

双时间-温度格临函数的二元碰撞展开*

蔡建華 徐宏華[†]

(南京大学物理系)

提 要

应用李政道和杨振宁提出的二元碰撞展开法,对于有强短程排斥互作用的多粒子系发展了一种按图形计算双时间-温度格临函数的规则,其各级近似由二体散射相移的各次幂所表征.文中得出了玻色和费米统计情形的计算规则,并且研究了有凝聚相存在的玻色系统.本文主要讨论了单粒子格临函数的图形技术,但容易将它们推广应用于计算各种时间-温度格临函数.

一、引 言

格临函数的一般计算方法是基于场论的费曼-戴逊技术,也就是微扰论图形规则^[1].但是对于刚球型互作用一类情形,只取微扰级数的有限多项并无意义,必须对于无穷系列,即所谓阶梯图形,进行部分求和.Беляев^[2]和Галицкий^[3]分别对玻色系和费米系在阶梯近似下求得了绝对零度的单粒子格临函数,并从而决定了这两种体系的一部分元激发谱.但是由于各级阶梯图形的数量级与绝对零度情形大不相同,在将他们的工作推广到有限温度时,会遇到困难.据作者所知,还没有人对单粒子温度格临函数作出相似的计算.此外,也很难对多粒子格临函数进行这样的处理.

然而,研究多粒子系在有限温度下的性质,大都必须通过所谓时间-温度格临函数,而后者是由温度格临函数的解析延拓而得.由于计算方法不足,借格临函数来研究刚球型多粒子系在有限温度下的性质是有困难的.

格临函数的另一种常用的计算方法,是对它们的运动方程作截断近似.可用这种方法来直接计算时间-温度格临函数,但在实际应用时,近似稍高,计算便很繁复,而且在各种具体问题中其物理含义不很明朗.

本文就主要是排斥力的强短程互作用(刚球型互作用是一特例)的多粒子系,提出一种双时间-温度格临函数的非微扰性图形计算规则.用它既可直接求得时间-温度格临函数,又具有费曼-戴逊技术之“自动化”优点.本文只叙述和证明计算规则,关于实际应用另作报导.为简便起见,文中只讨论单粒子双时间-温度格临函数,然而不难推广应用于其他时间-温度格临函数.

本方法适用于主要是排斥力的强短程互作用的系统(不仅限于刚球型多粒子系),这意味着实际对象是低温下 He^4 和 He^3 量子液体,也有可能应用于核物质^[4].我们的目的在于研究这类体系的若干实验性质,如慢中子散射截面^[5],各种输运系数^[6]等.

* 1964年8月31日收到.

† 1964年应届毕业生,本文的一部分是徐宏华的毕业论文.

我们的方法是李政道和杨振宁的二元碰撞展开 (binary collision expansion) 方法^[7]的发展. 它只限于研究平衡态的巨配分函数和粒子分布函数, 现在我们应用于格临函数的计算.

二、相連項展式

根据定义^[1], 动量空间中的单粒子时间-温度格临函数为

$$G(\mathbf{p}, t) = -i \langle \mathcal{T}(a_{\mathbf{p}}(t) a_{\mathbf{p}}^{\dagger}(0)) \rangle, \quad (2.1)$$

其中 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}(t)$, $a_{\mathbf{p}}(t)$ 为海森堡表象中动量为 \mathbf{p} 的粒子的产生与湮灭算符; \mathcal{T} 表示编时乘积; 而 $\langle \dots \rangle$ 表示对巨正则系综求平均:

$$\langle \dots \rangle = Z^{-1} \text{Sp}(\exp[-\beta(H - \mu N)] \dots), \quad (2.2)$$

这里 Sp 是求迹号, $\beta = T^{-1}$, μ 为化学势, H 是多粒子系的哈密顿算符, N 是总粒子数算符, 而 Z 是巨正则配分函数:

$$Z = \text{Sp}(\exp[-\beta(H - \mu N)]). \quad (2.3)$$

将 $G(\mathbf{p}, t)$ 写成

$$G(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} G^{>}(\mathbf{p}, t) & t > 0; \\ G^{<}(\mathbf{p}, t) & t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

令

$$\zeta \equiv \beta - it, \quad \eta \equiv it, \quad (2.5)$$

并分离出含“时间”算符的“时间”变数, 可写出

$$\left. \begin{aligned} G^{>}(\mathbf{p}, t) &= -i Z^{-1} \text{Sp}(z^N e^{-\zeta H} a_{\mathbf{p}} e^{-\eta H} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}), \\ G^{<}(\mathbf{p}, t) &= \mp i Z^{-1} \text{Sp}(z^{N+1} a_{\mathbf{p}} e^{-\zeta^* H} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-\eta^* H}), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中 z 为逸度

$$z = \exp(\beta\mu). \quad (2.7)$$

在 $G^{<}$ 中, 对于玻色系(费米系)右方取 $- (+)$ 号.

将(2.6)式中的求迹在以自由系统的全套正交归一本征态为基的表象中进行, 有

$$G^{>} = -i Z^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \cdots a_{\mathbf{k}_N} e^{-\zeta H} a_{\mathbf{p}} e^{-\eta H} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{k}_N}^{\dagger} | 0 \rangle,$$

$|0\rangle$ 为真空态. 在算符 $e^{-\zeta H}$ 和 $a_{\mathbf{p}}$ 间插入中间态, 并对中间态求和, 因算符 $e^{-\zeta H}$ 及 $a_{\mathbf{p}} e^{-\eta H} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 与总粒子数算符可对易, 因此

$$\begin{aligned} G^{>} &= -i Z^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{(N!)^2} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1} \cdots a_{\mathbf{k}_N} e^{-\zeta H} a_{\mathbf{k}'_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{k}'_N}^{\dagger} | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \langle 0 | a_{\mathbf{k}'_1} \cdots a_{\mathbf{k}'_N} a_{\mathbf{p}} e^{-\eta H} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{k}_N}^{\dagger} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

容易证明: 矩阵元 $\langle 0 | a_{\mathbf{k}_1} \cdots a_{\mathbf{k}_N} e^{-\zeta H} a_{\mathbf{k}'_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{k}'_N}^{\dagger} | 0 \rangle$ 就是 LYI^[2] 中定义的矩阵元 $\langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^S(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle$ 或 $\langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^A(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle$ (以下将不分玻色和费米统计情形, 取消上标 S 或 A), 因此

1) 选用 $\hbar = k = 1$ 的单位制, \hbar, k 分别为普朗克常数和玻尔兹曼常数.

