1}{K} = \bar{B}_0'' + \bar{B}_1''(\theta - \phi) + \bar{B}_2''(\theta - \phi)^2 + \dots, \quad (77)$$

上式中

$$\bar{B}_0'' = 3\beta l \left[\cos \theta - \frac{l}{g}(1 + f_1) \right],$$

$$\bar{B}_1'' = \frac{3\beta l^2}{\lambda} \sin \theta \left[1 - 2\frac{l}{g}\lambda(1 + f_1) \right],$$

$$\bar{B}_2'' = \frac{3\beta l^3}{\lambda^2} \left[\frac{1}{2}(\lambda + \lambda \sin^2 \theta - \cos \theta) - \frac{l}{g}\lambda(1 + f_1)(\lambda + 2\lambda \sin^2 \theta - \cos \theta) \right],$$

.....

而由在貼附區內與材料接觸面之一邊界小元材料之平衡條件可知

$$P_s = \sigma \sin^2 \phi + p_1 \cos^2 \phi - \tau_1 \sin 2\phi. \quad (78)$$

這一關係與由 (29a, b) 或 (48a, b) 消去 μ 後所得者相同。

又按 $\frac{P_1 - \sigma}{K} = \sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^2}$, 故在貼附區之壓延正壓力 P_s 乃為

$$\frac{P_s}{K} = \frac{\sigma}{K} - \frac{\tau_1}{K} \sin 2\phi + \sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^2} \cos^2 \phi. \quad (79)$$

再之, 利用以下關係

$$\sqrt{1 - 4\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^2} = 1 - 2\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^4 - 4\left(\frac{\tau_1}{K}\right)^6 - \dots,$$

並用 (64) 及 (67) 的表示式, P_s/K 在 $\phi = 0$ 附近之值可以 ϕ 之冪級數表之:

$$\frac{P_s}{K} = C_i + P_0'' + P_1''\phi + P_2''\phi^2 + \dots, \quad (80)$$

上式中

$$P_0'' = 1 - 18(\beta g f_1)^2 - 162(\beta g f_1)^4 - \dots,$$

$$P_1'' = 3\beta g f_1 \left(1 + \frac{g}{\lambda}\right),$$

$$P_2'' = -P_0'' + 18\frac{\beta^2 g^3 f_1}{\lambda} [2\lambda(1+f_1) - 1] + 324\frac{\beta^4 g^5 f_1^3}{\lambda} [2\lambda(1+f_1) - 1]$$

— ...,

$$P_3'' = -4\beta g f_1 - \frac{3\beta g^2}{\lambda} [2\lambda(1+f_1) - 1] - \frac{\beta g^3}{2\lambda} [f_1 + 2\lambda(1+f_1) - 1],$$

.....

在上列係數內, 尚包含有二未知量 C_i 及 f_1 , 這二未知量和貼附區佔據範圍將在下節一併決定。

當貼附區不太小時, 對於 ϕ 之大值, (80) 式收斂較慢, 我們可以將 P_s/K 在 $\phi = \theta$ 附近之值表成 $\theta - \phi$ 之冪級數, 因之

$$\frac{\bar{P}_s}{K} = C_i + \bar{P}_0'' + \bar{P}_1''(\theta - \phi) + \bar{P}_2''(\theta - \phi)^2 + \dots, \quad (81)$$

上式中

$$\bar{P}_0'' = C_i + \bar{C}_0'' + \bar{B}_0'' \sin 2\theta + S_0 \cos^2 \theta,$$

$$\bar{P}_1'' = \bar{C}_1'' + \bar{B}_1'' \sin 2\theta - 2\bar{B}_0'' \cos 2\theta + S_0 \sin 2\theta + S_1 \cos^2 \theta,$$

$$\bar{P}_2'' = \bar{C}_2'' - 2\bar{B}_0'' \sin 2\theta - 2\bar{B}_1'' \cos 2\theta + \bar{B}_2'' \sin 2\theta + S_2 \cos^2 \theta$$

$$+ S_1 \sin 2\theta - S_0 \cos 2\theta,$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_3'' &= \bar{C}_3'' + \frac{4}{3} \bar{B}_0'' \cos 2\theta - 2 \bar{B}_1'' \sin 2\theta - 2 \bar{B}_2'' \cos 2\theta + \bar{B}_3'' \sin 2\theta \\ &+ S_3 \cos^2 \theta + S_2 \sin 2\theta - S_1 \cos 2\theta - \frac{2}{3} S_0 \sin 2\theta, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

