

## 《二元混合物在液体层上发生马兰戈尼爆裂的研究》 的补充材料

谢科薇<sup>#</sup> 陶金成<sup>#</sup> 董裕力<sup>†</sup> 翁雨燕<sup>‡</sup> 杨俊义 方亮

(苏州大学物理与科学技术学院, 苏州 215031)

### 补充材料A

首先, 因为在界面上没有质量转移, 所以速度的法向分量在界面上是连续的:

$$u^{(n)}(r, z, t)|_{r=\xi^{(n)}} = u^{(n+1)}(r, z, t)|_{r=\xi^{(n)}}. \quad (\text{A1})$$

其次, 由无滑移条件可知, 速度的切向分量也是连续的:

$$w^{(n)}(r, z, t)|_{r=\xi^{(n)}} = w^{(n+1)}(r, z, t)|_{r=\xi^{(n)}}. \quad (\text{A2})$$

再次, 流体的切向应力在界面是连续的, 第 $n$ 种流体在柱坐标下的轴对称流动的应力张量<sup>[21]</sup>可以表示为

$$\tau^{(n)} = \begin{bmatrix} -p^{(n)} + 2\mu^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r} & \mu^{(n)} \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n)}}{\partial r} \right) \\ \mu^{(n)} \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n)}}{\partial r} \right) & -p^{(n)} + 2\mu^{(n)} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

则界面切向应力连续可表示为

$$\mu^{(n)} \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n)}}{\partial r} \right) |_{r=\xi^{(n)}} = \mu^{(n+1)} \left( \frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n+1)}}{\partial r} \right) |_{r=\xi^{(n)}}. \quad (\text{A4})$$

最后, 跨界面的法向应力差必须由单位面积的表面张力来平衡, 令 $\mathbf{n}^{(n)}$ 是界面的单位法向量, 指向向有拉普拉斯方程界面上的法相应力平衡方程为

$$\mathbf{n}^{(n)} \cdot (\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}) |_{r=\xi^{(n)}} \cdot \mathbf{n}^{(n)} = \gamma^{(n)} \kappa^n, \quad (\text{A5})$$

其中,  $\kappa^n$ 是截面的平均曲率, 曲率可以直接由 $\kappa^n = \nabla \cdot \mathbf{n}^{(n)}$ 得到.

### 补充材料B

$$\varphi(kr) = \frac{N(kr)}{D(kr)}, \quad (\text{B1})$$

$N(kr)$ 和 $D(kr)$ 分别可表示为

$$N(kr) = I_1(kr)\Delta_1 - \{krI_0(kr) - I_1(kr)\}\Delta_2, \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned}
 D(kr) = & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \{krI_0(kr) - I_1(kr)\} \Delta_1 - \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \{(k^2r^2 + 1)I_1(kr) \\
 & - krI_0(kr)\} \Delta_2 - \{krK_0(kr) - K_1(kr)\} \Delta_3 \\
 & - \{(k^2r^2 + 1)K_1(kr) - krK_0(kr)\} \Delta_4, \quad (B3)
 \end{aligned}$$

其中,  $\frac{\mu}{\mu'}$  为液体 A 与液体 B 的黏度比,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  和  $\Delta_4$  可表示为

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} krI_0(kr) - I_1(kr) & K_1(kr) & -krK_0(kr) - K_1(kr) \\ I_0(kr) + krI_1(kr) & -K_0(kr) & -K_0(kr) + krK_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) krI_0(kr) & K_1(kr) & -krK_0(kr) \end{vmatrix}, \quad (B4)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} I_1(kr) & K_1(kr) & -krK_0(kr) - K_1(kr) \\ I_0(kr) & -K_0(kr) & -K_0(kr) + krK_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) I_0(kr) & K_1(kr) & -krK_0(kr) \end{vmatrix}, \quad (B5)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} I_1(kr) & krI_0(kr) - I_1(kr) & -krK_0(kr) - K_1(kr) \\ I_0(kr) & I_0(kr) + krI_1(kr) & -K_0(kr) + krK_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) I_1(kr) & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) krI_0(kr) & -krK_0(kr) \end{vmatrix}, \quad (B6)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} I_1(kr) & krI_0(kr) - I_1(kr) & K_1(kr) \\ I_0(kr) & I_0(kr) + krI_1(kr) & -K_0(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) I_1(kr) & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) krI_0(kr) & K_0(kr) \end{vmatrix}. \quad (B7)$$