2) LYI—V 依次代表文献^[7]的五篇论文.

$$G^>(\mathbf{p}, \tau) = -iZ^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{(N!)^2} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle. \quad (2.8)$$

应用关系 LY (I.23) (I.24), 代入式(2.8)右方第一个 W 矩阵元, 因为 $\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N$ 都是求和的动量, 而第二个 W 矩阵元右方的 $|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p}\rangle$ 是对称或反对称态, 因此有

$$G^>(\mathbf{p}, t) = -iZ^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle, \quad (2.9)$$

其中 $\langle \cdots | W^B | \cdots \rangle$ 是玻尔兹曼统计情形的 W 矩阵元. 同样可得

$$G^<(\mathbf{p}, t) = \mp iZ^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{N+1}}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\zeta^*) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^B(\eta^*) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle. \quad (2.10)$$

现在可对(2.9)和(2.10)中的每个 W 矩阵元进行 Ursell 展开[LY(I.6; I.12)]:

$$\langle \mathbf{k}_1 | W_1 | \mathbf{k}'_1 \rangle \equiv \langle \mathbf{k}_1 | U_1 | \mathbf{k}'_1 \rangle, \\ \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | W_2 | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \equiv \langle \mathbf{k}_1 | U_1 | \mathbf{k}'_1 \rangle \langle \mathbf{k}_2 | U_1 | \mathbf{k}'_2 \rangle + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2 | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle, \quad (2.11)$$

等等. 对 W^B 矩阵元也作相似展开, 在(2.11)诸式中只要以 W_N^B 和 U_N^B 分别替代 W_N 和 U_N . 设在 $\langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle$ 展开式的某一项中, 动量 \mathbf{p} 出现在一个 U_i 矩阵元中, 以(2.11)代入(2.9)后所得的一般项具有下列形式:

$$\underbrace{\langle \mathbf{k}_A | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}'_A \rangle \langle \mathbf{k}_B | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}'_B \rangle \cdots \langle \mathbf{k}_C \mathbf{k}_D | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_C \mathbf{k}'_D \rangle \cdots \times}_{m_1 \text{ 个因子} \quad m_2 \text{ 个因子}} \\ \times \cdots \underbrace{\langle \mathbf{k}_E \mathbf{k}_F \cdots | U_i^B(\zeta) | \mathbf{k}'_E \mathbf{k}'_F \cdots \rangle \cdots \cdots \times}_{m_i \text{ 个因子}} \\ \times \langle \mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_b \cdots \mathbf{p} | U_j(\eta) | \mathbf{k}_a \mathbf{k}_b \cdots \mathbf{p} \rangle \underbrace{\langle \mathbf{k}'_r | U_1(\eta) | \mathbf{k}_r \rangle \langle \mathbf{k}'_s | U_1(\eta) | \mathbf{k}_s \rangle \cdots \times}_{n_1 \text{ 个因子}} \\ \times \underbrace{\langle \mathbf{k}'_t \mathbf{k}'_c | U_2(\eta) | \mathbf{k}_t \mathbf{k}_c \rangle \cdots \cdots \langle \mathbf{k}'_7 \mathbf{k}'_b \cdots | U_i(\eta) | \mathbf{k}_7 \mathbf{k}_b \cdots \rangle \cdots \cdots}_{n_2 \text{ 个因子} \quad n_i \text{ 个因子}}; \quad (2.12)$$

其中

$$\sum_i im_i = N, \quad \sum_i in_i = N - j + 1,$$

而 $ABCD \cdots$ 及 $\alpha\beta\gamma\delta \cdots$ 都指 $1, 2, 3, 4, \cdots, N$ 的某个置换. 一般说来, 式(2.12)不是一个相连项, 即假如省去变数 $\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N$ 的一撇, 也就是假如令 $\mathbf{k}'_i = \mathbf{k}_i, i = 1, 2, \cdots, N$, 则式(2.12)一般地可以分为若干个因子的乘积, 其中每个因子由若干个 $U^B(\zeta)$ 和 $U(\eta)$ 矩阵元组成, 它仅依赖于 $\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_N, \mathbf{p}$ 中的一部分动量变数, 并且这部分动量变数也仅仅出在这个因子中. 每一个本身不能再作如此分解的因子称为一个相连项. 一般情形下, 式(2.12)是若干相连项的乘积, 其中之一含有动量 \mathbf{p} .