上式中 $S_0, S_1, S_2 \dots$ 各為

$$\begin{aligned}S_0 &= 1 - 2 \bar{B}_0''^2 - 2 \bar{B}_0''^4 - 4 \bar{B}_0''^6 - \dots, \\ S_1 &= -4 \bar{B}_0'' \bar{B}_1'' - 8 \bar{B}_0''^3 \bar{B}_1'' - \dots, \\ S_2 &= -4 \bar{B}_0'' \bar{B}_2'' - 2 \bar{B}_1''^2 - 8 \bar{B}_0''^2 \bar{B}_1''^2 - 8 \bar{B}_0''^3 \bar{B}_2'' - 4 \bar{B}_0''^2 \bar{B}_1''^2 - \dots, \\ S_3 &= -4 \bar{B}_0'' \bar{B}_3'' - 4 \bar{B}_1'' \bar{B}_2'' - 8 \bar{B}_0''^2 \bar{B}_1'' \bar{B}_2'' - 8 \bar{B}_0'' \bar{B}_1''^3 - 8 \bar{B}_0''^3 \bar{B}_3'' \\ &- 8 \bar{B}_0''^2 \bar{B}_1'' \bar{B}_2'' - \dots,\end{aligned}$$

$\bar{C}_n'', \bar{B}_n''$ 均由 (74), (77) 給定.

六、各區佔據範圍的決定

以上的討論使我們能決定在各區內壓延正壓力的分佈情況, 但直到現在我們尚未決定各區佔據範圍的大小, 以下將由各區連續點的邊界條件來決定.

在貼附區與滑動區的連續點, σ 及 τ_1 應是連續的, 由 (25) 及 (26) 式看出, τ_1 的連續也即表明材料在表面水平速度 $U(\phi)$, 和 σ/K 對 ϕ 的導微函數是連續的. 這個連續條件同時由 (27) 式可知保證 p_1 為連續的. 根據我們的結果, 在貼附區內壓力尖峯已不存在, 壓力分佈成為一連續曲線; 與實驗事實更為接近, 因壓力對 ϕ 之變化率也為連續的.

連續點的邊界條件決定了四個方程式:

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } \phi = \theta_1; \quad \sigma_s &= \sigma_f, \quad \tau_{1s} = \tau_{1f}. \\ \text{在 } \phi = \theta_2; \quad \sigma_s &= \sigma_b, \quad \tau_{1s} = \tau_{1b}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

上式足號 s, f, b 各表貼附區, 前滑動區, 後滑動區. 這四個方程式够使我們定出四個未知量 $f_1, C_i, \theta_1, \theta_2$.

由前各節的結果, 可知在前滑動區 $\frac{\sigma_f}{K} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi^n$, 係數 C_n 由 (58a) 給定, 而 $\frac{\tau_{1f}}{K} = \frac{1}{2} \left(\sin \xi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi^n \right)$, 係數 B_n 由 (41a) 給定. 在後滑動區 $\frac{\sigma_b}{K} = \sum C'_n (\theta - \phi)^n$, 係數 C'_n 由 (51a) 給定. 而 $\frac{\tau_{1b}}{K} = \frac{1}{2} \left(\sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n (\theta - \phi)^n \right)$, 係數 B'_n 由 (53a) 給定. 在貼附區, 有二種形式的級數展開, 一為以 ϕ 為變數, 另一為以 $(\theta - \phi)$ 為變數的級數. 在貼附區與前滑動區的連接點, 我們用 (64) 之 $\frac{\sigma_s}{K} = C_i + \sum_{n=1}^{\infty} C''_n \phi^n$ 之形式及 (67) 之 $\frac{\tau_{1s}}{K} = \sum_{n=1}^{\infty} B''_n \phi^n$ 之形式, 在貼附區與後滑動區的連接點, 用 (74) 之 $\frac{\bar{\sigma}_s}{K} = C_i + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}''_n (\theta - \phi)^n$ 及 (77) 之 $\frac{\tau_{1s}}{K} = \sum \bar{B}''_n (\theta - \phi)^n$ 之形式.

