物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* **Vol. 71, No. 11 (2022) 119501**

《基于 OpenFOAM 的磁流体求解器的开发和应用》的补充材料

李尚卿 1),2) 王伟民 3)† 李玉同 1),2),4)‡

1）（中国科学院物理研究所，北京凝聚态物理国家研究中心，北京 100190）

2）（中国科学院大学物理学院，北京 100049）

3）（中国人民大学物理学系，北京 100872）

4）（松山湖材料实验室，东莞 523808）

† 通讯作者. E-mail: weiminwang1@ruc.edu.cn

‡ 通讯作者. E-mail: ytli@iphy.ac.cn

本文是《基于 OpenFOAM 的磁流体求解器的开发和应用》的补充材料，重点讨论该文提出的 MHDFoam 求解器的性能。S1 部分为 MHDFoam 求解器的算法测试，我们利用布里奥-吴(Brio-Wu)激波管问题讨论了 MHDFoam 的时间稳定性和空间收敛性；S2 部分为 MHDFoam 求解器运用自适应网格细分(adaptive mesh refinement, 简记为 AMR)技术消除数值震荡的一个应用实例。

S1 算法测试

布里奥-吴激波管[1]是一个标准的一维磁流体黎曼问题。无量纲的初始条件如图 S1 所示，$t = 0$ 时刻两部分气体间薄膜破裂，管道中间会形成激波系。图 S2 为 $t = 0.1$ 时 Roe-MHD[1]、FLASH 程序和 MHDFoam 求解器的模拟结果，可以看到三者运算结果基本一致。

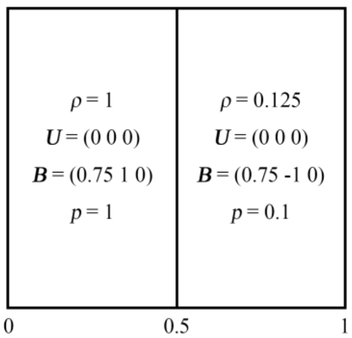

图 S1 布里奥-吴激波管问题的初始条件

Fig. S1. Initialization of the Brio–Wu shock tube problem

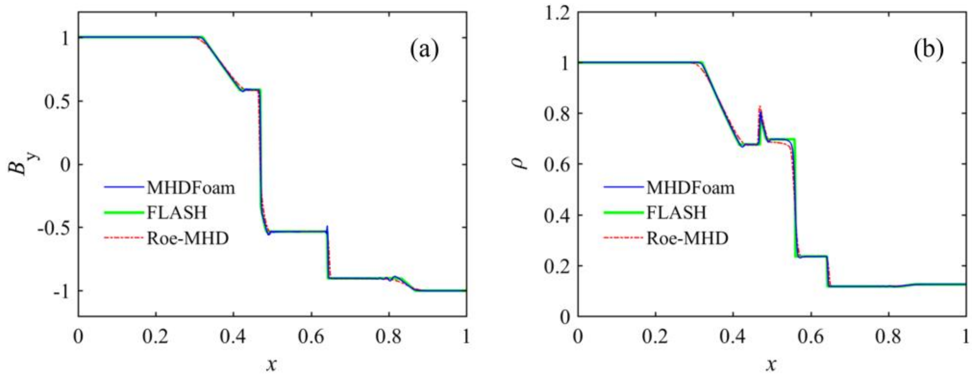

图 S2 $t = 0.1$ 时布里奥-吴问题的模拟结果 (a) y 方向磁场分布；(b)密度分布

Fig. S2. Simulation results at $t = 0.1$ for the Brio–Wu problem: (a) y-component of magnetic field profiles; (b) density profiles.