将算符 $e^{-\beta H}$ 写成 $e^{-\zeta H} \cdot e^{-\eta H}$, 在自由系统表象中求迹, 并在二个指数算符间插入中间态, 重复推导(2.9)式的过程可得

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle.$$

由此遵照通常的办法^[8], 立即可以证明, 在消去配分函数 Z 后, $G^>$ 等于含有变数 \mathbf{p} 的各种相连项之和, 对于 $G^<$ 亦有相同结论:

$$\left. \begin{aligned} G^>(\mathbf{p}, \tau) &= -i \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \{ \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle \}_c, \\ G^<(\mathbf{p}, \tau) &= -i \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{N+1}}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \{ \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} | W_{N+1}(\zeta^*) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^B(\eta^*) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle \}_c; \end{aligned} \right\} (2.13)$$

{ }_c 表示只取 Ursell 展开后的相连项. 例如, 具体写出有

$$\begin{aligned} G^>(\mathbf{p}, \tau) &= -i \left\{ \langle \mathbf{p} | U_1(\eta) | \mathbf{p} \rangle + \frac{z}{1!} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \langle \mathbf{k} | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle + \right. \\ &\quad + \frac{z^2}{2!} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2} [\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{k}'_2 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k}_1 \mathbf{p} \rangle + \\ &\quad + \langle \langle \mathbf{k}_1 | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \rangle \langle \mathbf{k}_2 | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}'_2 \rangle + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | U_3(\eta) | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle] + \cdots \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中不出现象

$\langle \mathbf{k}_3 | U_1^B(\zeta) | \mathbf{k}'_3 \rangle \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}'_2 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_3 \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k}_3 \mathbf{p} \rangle$ 的项.

三、玻色统计情形的图形规则

本节中我们讨论玻色统计的情形. 先来研究 $G^>(\mathbf{p}, \tau)$.

李、杨证明了每一个 U 矩阵元可通过 U^B 矩阵元来表示. 他们给出了用

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_\alpha | r_\alpha^s(\eta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \cdots \mathbf{k}'_\alpha \rangle &\equiv \sum_{\mathcal{D}} (\mathcal{D} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_\alpha | U_\alpha^B(\eta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \cdots \mathbf{k}'_\alpha \rangle) = \\ &= \sum_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_\alpha | U_\alpha^B(\eta) | (\mathcal{D}^{-1} | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \cdots \mathbf{k}'_\alpha \rangle) \end{aligned} \quad (3.1)$$

($\alpha = 1, 2, \cdots, l$) 来表出 $\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_l | U_l(\eta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \cdots \mathbf{k}'_l \rangle$ 的规则 (LY IV 规则 A'). 应用这个规则, 我们进一步将(2.13)或(2.14)中 $G^>$ 的每一项化成由 U^B 和 r^s 矩阵元构成的相连项之和. 例如, 应用

$$\langle \mathbf{k}'_1 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle = \langle \mathbf{k}'_1 | r_1^s(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle,$$

$$\langle \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{k}'_2 | r_2^s(\eta) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | r_1^s(\eta) | \mathbf{k}_2 \rangle + \langle \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | r_2^s(\eta) | \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle,$$

式(2.14)中的一项 $\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 | U_1(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | U_2(\eta) | \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle$ 成为

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 | r_1^s(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}'_2 | r_1^s(\eta) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | r_1^s(\eta) | \mathbf{k}_2 \rangle + \\ &\quad + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | U_2^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \langle \mathbf{k}'_1 | r_1^s(\eta) | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}'_2 \mathbf{p} | r_2^s(\eta) | \mathbf{k}_2 \mathbf{p} \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

每一个如此类型的相连项可用一个相连图形表示. 用 $N+1$ 条竖直射线表示一个相连项中诸 $r^s(\eta)$ 矩阵元右方动量为 $\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p}$ 的入射粒子, 它们在“温度” η 处发生各种相互作用(由代表 $r^s(\eta)$ 矩阵元的顶点“●”表示), 出现在同一个 r^s 矩阵元中的各粒子线上

的“●”顶点用横线相连。经过这些相互作用后，诸粒子的动量成为 $\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_N, \mathbf{p}$ 。其中 $\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_N$ 继续传播到“温度” ζ 处又发生相互作用(由代表 $U^B(\zeta)$ 矩阵元的“▲”顶点表示，出现在同一 U^B 矩阵元中的各粒子线上的“▲”顶点也用横线相连)。经第二次作用后它们的动量恢复成 $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N$ 。例如，图 1 的(a)和(b)表示出(3.2)式中的二项。现在将这些图形中不带撇的相同动量 $\mathbf{k}_i; i = 1, \dots, N$ 的出射和入射粒子线相连，并将由横线相连的顶点缩成一点，于是每个相连图形就带有一进一出二条动量为 \mathbf{p} 的外线。例如图 1 的(a)和(b)分别成为(c)和(d)。

我们称这样所得的图形为原始图形，图 2 再给出一些例子。一般的原始图形根据如下的原则构成：一个 N 级的原始图形含有 Δ_α 个 α 级“▲”顶点， $\sum_\alpha \alpha \Delta_\alpha = N$ 和 O_α 个 α 级“●”顶点， $\sum_\alpha \alpha O_\alpha = N + 1$ ；在每个 α 级“▲”顶点上有 α 条具有带撇动量的入射线和 α 条具有不带撇动量的出射线；

在每个 α 级“●”顶点上有 α 条具有不带撇动量的入射线和 α 条具有带撇动量(或 \mathbf{p})的出射线。在“▲”顶点上入射线和出射线的动量编号必须是同一组数字，在“●”顶点上则不必。所有顶点由 $2N$ 条内线 $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N$ 和 $\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_N$ 相连， \mathbf{k} 线在“▲”顶点出射而在“●”顶点入射， \mathbf{k}' 线反之。此外，还有连在“●”顶点上的一进一出具有动量 \mathbf{p} 的一对外线。