經略去高次項, 方程式 (82) 可寫出為:

$$\begin{aligned} C_i + 3\beta g^2 f_1 \theta_1 - \frac{\beta g^3}{2\lambda} [(1+2\lambda)f_1 + 2\lambda - 1] \theta_1^3 \\ = \mu g m \theta_1 + \frac{g m^3}{2} \left[1 + \mu^2 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \right] \theta_1^3, \end{aligned} \quad (83a)$$

$$\begin{aligned} -3\beta g f_1 + \frac{3\beta g^2}{2\lambda} (2\lambda f_1 + 2\lambda - 1) \theta_1^2 = -\mu m - m^3 \left[1 + \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \mu^2 \right] \theta_1 \\ + \frac{\mu g m^5}{2\lambda} \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \mu^2 \right] \left[4 \left(1 + \frac{g}{\lambda} \right) \mu^2 + \left(9 - \frac{g}{\lambda} \right) \right] \right\} \theta_1^3, \end{aligned} \quad (83b)$$

$$\begin{aligned} C_i + 3\beta \lambda^2 \left[\frac{\lambda}{g} (1 + f_1) \gamma_\theta - \gamma'_\theta \right] + 3\beta l^2 \cos \theta \left[\cos \theta - \frac{l}{g} (1 + f_1) \right] (\theta - \theta_2) \\ + \frac{3\beta l^3}{2\lambda} \left[\sin 2\theta - \frac{l}{g} (1 + f_1) (\sin \theta + \lambda \sin 2\theta) \right] (\theta - \theta_2)^2 \\ = M l \cos \theta \sin (\varepsilon - \theta) (\theta - \theta_2) \\ + \frac{M l}{2} \left[\frac{l}{2\lambda} \sin 2\theta \sin (\varepsilon - \theta) + M^2 \cos (2\theta - \varepsilon) \gamma' \right] (\theta - \theta_2)^2, \end{aligned} \quad (83c)$$

$$\begin{aligned}
& 3\beta l \left[\cos \theta - \frac{l}{g} (1 + f_1) \right] + \frac{3\beta l^2}{\lambda} \sin \theta \left[1 - 2 \frac{l}{g} \lambda (1 + f_1) \right] (\theta - \theta_2) \\
& + \frac{3\beta l^3}{\lambda^2} \left[\frac{1}{2} (\lambda + \lambda \sin^2 \theta - \cos \theta) - \frac{l}{g} \lambda (1 + f_1) (\lambda + 2\lambda \sin^2 \theta - \cos \theta) \right] (\theta - \theta_2)^2 \\
& = M \cos \theta \sin (\varepsilon - \theta) + M^3 \gamma' \cos (2\theta - \varepsilon) (\theta - \theta_2) \\
& + 2M^3 \cos^2 (2\theta - \varepsilon) \sin \varepsilon \left\{ \left(1 + \frac{l^2}{4\lambda} \frac{\sin 2\theta \sin (\varepsilon - \theta)}{\cos (2\theta - \varepsilon)} \right) - 2M^2 \left[\left(1 - \frac{l^2}{8\lambda} \cos \theta \right) \gamma' \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\cos \theta \sin (\varepsilon - \theta)}{\sin \varepsilon \cos^2 (2\theta - \varepsilon)} \gamma'^2 \right] \right\} (\theta - \theta_2)^2, \quad (83d)
\end{aligned}$$

在 (83c) 及 (83d) 中

$$\gamma' = \sin (\varepsilon - \theta) \left[\frac{l}{\lambda} \cos \theta \sin \varepsilon - \sin \theta \cos \varepsilon - \cos \theta \sin (2\theta - \varepsilon) \right].$$

以上四個方程式的解, 不但複雜而且困難, 今求其近似解. 重回至 (10) 式, 我們已知流量

$$Q = -\frac{1}{12\eta} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)_{x=0} h_2^3 + U(0) h_2. \quad (84)$$

將之代入 (23), 按照定義乃有

$$f_1 = \frac{Q - \omega R h_2}{\omega R h_2} = \frac{U(0) - \omega R}{\omega R} - \frac{1}{12} \left(\frac{K}{\omega \eta} \right) \frac{h_2^3}{R} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma}{K} \right)_{x=0}.$$

而 $\frac{U(0) - \omega R}{\omega R} \equiv f, \quad \frac{\omega \eta}{K} \equiv \beta,$