我们对 MHDFoam 求解器的时间稳定性和空间收敛性展开讨论。本文定义密度的数值误差如下：

$$\delta_N(\rho)=\frac{\sum_{j=1}^{N}\left|\rho_j^N-\rho_j^{\text{exact}}\right|}{\sum_{j=1}^{N}\left|\rho_j^{\text{exact}}\right|}, \qquad (1)$$

其中，ρ_j^{exact} 为坐标 x_j 处的精确解，本文选用 FLASH 八波求解器[2]的模拟结果，这和文献[3]中的定义不同。我们计算了 Roe-MHD 程序和 MHDFoam 求解器在网格数 N = 800, 3200 条件下的密度误差(如图 S3)。三个模拟的 $\Delta t/\Delta x = 0.016$，其中 Δt 为时间步长，$\Delta x = 1/N$ 为网格间距。则它们的一维库朗数 $Co \equiv U_{\max}\Delta t/\Delta x$ 相等，约为 0.02。可以看到相同网格数条件下 MHDFoam 的密度误差(图 S3 蓝色线)小于 Roe-MHD 的(图 S3 红色点划线)，这表明 MHDFoam 的时间稳定性较好。根据文献[1]，Roe-MHD 采用迎风差分，收敛阶数为 1。根据正文表 1，MHDFoam 的收敛阶数在 1-2 之间，所以密度误差的增长没有 Roe-MHD 的大。增大网格数量会降低误差(图 S3 橙色线)，且能抑制误差的波动，这表明 MHDFoam 的空间收敛性较好。

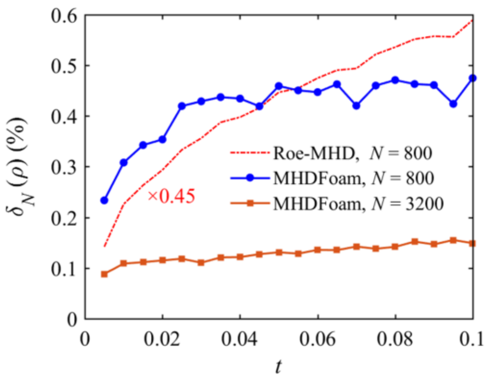

图 S3 布里奥-吴问题的密度误差和时间的依赖关系

Fig. S3. Dependence of density errors on time for the Brio–Wu problem

S2 实例测试

由于截断误差的存在，模拟中激波附近会有数值耗散、色散和震荡[4]。优化算法可以部分消除这些非物理现象。本节给出了 MHDFoam 求解器兼容自适应网格算法的例子，该方法可以消除激波后缘的磁场数值振荡。

我们开展了膨胀磁流体横越磁场的二维数值模拟。初始网格和边界条件如图 S4 所示。以半圆圆心为原点建立坐标系，横向为 x 轴，纵向为 z 轴，则解域范围为 $\left\{-0.15\ \text{mm} \le x \le 0.15\ \text{mm},\ 0 \le z \le 0.2\ \text{mm},\ \sqrt{x^2+z^2} \ge 0.05\ \text{mm}\right\}$，网格尺寸约为 1 μm。材料为铜的可压缩理想磁流体从 inlet 半圆边界注入，密度为 3.8×10^{-4} g/cm^3，温度为 10^4 K，速度为 120 km/s。背景密度为 2.5×10^{-7} g/cm^3，温度为 300K。磁化背景中有初始横向磁场 B_{x0} = 10 T，注入磁流体非磁化，inlet 边界上磁场为 0。