在写下每个原始图形对

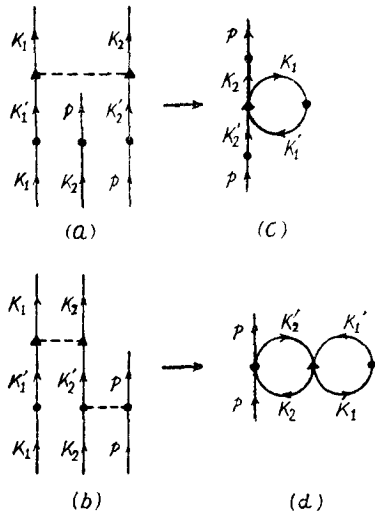


图 1

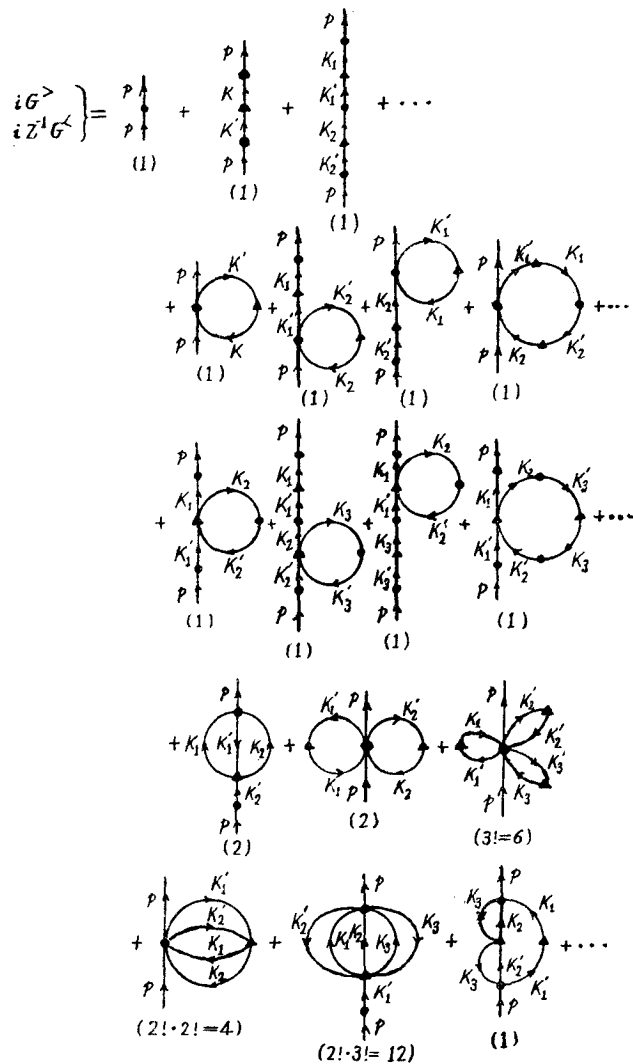


图 2

$iG^>(\mathbf{p}, \tau)$ 的贡献时, 显然, 每个 α 级“●”顶点对应因子 $\langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_\alpha} | r_a^s(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_\alpha} \rangle$, $\mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_\alpha}$ 和 $\mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_\alpha}$ 分别为在该顶点出射和入射的粒子线动量; 每个 α 级“▲”顶点对应因子 $z^\alpha \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\alpha} | U_a^B | \mathbf{k}'_{C_1} \cdots \mathbf{k}'_{C_\alpha} \rangle$, $\mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\alpha}$ 和 $\mathbf{k}'_{C_1} \cdots \mathbf{k}'_{C_\alpha}$ 亦为在该顶点上出射和入射的粒子线动量. 此外, 对于整个图形还有因子 $(N!)^{-1}$, N 是图形级数.

但是有相等贡献的原始图形不止一个, 它们都有相同结构, 差别仅仅是内线动量标记

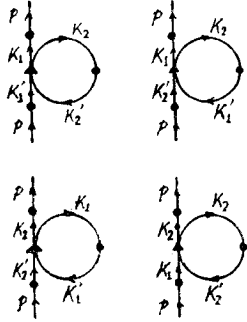


图 3

$\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_N, \mathbf{k}'_1, \cdots, \mathbf{k}'_N$ 的相对配置; 例如图 3 的四个图形. 这些贡献相等的图形可通过对一个图中的内线动量作置换而得. 这些置换有二类: (1) 一对对动量 $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1), (\mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2), \cdots, (\mathbf{k}_N, \mathbf{k}'_N)$ 间的各种置换 ($N!$ 种); (2) 固定 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots, \mathbf{k}_N$ (或 $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \cdots, \mathbf{k}'_N$) 的位置不动, 将 $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \cdots, \mathbf{k}'_N$ (或 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots, \mathbf{k}_N$) 作各种置换. 但由于在每个“▲”顶点上入射动量与出射动量的编号必须是同一组数字, 第二类置换的数目为 $\prod (\alpha!)^{\alpha}$. 由所有这些置换而产生的结构相同的图形数为 $N! \prod (\alpha!)^{\alpha}$, 然而其中有重复. 考虑任何一个各内线动量已有确定标记的图形, 对它进行上述二类置换, 定义所有如此产生的 $N! \prod (\alpha!)^{\alpha}$ 个图形中和原来图形拓扑相等(包括内线动量的相对配置在内)的图形数为这一类图形的对称数 S . 于是拓扑不等而结构相同因而贡献相等的图形数为

$$S^{-1} N! \prod (\alpha!)^{\alpha}. \quad (3.3)$$

图 2 中每个图形下括号中数字即是它的对称数.

在每种结构的图形中只要采用一个, 将它的贡献乘以 (3.3) 的倍数. (3.3) 中的因子 $N!$ 与每个原始图形的因子 $(N!)^{-1}$ 相消; 在各“▲”顶点, 出射(或入射)动量的置换正好使该顶点的因子由 U_a^B 矩阵元变成 $r_a^s(\zeta)$ 矩阵元(3.1), 不过改换以后应取消 (3.3) 中的因子 $\prod (\alpha!)^{\alpha}$. 于是就可写出每种结构的原始图形对 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$ 的贡献:

规则 I

(1) 每个 α 级“●”顶点对应因子 $\langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_\alpha} | r_a^s(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_\alpha} \rangle$, 每个 α 级“▲”顶点对应因子 $z^\alpha \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\alpha} | r_a^s(\zeta) | \mathbf{k}'_{C_1} \cdots \mathbf{k}'_{C_\alpha} \rangle$;

(2) 对所有内线动量求和;

(3) 再乘以 S^{-1} , S 为图形的对称数.