且 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma}{K} \right)_{x=0} = -\frac{1}{R} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sigma}{K} \right)_{\phi=0} = -\frac{\lambda \mu}{R(1-\lambda)\sqrt{1+4\mu^2}} = -\frac{1}{R} g \mu m,$

故 $f_1 = f + \frac{g \mu m}{12\beta} \left(\frac{h_2}{R} \right)^2.$

再引用以下表示式 $h_2/2R = 1/g$, 最後得

$$f_1 = f + \frac{\mu m}{3\beta g}. \quad (85)$$

(85) 式提示了我們一個測定前滑動的方法, 但是實際的實驗我們並未進行. 根據已有的實驗證據, 前滑動 f 的數值的量級常比 (85) 右邊第二項為小甚. 所以 f_1 的第一次近似可以下值表之:

$$f_{1(1)} = \frac{\mu m}{3\beta g}. \quad (86)$$

由 (83b) 看出, 因 (86) 之近似, 故有

$$(\theta_1)_1 = 0, \quad (87)$$

因若在 (83b) 式令 $\theta_1 = 0$, 則得 (86) 之關係. 在實際情形, f 之值常小於 1.0%, 故當計算壓延正壓力時, 可忽略前滑動區不計而無誤差.

再從 (86a), 因 $(\theta_1)_1 = 0$, 故有

$$C_l = 0. \quad (88)$$

如以字母 m' 代 μm , 則

$$f_{1(1)} = \frac{m'}{3\beta g}. \quad (89)$$

以 (89) 式之 $f_{1(1)}$ 代入 (83d), 可求得 $\theta - \theta_2$ 的近似值. 略棄 (83d) 等式兩邊的 $\theta - \theta_2$ 的二次項, 此近似法相當於將二次曲線以在 $\phi = \theta$ 的二個一次曲線近似之並求其交點, 結果為

$$\begin{aligned} (\theta - \theta_2)_1 = & \left\{ 3\beta l \left(\cos \theta - \frac{l}{g} \right) - \left(\frac{l}{g} \right)^2 m' - M \cos \theta \sin (\varepsilon - \theta) \right\} \div \\ & \left\{ M^3 \cos (2\theta - \varepsilon) \sin (\varepsilon - \theta) \left[\frac{l}{k} \cos \theta \sin \varepsilon - \sin \theta \cos \varepsilon - \cos \theta \sin (2\theta - \varepsilon) \right] \right. \\ & \left. + 2l \left(\frac{l}{g} \right)^2 m' \sin \theta - 3\beta \sin \theta \frac{l^2}{k} \left(1 - 2l \frac{l}{g} \right) \right\}. \quad (90) \end{aligned}$$

上式中

$$\cos \theta = 1 - \frac{h_1 - h_2}{2R}.$$

在公式 (90), 除參變數 β 外, m' 及 M 爲二個與摩擦係數有關的因子. 按照 (90), 我們可以知道如摩擦係數增加, m', M 增大, $(\theta - \theta_2)$ 將減小, 即若除觀表面狀態以外之其他因素均固定, 則觀表面愈粗糙, 後滑動區愈小, 反之則愈大. 再之, β 與觀之角速度 ω 成正比例, 如 ω 愈大, 一般言之, $(\theta - \theta_2)$ 也愈大.

公式 (87), (88), (90) 對於小嚙入角 θ 是準確的.

第二次近似可令

$$f_{1(2)} = Af + \frac{m'}{3\beta g},$$

代入 (83c) 並用 $C_2 = 0$, 及 $\theta - \theta_2 = (\theta - \theta_2)$, 之值, 如此求得之 Af 係前滑動 f 之第一近似值. 其他詳細的計算因過於繁雜, 只有在實際數目計算時方便於逐步求出, 故在本文從略.

七、 β 的物理意義

塑質黏性因素 β 係壓延剪變流的特徵數 (characteristic number), 今在方程式 (4) $\tau = \eta \partial u / \partial y$, 引入下列無因次量:

$$z = \frac{y}{h_2/2}, \quad \Omega = \frac{u}{R\omega}, \quad \chi = \frac{\tau}{K},$$

則可有

$$\beta = \frac{\omega \eta}{K} = \frac{h_2 \chi}{2R} \bigg/ \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (91)$$

此式在估計 β 值之量級時很有幫助, 因爲我們並沒有任何實驗進行以直接測定 β 值. 在 (91) 式

$h_2/2R$ —— 取決於壓延機的幾何條件,

χ —— 取決於金屬材料之強度性質,

$\partial \Omega / \partial z$ —— 取決於觀之速度和流量.

