

《楔形体上复合液滴润湿铺展行为的格子 Boltzmann 方法研究》附加材料*

张晓林¹⁾ 黄军杰^{1)2)†}

1) (重庆大学航空航天学院, 重庆 400044)

2) (重庆大学, 非均质材料力学重庆市重点实验室, 重庆 400044)

补充材料 A

当液滴在固壁上润湿铺展达平衡形态时, 系统的总能量处于最小值, 液滴界面呈球面形状。初始时刻的液滴是半径为 r_0 的 Janus 状液滴, 对称参数下该液滴在楔形体上的平衡构型如图 S1 所示。楔形体顶角为 χ , 接触角 $\theta_{13} = \theta_{23}$, O 为左侧液滴界面的圆心。由 $\sigma_{12} : \sigma_{13} : \sigma_{23} = 1 : 1 : 1$, 有 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$, 根据几何条件有 $\angle ABO = \frac{\pi}{6}$, 同时要使液滴能够润湿楔形体, 接触角应满足 $\theta_{13} \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\chi}{2}$, 要使液滴不发生分裂, 接触角应满足 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\chi}{2} \leq \theta_{13}$ 。设 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle OBC = \angle OCB = \varepsilon$, $\angle COB = \gamma$, $\overline{AB} = h$, $\overline{CO} = \overline{BO} = r$, fluid1 液滴面积为 S_v , 圆弧 BC 对应的扇形面积为 S 、三角形 ABC 的面积为 S_{ABC} 、三角形 COB 的面积为 S_{COB} 。

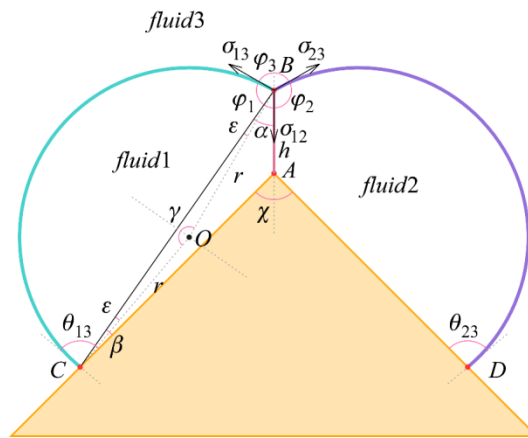


图 S1 楔形体上复合液滴的平衡构型

Fig. S1. Equilibrium configurations of compound droplets on wedges.

根据下列公式

$$\varepsilon + \frac{\pi}{6} = \alpha, \quad \alpha + \beta = \frac{\chi}{2}, \quad \beta - \varepsilon = \theta_{13} - \frac{\pi}{2},$$

可以得到

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\chi}{2} - \theta_{13} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\theta_{13} - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\chi}{2} \right) \right],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\chi}{2} - \theta_{13} \right), \quad \gamma = \pi - 2\varepsilon = \theta_{13} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\chi}{2}.$$

再由下列 6 个方程:

$$S_V = \frac{\pi r_0^2}{2}, \quad S = \frac{r^2}{2} \gamma, \quad S_{COB} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cos \varepsilon \cdot r \sin \varepsilon = r^2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon,$$

$$\frac{h}{\sin \beta} = \frac{2r \cos \varepsilon}{\sin \left(\pi - \frac{\chi}{2} \right)}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cos \varepsilon \cdot h \sin \alpha, \quad S_V = S - S_{COB} + S_{ABC},$$