以刚球型气体为例, r_a^s 矩阵元的数量级是(见 LY II, III)

$$\langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_a | r_a^s(\beta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_a \rangle \sim \left(\frac{a\lambda^2}{Q} \right)^{a-1}; \quad (3.4)$$

其中 a 为刚球直径, Q 为系统体积, 而 $\lambda = (4\pi\beta)^{1/2}$. 因此, 如图 2 前三行中, 每一行的各个图形有相同数量级, 它们互相之差是在每条外线或内线上增添一对对的一级“▲”和“●”顶点. 现在对它们进行求和(收缩). 求和的结果是在原始图形中抹去所有一级顶点(这样产生的图形称为收缩图形), 同时通过简单计算可知, 增加了下面说明的粒子线因子, m^s , ζ^s 和 η^s .

以上就 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$ 进行了讨论. 比较(2.15)的两式可知, 对于 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$, 情形完全相同, 只要分别以参数 η^* 和 ζ^* 代替参数 ζ 和 η . 我们可写出每个收缩图形之贡献:

规则 II

(1) 每个 α 级 “●” 顶点提供因子 $\langle \mathbf{k}_{A_1} \cdots \mathbf{k}_{A_\alpha} | r_a^S(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_\alpha} \rangle$ [对 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$], 或 $\langle \mathbf{k}_{A_1} \cdots \mathbf{k}_{A_\alpha} | r_a^S(\zeta^*) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_\alpha} \rangle$ [对 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$]; 每个 α 级 “▲” 顶点提供因子 $\langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\alpha} | r_a^S(\zeta) | \mathbf{k}_{D_1} \cdots \mathbf{k}_{D_\alpha} \rangle$ [对 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$], 或 $\langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\alpha} | r_a^S(\eta^*) | \mathbf{k}_{D_1} \cdots \mathbf{k}_{D_\alpha} \rangle$ [对 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$].

(2) 每条内线 ● $\xrightarrow{\mathbf{k}}$ ● 提供因子 $\zeta^S(\mathbf{k})$; 每条外线 ▲ $\xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 ▲ $\xrightarrow{\mathbf{k}}$ ▲ 提供因子 $\eta^S(\mathbf{p})$ 或 $\eta^S(\mathbf{k})$; 每条外线 ● $\xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 ● $\xrightarrow{\mathbf{k}}$ ▲ 提供因子 $m^S(\mathbf{p})$ 或 $m^S(\mathbf{k})$; 这里 [对 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$];

$$m^S(\mathbf{k}) \equiv (1 - ze^{-\beta k^2})^{-1}, \eta^S(\mathbf{k}) \equiv e^{-\eta k^2} m^S(\mathbf{k}), \zeta^S(\mathbf{k}) \equiv ze^{-\zeta k^2} m^S(\mathbf{k});$$

对于 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$, 分别以 η^* , ζ^* 代替 ζ 和 η .

(3) 对所有内线动量求和.

(4) 再乘以 S^{-1} , S 为图形的对称数.

图 4 中给出至数量级 $O(a^2)$ 的全体收缩图形. 容易验证, 图 4 中 $G(\mathbf{p}, \tau)$ 的首项 $\eta^S(\mathbf{p})$ 即为自由粒子格临函数.

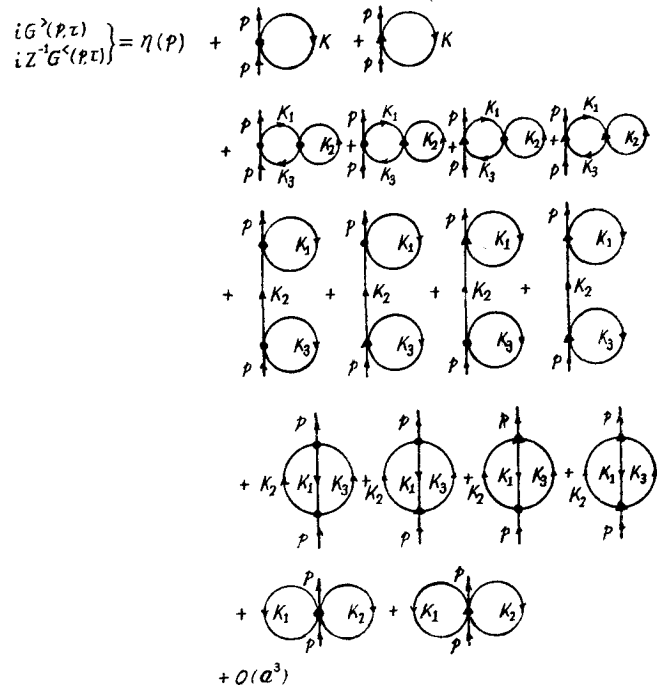


图 4

四、费米统计情形的图形规则

在费米统计情形,按照 LY I 规则 B, 首先要以

$$\begin{aligned} \langle l'_1 \cdots l'_a | r_a^A | l_1 \cdots l_a \rangle &= \sum_{\mathcal{P}} (\delta_{\mathcal{P}} \mathcal{P} \langle l'_1 \cdots l'_a | | U_a^B | l_1 \cdots l_a \rangle = \\ &= \sum_{\mathcal{P}} \langle l'_1 \cdots l'_a | U_a^B (\delta_{\mathcal{P}} \mathcal{P}^{-1} | l_1 \cdots l_a \rangle) \end{aligned}$$

代替上节的 r_a^s 矩陣元。现在还需要考虑到粒子有自旋 J , 因此动量变数 \mathbf{p}, \mathbf{k} 要代之以 $q \equiv (\mathbf{p}, m), l \equiv (\mathbf{k}, \mu), m$ 或 $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm J$ 为自旋坐标。同时按照 LY I 规则 B, 将 U^A 矩陣元用 r_a^A 矩陣元表示后, 每个相连项还将有正负号, 因此, 每个图形的贡献还有符号因子。注意到这几点后, 上节的讨论可以完全重复进行, 结果得到下列规则:

规则 III

(1) 每个 α 级“●”顶点提供因子

$$\langle l_{A_1} \cdots l_{A_a} | r_a^A(\eta) | l_{B_1} \cdots l_{B_a} \rangle \text{ [对 } iG^>(\mathbf{p}, \tau)],$$

$$\text{或 } \langle l_{A_1} \cdots l_{A_a} | r_a^A(\zeta^*) | l_{B_1} \cdots l_{B_a} \rangle \text{ [对 } -iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)];$$

每个 α 级“▲”顶点提供因子

$$\langle l_{C_1} \cdots l_{C_a} | r_a^A(\zeta) | l_{D_1} \cdots l_{D_a} \rangle \text{ [对 } iG^>(\mathbf{p}, \tau)],$$

$$\text{或 } \langle l_{C_1} \cdots l_{C_a} | r_a^A(\eta^*) | l_{D_1} \cdots l_{D_a} \rangle \text{ [对 } -iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)].$$

(2) 每条内线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{k}} \bullet$ 提供因子 $\zeta^A(\mathbf{k})$; 每条外线 $\triangle \xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 $\triangle \xrightarrow{\mathbf{k}}$ 提供因子 $\eta^A(\mathbf{p})$ 或 $\eta^A(\mathbf{k})$; 每条外线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{k}} \triangle$ 提供因子 $m^A(\mathbf{p})$ 或 $m^A(\mathbf{k})$; 这里 [对 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$]

$$m^A(\mathbf{k}) \equiv (1 + ze^{-\beta k^2})^{-1}, \eta^A(\mathbf{k}) \equiv e^{-\eta k^2} m^A(\mathbf{k}), \zeta^A(\mathbf{k}) \equiv ze^{-\zeta k^2} m^A(\mathbf{k});$$

对于 $-iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$ 分别以 η^*, ζ^* 代替 ζ 和 η 。

(3) 对所有内线动量和自旋坐标求和。

(4) 再乘以因子 $\pm(-1)^{a+b} S^{-1}$; S 为图形的对称数, a = 外线及内线提供的 η^A 因子的总数, b = $\sum \alpha \Delta_a$ = “▲”顶点的总级数。将所有 r_a^A 矩陣元一起考虑, 由全部入射态中动量(及自旋)排列次序换成全部出射态中动量(及自旋)排列次序的置换, 因偶或奇而有正号或负号。

无论原始图形或收缩图形的画法, 对二种统计完全相同, 图 4 也适用于费米统计的情形。

五、存在凝聚相的玻色系统

为了处理有凝聚相存在的玻色系统, 我们引用李、杨的 x -系综 (LY V), x -系综的密度矩陣是

$$\rho^x = \frac{(x\Omega)^{n_0}}{n_0!} \exp[-\beta(H - \mu N) - x\Omega], \quad (5.1)$$

其中 n_0 是零动量粒子数算符, Ω 是系统所占体积, 而 x 是一参数, 它由 LY V 的定理 1 确定。应用(5.1), 并令

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^R | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle &= \frac{(x\Omega)^R}{R!} \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle, \\ \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^L | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle &= \frac{(x\Omega)^L}{L!} \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

R 和 L 分别为入射态 $|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N\rangle$ 和出射态 $\langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N|$ 中等于零的动量个数。按照第二节中的处理方法, 可得

$$G(\mathbf{p}, \tau) = \begin{cases} G^>(\mathbf{p}, \tau), & \tau > 0; \\ G^<(\mathbf{p}, \tau), & \tau < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} G^>(\mathbf{p}, \tau) &\equiv -iZ^{x-1}e^{-xQ} \sum_N \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}^R(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle, \\ G^<(\mathbf{p}, \tau) &\equiv -iZ^{x-1}e^{-xQ} \sum_N \frac{z^{N+1}}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} | W_{N+1}^L(\zeta^*) \times \\ &\quad \times | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^B(\eta^*) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle, \end{aligned} \right\} (5.4)$$

Z^x 为 x -系综的配分函数

$$Z^x = \text{Sp } \rho^x.$$

对 W^R , W^L 和 W^B 矩阵元进行和(2.13)式相同的 Ursell 展开后,得相连项展式

$$\left. \begin{aligned} iG^>(\mathbf{p}, \tau) &= \sum_N \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \{ \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N | W_N^B(\zeta) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} | W_{N+1}^R(\eta) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} \rangle \}_c; \\ iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau) &= \sum_N \frac{z^N}{N!} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N} \sum_{\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N} \{ \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \mathbf{p} | W_{N+1}^L(\zeta^*) | \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N \mathbf{p} \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N | W_N^B(\eta^*) | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N \rangle \}_c. \end{aligned} \right\} (5.5)$$

LYV 中已经给出了相应于 W_N^R 和 W_N^L 的 U^R 和 U^L 矩阵元用 r_a^s 矩阵元表示的规则 (LYV 规则 C 或 C'). 应用这个规则, 在写下各相连项的详细表式后, 和第二节中一样, 可以画出相应的原始图形. 不过现在我们割断具有等于零的 k 动量的粒子线而改用一进一出的一对波纹线来表示, 因为对于已经被指定为零的动量不再求和. (所有具有动量 k' 和 不等于零的动量 k 的粒子线仍为内线.) 为具体起见, 让我们考虑 $G^>$. 图 5 的上面三行是 $G^>$ 的原始图形的一些例子.

下面对原始图形进行三个步骤的收缩.

(一) 在进行收缩之前首先要计算每种结构的原始图形的系数. 对于任意原始图形, 定义

$\Delta(v, \alpha) =$ 图中有 v 条出射实线之 α 级“▲”顶点数;

$O(r, \alpha) =$ 图中有 r 条入射实线之 α 级“●”顶点数.