如 $h_2/2R$ 已知, χ 之值已定, $\partial\Omega/\partial z$ 估計之, 按實際情況 $\partial\Omega/\partial z \sim 1$, 則 β 之量級乃可決定.

八、結果的應用並與實驗正壓力分佈曲線的比較

我們所選擇以作比較目的之實驗為二個 Siebel 與 Lueg 的實驗 (1933)[註 1], 同一實驗曲線並曾為 Orowan 利用以核對他的方法. 實驗數據如下:

材 料	光面軋 軋化鋁板 (annealed aluminium)	粗面軋
原厚度 h_1 mm.	2.0	2.0
終厚度 h_2 mm.	1.0	1.1
軋直徑 $2R$ mm.	180	180
嚙入角 (接觸角) θ	$6^\circ 5'$	$5^\circ 40'$

(A) 光面軋

i) Siebel 與 Lueg 未測定壓延的外摩擦係數. Orowan 假定光面軋的 $\mu = 0.14$, 粗面軋的 $\mu = 0.4$ 以使理論曲線和實驗曲線取得最佳的重合. 這裏我們定出光面軋的 $\mu = 0.2$, 此值係由在離出點之二方程式

$$\left(\frac{P_f}{K}\right)_{\varphi=0} = m, \quad (S-1)$$

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{P_f}{K}\right)_{\varphi=0} = \mu m^3 \left(\frac{g}{\lambda} - 3\right) \quad (S-2)$$

消去 K 解出 μ 而得, K 暫時看作常數. $(P_f)_{\varphi=0}$, $\frac{d}{d\phi}(P_f)_{\varphi=0}$ 之值從實驗曲線量取. 求 μ 之法也可以同樣應用於進入點 $\varphi = \theta$, 但因在該點曲線的斜率不易定, 如此求得之 μ 值較不可靠. 值得指出者即如此求得的摩擦係數值與材料強度無關.

ii) β 之量級按 (91) 估計之, 經試定 $\beta = 1.80 \times 10^{-3}$ 使得理論壓力最大點與實驗點相合最佳.

iii) 在壓延狀態下, 材料的屈服強度已知比同材料在簡單壓力試驗下的屈服強度為高.

前所用之屈服條件是 (1) 式. 如將 K 看作一參變數, 則 (1) 式可寫成一族橢圓方程式的形式

$$\frac{(p - \sigma)^2}{K^2} + \frac{\tau^2}{(K/2)^2} = 1. \quad (S-3)$$

在實際壓延情形, 我們應該校正工作硬化和應變的不均勻狀態, 一般言之 $K = K(q, y)$ 隨截面位置及同一截面位置的各點高度而變, 也即是 (S-3) 的橢圓主軸長度在受壓延材料內各點不同.

由 (12) 式

$$\tau = 12 \eta \left(\frac{U(x)}{h^3} - \frac{Q}{h^3} \right) y,$$

可見 τ 隨 y 單調增加. 當 $y = 0$, $\tau = 0$, 於是 $(p - \sigma)/K = 1$, 而在壓延材料對稱的中間平面, σ 常為正, 故在中間平面 $p/K \geq 1$. p/K 之值在任一截面上各點不同, 其平均值可大於與輥面接觸材料所受之 p/K 值. 且因各點的變形程度不同, 加工硬化的程度也不同.

為校正壓延狀態下的材料屈服強度, 我們簡單地令

$$K'_0 = \alpha K_0, \quad (S-4)$$

K'_0 為校正屈服強度, α 為校正因素, α 可由以下關係定之:

$$\left(\frac{P_f}{1.15 K'_0} \right)_{q=0} = \left(\frac{P_f}{1.15 \alpha K_0} \right)_{q=0} = m, \quad (S-5)$$