可解出平衡态液滴半径:

$$r = \sqrt{\frac{\pi r_0^2}{2} \left/ \left(\frac{\gamma}{2} - \cos \varepsilon \sin \varepsilon + \frac{2 \cos^2 \varepsilon \sin \beta \sin \alpha}{\sin \frac{\chi}{2}} \right) \right.},$$

$$\text{则 } h = \frac{2r \cos \varepsilon \sin \beta}{\sin \frac{\chi}{2}}.$$

补充材料 B

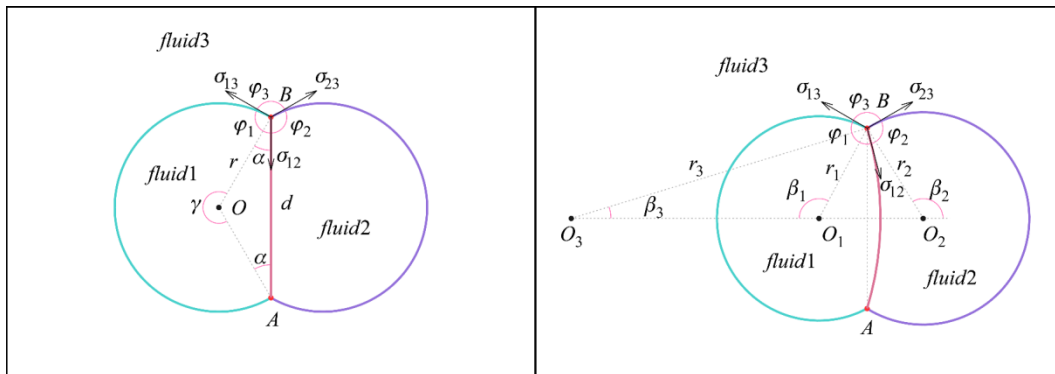


图 S2 复合液滴的平衡构型

Fig. S2. Equilibrium configuration of compound droplet.

无楔形体时复合液滴的平衡构型如图 S2 所示, 其中左图为 3 个界面张力相同的情形, 右图为 3 个界面张力不同的情形, 它们均由初始半径为 r_0 的非平衡态 Janus 状液滴演化而来。

1) $\sigma_{13}:\sigma_{23}:\sigma_{12}=1:1:1$ 时, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=2\pi/3$ 。根据几何条件可知:
 $\alpha=\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{6}$, 设 $\gamma=\pi+2\alpha$, $\overline{OA}=\overline{OB}=r$, fluid1 液滴面积为 S_v , 圆弧 AB 对应的扇形面积为 S , 三角形 AOB 面积为 S_{AOB} 。由下列 4 个方程:

$$S_v = \frac{\pi r_0^2}{2}, \quad S = \frac{r^2}{2} \gamma,$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cos \alpha \cdot r \sin \alpha = r^2 \cos \alpha \sin \alpha, \quad S_v = S + S_{AOB},$$

可解得平衡态液滴半径:

$$r = \sqrt{\frac{\pi r_0^2}{2} \left/ \left(\frac{\gamma}{2} + \cos \alpha \sin \alpha \right) \right.}.$$

2) $\sigma_{13}:\sigma_{23}:\sigma_{12} \neq 1:1:1$ 为非对称界面张力情形, $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=2\pi$ 。 O_1 , O_2 , O_3 分别为左、右、中 3 个圆弧界面的圆心, 相应的半径为 r_1 , r_2 , r_3 , 而 β_1 , β_2 , β_3 为与计算相关的 3 个假设角。根据几何关系有:

$$\varphi_1 = \beta_1 + \beta_3, \quad \varphi_2 = \beta_2 - \beta_3, \quad r_1 \sin \beta_1 = r_2 \sin \beta_2, \quad r_1 \sin \beta_1 = r_3 \sin \beta_3,$$

$$\frac{\pi r_0^2}{2} = r_1^2 \left[\beta_1 - \frac{1}{2} \sin(2\beta_1) \right] + r_3^2 \left[\beta_3 - \frac{1}{2} \sin(2\beta_3) \right],$$

$$\frac{\pi r_0^2}{2} = r_2^2 \left[\beta_2 - \frac{1}{2} \sin(2\beta_2) \right] - r_3^2 \left[\beta_3 - \frac{1}{2} \sin(2\beta_3) \right].$$

运用牛顿迭代法^[1]求解上述 6 个方程, 可得到 r_1 , r_2 , r_3 , β_1 , β_2 , β_3 。

参考文献

[1] Huang J J [2021 Phys. Fluids 33 072105](#)