如第三节中所述, 有同一结构的各原始图形由二类置换产生, 其总数是 $N! \prod (\alpha!)^{\Delta(v, \alpha)}$. 这许多图形并非全是拓扑不等, 其中还特别要考虑到, 按 LYV 规则 C, 在用 r_a^s 矩阵元来展开 U^R 矩阵元时, $\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N$ 中零动量间的交换不能重复计入. 当 $\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N$ 固定时, 只有同一“▲”顶点上的出射线可互相交换. 因此如令 S_1 为只考虑 $\mathbf{k}'_1 \cdots \mathbf{k}'_N$ 和 不等于零的 $\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_N$ 的各种置换而发生的每个图形的重复次数, S_1 称为原始图形的对称数, 则总共每个图形的重复次数为

$$S_1 \prod [(\alpha - \nu)!]^{\Delta(v, \alpha)}. \quad (5.6)$$

图 5 上面三行的每个图形下括号中数字是它的对称数 S_1 . 于是有同一结构而拓扑不等的原始图形数为

$$\frac{N! \prod (\alpha!)^{\Delta(v, \alpha)}}{S_1 \prod [(\alpha - \nu)!]^{\Delta(v, \alpha)}}, \quad (5.7)$$

每个图形有系数 $z^N/N!$. 根据 LYV 规则 C, 还有因子

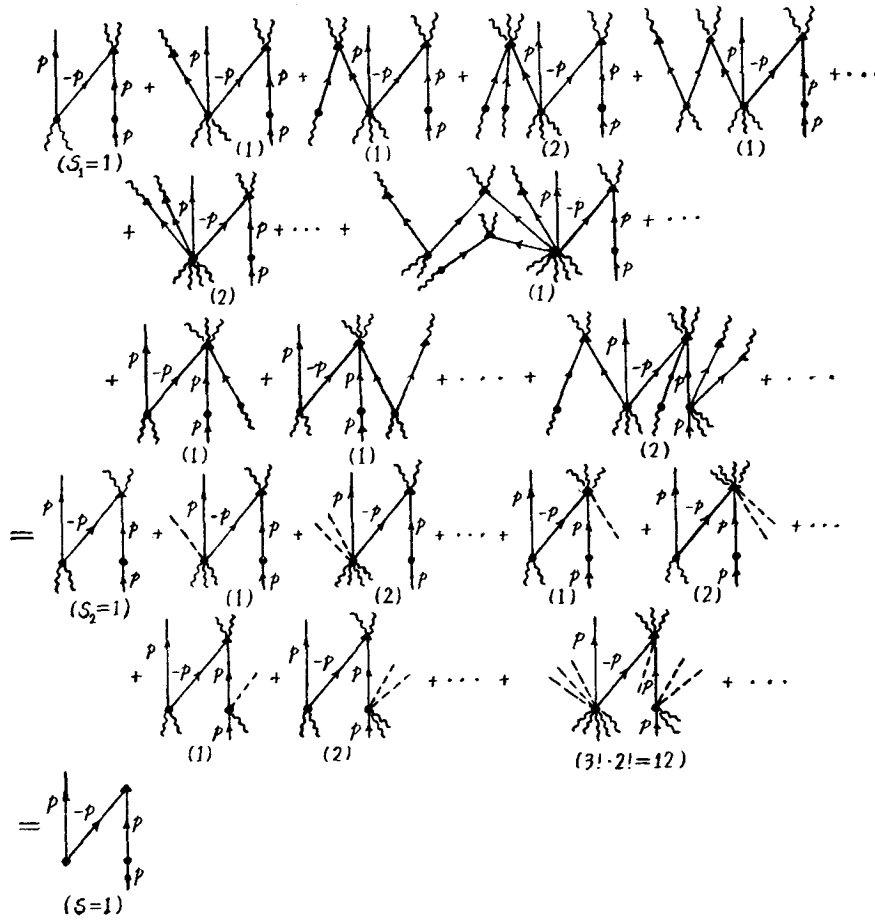


图 5

$$\frac{(x\Omega)^{\Sigma(a-r)O(r,a)}}{\prod[(\alpha-r)!]^{O(r,a)}}$$

又如果把“▲”顶点的贡献换成 r_a^s 矩阵元, 应除以 $\prod(\alpha!)^{\Delta(v,a)}$. 因此, 如每种结构的原始图形中只采用一个, 则它对 $G^>$ 的贡献是“●”和“▲”顶点的相应因子 [$r_a^s(\zeta)$ 和 $r_a^s(\eta)$ 矩阵元] 的乘积再乘上下面系数

$$C = \frac{x^N(x\Omega)^{\Sigma(a-r)O(r,a)}}{S_1 \prod[(\alpha-r)!]^{O(r,a)} \prod[(\alpha-v)!]^{\Delta(v,a)}} \quad (5.8)$$

(二) 现在进行第一步收缩. 如图 6 所示, 定义 A 和 B 为两类“树枝”状图形之和. 用 (5.8) 式, 具体写出 [至 $O(a^2)$]

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{xz\Omega}{1!2!} \langle 00 | r_2^s(\zeta) | 00 \rangle + \frac{(xz\Omega)^2}{2!1!1!3!} \langle 000 | r_3^s(\zeta) | 000 \rangle + \\ &\quad + \frac{(xz\Omega)^2}{2!2!1!} \langle 00 | r_2^s(\zeta) | 00 \rangle \langle 00 | r_2^s(\eta) | 00 \rangle + O(a^3), \\ B &= 1 + \frac{xz\Omega}{1!2!} \langle 00 | r_2^s(\eta) | 00 \rangle + \frac{(xz\Omega)^2}{2!1!1!3!} \langle 000 | r_3^s(\eta) | 000 \rangle + \\ &\quad + \frac{(xz\Omega)^2}{2!2!1!} \langle 00 | r_2^s(\eta) | 00 \rangle \langle 00 | r_2^s(\zeta) | 00 \rangle + O(a^3). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

根据式(3.4), A 和 B 与体积 Ω 无关, 它们是收敛级数.