$(P_f)_{q=0}$ 取自實驗數值, K_0 係按 Siebel 與 Pomp 所作同一種材料的壓力實驗 (1927)^[註 14] 決定之, μ 由 ii) 給定. 對於光面輥的實驗,

$$\alpha = 1.44, \quad \text{故} \quad K' = 1.15 \times 1.44 K_0 = 1.66 K_0.$$

[註 14] Siebel, E., and Pomp, A., Mitt. K. W. Inst. Eisenf., 9 (1927), 157,

校正後之值繪於圖 7。

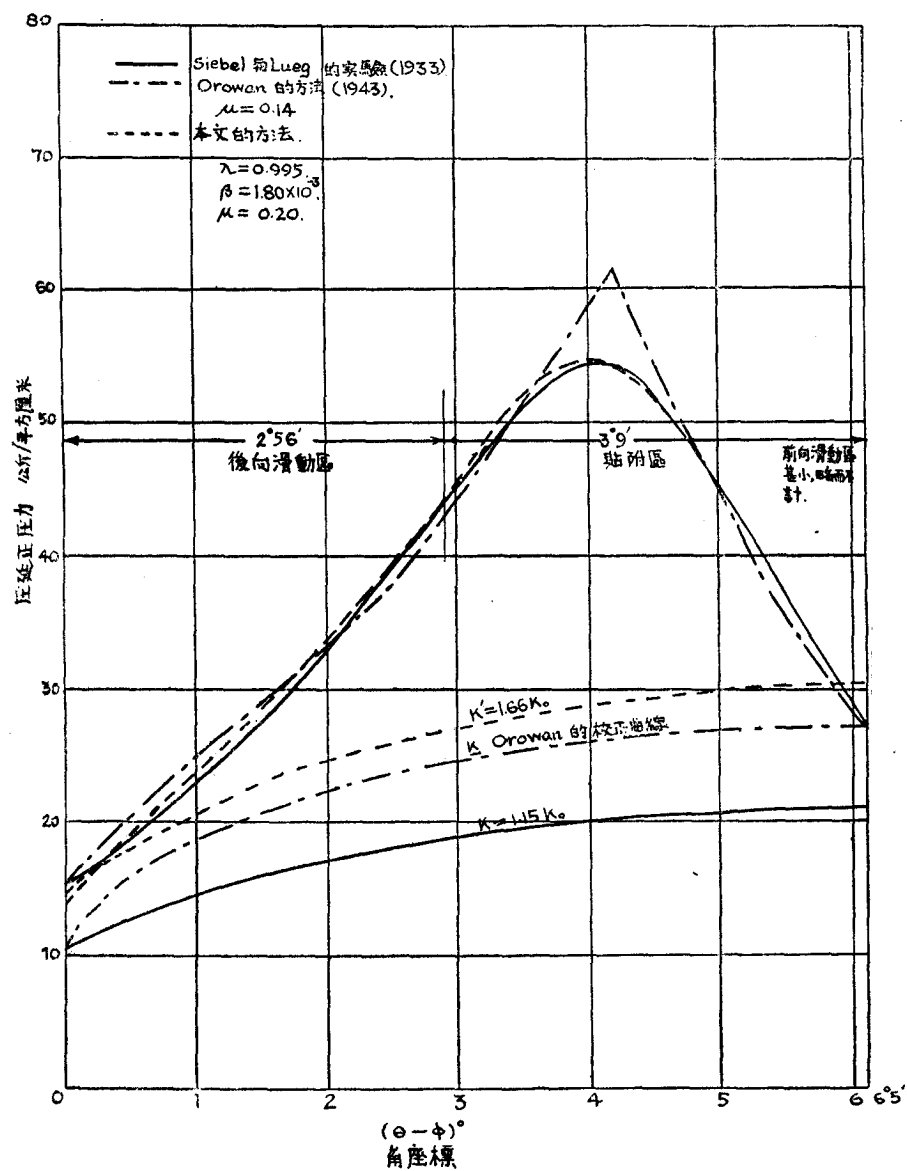


圖 7

無論如何，以上的校正法只是近似的 對於壓延狀態下的材料屈服強度問題 有需要更深入一步研究。

iv) 數值計算結果如下：

第一次近似值，

$$C_i = 0, \quad \theta_1 = 0.$$

由 (86), $f_{1(1)} = 0.191$.

由 (90), $(\theta - \theta_2)_1 = 0.0512$ 弧度或 $2^{\circ}56'$.