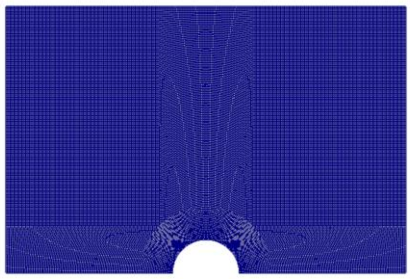

图 S4 初始网格和边界条件

Fig. S4. Initialization of mesh and boundary conditions

图 S5(a)为无磁场条件下 t = 0.8 ns 时磁流体的密度分布。磁流体呈各向同性膨胀，半径扩大了 $\Delta R = Ut = 120\ \text{km/s} \times 0.8\ \text{ns} \approx 0.1\ \text{mm}$。当背景横向磁场存在时，磁流体膨胀呈各向异性(如图 S5(b))。磁流体在 x 方向的膨胀距离和无磁场条件下的大致相同，在 z 方向的运动受到抑制，高度较无磁场条件下的低。这是因为磁流体在横向磁场中膨胀时会推动磁力线，使之弯曲(如图 S6(b)中白线所示)。这种弯曲的磁力线会产生指向曲率中心的洛伦兹力，使膨胀的等离子体在该方向减速。当采用静网格时，MHDFoam 求解的磁场会在激波后缘有数值震荡(如图 S6(a))，这在其它程序的模拟结果中也会出现。出现数值震荡的原因是 MHDFoam 磁场解耦算法引起的截断误差，而根据 S1 节，增加网格密度可以有效减少误差。我们采用自适应网格技术来消除数值磁场震荡(如图 S6(b))，自适应网格的策略是对

$10^{-4} \le \beta^{-1} \le 5.0$ 区域进行 2 阶网格细分(如图 S7)。

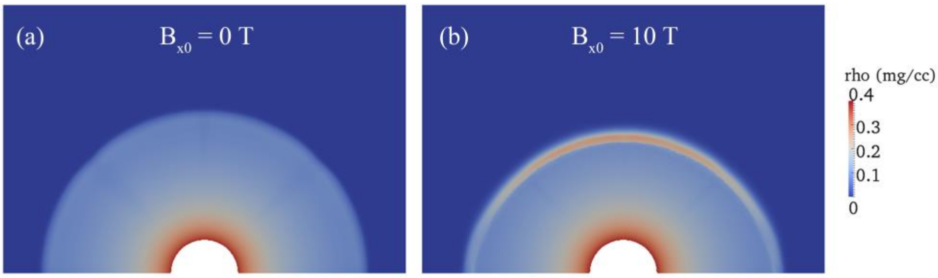

图 S5 $t = 0.8$ ns 时密度廓线 (a)无磁场；(b) $B_{x0} = 10$ T

Fig. S5. Density contours at $t = 0.8$ ns at (a) $B_{x0} = 0$ T; (b) $B_{x0} = 10$ T

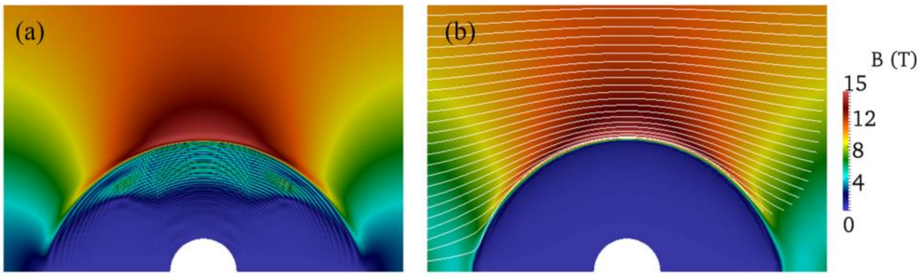

图 S6 $t = 0.8$ ns 时 MHDFoam 求解的磁场，采用 (a)静网格；(b)自适应网格

Fig. S6. Magnetic fields calculated by MHDFoam solver at $t = 0.8$ ns using (a) static mesh; (b) adaptive mesh

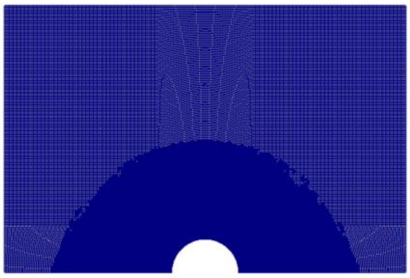

图 S7 $t = 0.8$ ns 时的自适应网格.

Fig. S7. Adaptive mesh at $t = 0.8$ ns

参考文献

[1] Brio M, Wu C C 1988 *J. Comput. Phys.* **75** 400

[2] Powell K G, Roe P L, Linde T J, Gombosi T I, De Zeeuw D L 1999 *J. Comput. Phys.* **154** 284

[3] Chelem Mayigué C, Groll R 2016 *Arch. Appl. Mech.* **87** 667

[4] 张德良 2010 计算流体力学教程(北京:高等教育出版社) 第94页，第255页