在後滑動區及貼附區的壓延正壓力 (略棄高次小項) 為:

$$\text{按 (55), } \frac{P_b}{K} = 0.970 + 8.00(\theta - \phi) + 104(\theta - \phi)^2, \quad 0.106 \geq \phi \geq 0.0550.$$

$$\text{按 (80), } \frac{P_s}{K} = 0.923 + 35.1\phi + 102\phi^2 - 9240\phi^3, \quad 0.0550 \geq \phi \geq 0.$$

由此等結果描得的曲線如圖 7 所示。總負荷之誤差為 $+1.1\%$ 。

(B) 粗面輥

i) 若根據 (A) ii) 的方法，假設前滑動區存在而由之決定 μ ，則不能得到實數根答案，表明在粗面輥情形，前滑動區不存在，因此可令 $f = 0$, $\theta_1 = 0$ ，故貼附區將從後滑動區的末點擴展至離出點。

按 (80)，在 $\phi = 0$ 點

$$\left(\frac{P_s}{K}\right)_{\phi=0} = 1 - 18(\beta g f_1)^2 - 162(\beta g f_1)^4, \quad (S-6)$$

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{P_s}{K}\right)_{\phi=0} = 3\beta g \left(1 + \frac{g}{\lambda}\right) f_1. \quad (S-7)$$

視 K 為常數， $(P_s)_{\phi=0}$ 及 $\left(\frac{\alpha P_s}{d\phi}\right)_{\phi=0}$ 之值由實驗曲線量得，消去 K 後得一 μ 之二次方程式，解得合用之根為

$$\mu = 0.46.$$

ii) β 合適的值經試定為 6.0×10^{-3} , β 的值固然可以調節使得理論壓力最大點與實驗點完全重合, 但如此定得之 β 值使 (81) 成為發散級數.

iii) 對於粗面輥, 在壓延狀態下材料屈服強度的校正方法與 (A) iii) 同, 在此情形,

$$\alpha = 1.83, \quad K' = 2.10 K_0.$$

校正值繪於圖 8.

iv) 數值計算結果如下:

$$\theta_1 = 0.$$

由 (86) $f_{1(1)} = 0.114$.

由 (90) $(\theta - \theta_2)_1 = 0.0316$ 弧度或 $1^\circ 49'$.

在後滑動區及貼附區的壓延正壓力 (略棄高次小項) 為

$$\text{由 (55), } \frac{P_h}{K} = 0.766 + 14.4(\theta - \phi) + 890(\theta - \phi)^2, \quad 0.0992 \geq \phi \geq 0.0676.$$

$$\text{由 (80), } \frac{P_s}{K} = 0.742 + 56.3\phi - 18360\phi^3, \quad 0.0676 \geq \phi \geq 0.$$

摩擦係數在粗面輥為較大, 當 $\phi > \frac{\theta}{2}$, 貼附區壓延正壓力的計算, 乃引用 (81) 式, 然後依照作圖技術在連接點將曲線順連.

按照上述結果描得的曲線如圖 8 所示, 總負荷之誤差為 $+3.7\%$.

我們從計算的過程知道若要完全證實本文所述方法的正確性, 尚需要進行下述實驗:

- (1) 金屬在各種溫度下的黏度.
- (2) 在高壓力下兩接觸金屬面間的摩擦現象.
- (3) 在壓延狀態下的材料屈服強度.

關於輥與受壓延材料接觸面間的壓力分佈之新實驗也需要繼續進行.

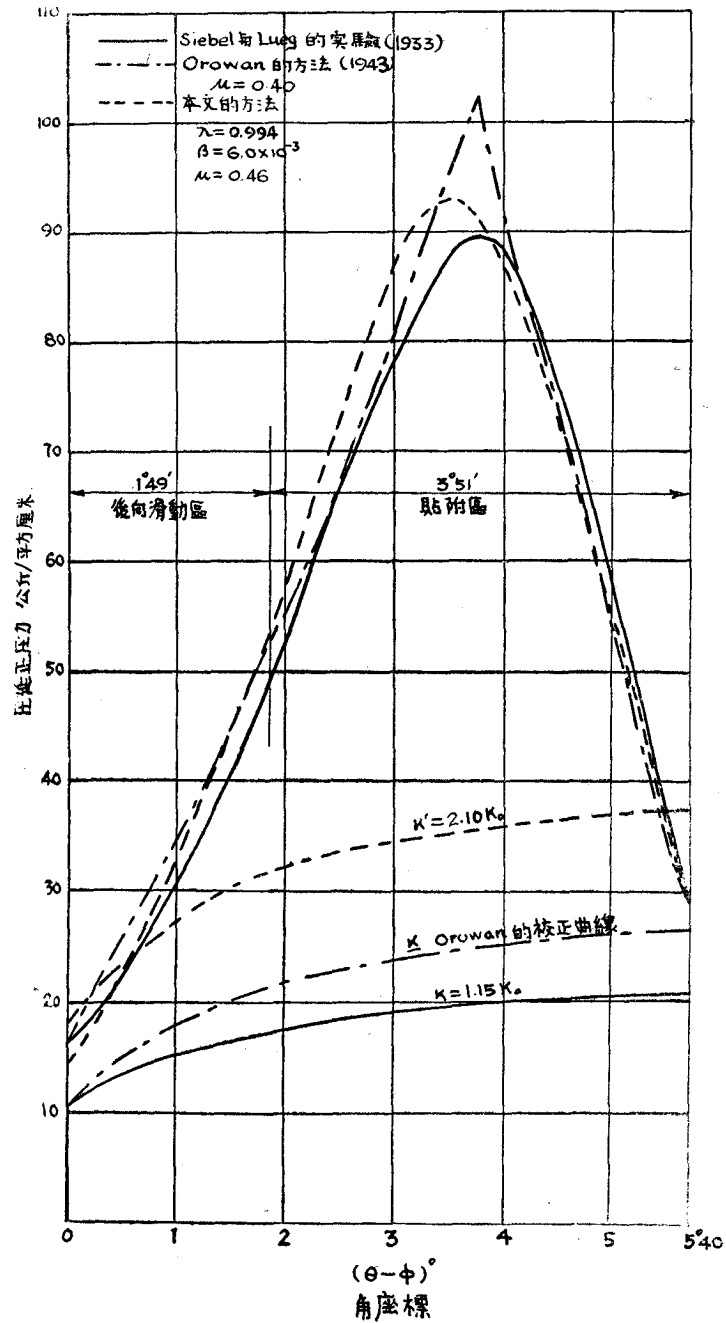


圖 8

九、結 論

本文所述的理論，其最重要的基礎概念乃設想材料在壓延狀態下的塑性流為黏性剪變流性質，由此建立的算學分析使我們得到更近於事實的結果和推論，茲摘述如下：

(1) 證明了前向滑動區是很小，而後向滑動區常存在。材料一經為輥嚙入後，材料將與輥保持貼附接觸直到離出點而無顯著的前向滑動。與實際壓延專家的多數見解相符。

(2) 前向滑動 f 與平均滑動 f_1 兩者之關係為

$$f_1 - f = \mu m / 3 \beta g,$$

這式可以利用於實驗計算 f 值。

(3) 前向滑動區，後向滑動區及貼附區位置可以由理論近似決定。

(4) 在進入點及離出點之壓延正壓力因摩擦係數增加而降低，這一點需要實驗證明。

(5) 壓延正壓力可由 (47), (55), (80) 及 (81) 計得。在這些表示式中，包含有摩擦係數，輥直徑，鈹的原厚度與終厚度，並 β 因素對於壓延正壓力的影響。又在貼附區內，壓力分佈對 φ 之變化率係連續的。

本文所引入的 β 數為一甚有意義的特徵數，然而尚未有實驗測定此數。

以上各段的結果，基本上可以直接應用數值計算法，而求出各個 ϕ 或 $(\theta - \phi)$ 冪級數中高次項的係數，以符合實際準確度的要求。

THEORY OF ROLLING

CHIEN WEI-ZANG AND CHEN CHIH-FA

Tsing Hua University

ABSTRACT

The theory of rolling given in the present paper is based upon the following assumptions:

(1) There is no lateral spreading.

(2) The material used is incompressible, isotropic, and viscous. It also obeys von Mises-Hencky's condition of yielding.

(3) The elastic deformation of rolls is neglected.

(4) The contact region between the material and rolls is divided into three parts: namely the forward slipping region, sticking region, and backward slipping region. The conditions of continuity of velocity and pressure are used.

The results obtained from this theory agree very well with the experimental results given by Siebel and Lueg in 1933.