现在把某个顶点上挂有各种“树枝”而其他构造相同的各种原始图形相加, 其结果是在该顶点上挂有一条代表 A 或 B 的虚线的一个图形. 例如图 5 中上面三行的图形归并成第四、五行的各图形.

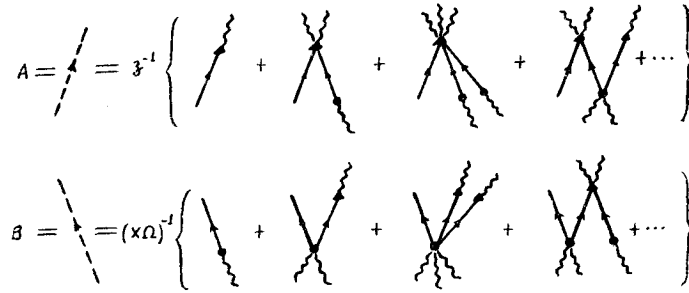


图 6

对于经过第一步收缩所得的由实线、波纹线和虚线构成的图形, 亦可定义对称数 S_2 (仍不计入波纹线的交换所引起的重复, 但计入虚线的交换所产生的重复). 图 5 中第四、五行的每个图形下括号中数字即为其 S_2 . 容易看出, 如以 S_2 代替 S_1 , 则式(5.8)仍适用于经过第一步收缩的图形. 此外, 每条连在“●”顶点上的虚线有因子 zA , 而每条连在“▲”顶点上的虚线有因子 $(x\Omega)B$.

(三) 继续作第二步收缩. 对于经过第一步收缩所得的每个图形, 定义

$$\left. \begin{aligned} \Delta(u, v, \alpha) &= \text{有 } u \text{ 条入射实线和 } v \text{ 条出射实线的 } \alpha \text{ 级“▲”顶点数;} \\ O(r, s, \alpha) &= \text{有 } r \text{ 条入射实线和 } s \text{ 条出射实线的 } \alpha \text{ 级“●”顶点数.} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

显然下面关系成立

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha - r)O(r, s, n) + \Sigma(\alpha - u)\Delta(u, v, \alpha) &= \\ &= \Sigma(\alpha - s)O(r, s, \alpha) + \Sigma(\alpha - v)\Delta(u, v, \alpha). \end{aligned} \quad (5.11)$$

现在抹去图形中所有虚线和波纹线, 对于这样所得的图形, 再定义一个对称数 S , 则显然有

$$S_2 = S \cdot \prod [(n - s)!]^{O(r, s, \alpha)} \prod [(n - u)!]^{\Delta(u, v, \alpha)}. \quad (5.12)$$

于是, 我们可以一般地写下任何一个经第一步收缩所得图形的贡献如下:

$$\begin{aligned} &S^{-1} z^{\Sigma \alpha \Delta(u, v, \alpha) + \Sigma (a-s) O(r, s, \alpha)} \times \\ &\times \prod \left[\frac{(x\Omega)^{\alpha-r} A^{\alpha-s}}{(\alpha-r)! (\alpha-s)!} \langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_s} 0 \cdots 0 | r_a^s(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_r} 0 \cdots 0 \rangle \right]^{O(r, s, \alpha)} \times \\ &\times \prod \left[\frac{(x\Omega)^{\alpha-u} B^{\alpha-u}}{(\alpha-u)! (\alpha-v)!} \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_v} 0 \cdots 0 | r_a^s(\zeta) | \mathbf{k}'_{D_1} \cdots \mathbf{k}'_{D_u} 0 \cdots 0 \rangle \right]^{\Delta(u, v, \alpha)} = \\ &= S^{-1} z^{\Sigma \alpha \Delta(u, v, \alpha)} \prod \left[\frac{(xz\Omega A)^{\frac{\alpha-r+s}{2}} (zB)^{\frac{r-s}{2}}}{(\alpha-r)! (\alpha-s)!} \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_s} 0 \cdots 0 | r_a^s(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_r} 0 \cdots 0 \rangle \right]^{O(r, s, \alpha)} \times \end{aligned}$$

$$\times \prod \left[\frac{(xz\Omega B)^{\frac{\alpha-u+v}{2}} (zA)^{\frac{v-u}{2}}}{(\alpha-u)!(\alpha-v)!} \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\nu} 0 \cdots 0 | r_\alpha^s(\zeta) | \mathbf{k}_{D_1} \cdots \mathbf{k}_{D_u} 0 \cdots 0 \rangle \right]^{\Delta(u, \nu, \alpha)}; \quad (5.13)$$

以上利用了式(5.11).

如图5第四、五行的各图形,彼此仅仅相差在每个顶点上挂有不同对数的虚线和波纹线.将每一种抹去虚线和波纹线后结构完全一致的图形相加,并且就用所得的图形来表示求和的结果.例如图5中第四、五行的图形相加后得第六行的一个图.自然这样的图形的对称数就是上面定义的 S .图形相加的过程相当于在式(5.13)中将乘积号下的每个因子对 α 从 $\alpha \geq (r$ 和/或 $s)$ [或 $\alpha \geq (u$ 和/或 $v)$]到 $\alpha = \infty$ 求和.于是经过第二步收缩所得图形的每个 (r, s) 级“●”顶点和每个 (u, v) 级“▲”顶点分别对应于因子

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_s} | r_{rs}(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_r} \rangle &\equiv (zB)^{\frac{r-s}{2}} \sum_{\alpha \geq (r, s)} \frac{(xz\Omega A)^{\alpha - \frac{1}{2}(r+s)}}{(\alpha-r)!(\alpha-s)!} \times \\ &\times \langle \mathbf{k}'_{A_1} \cdots \mathbf{k}'_{A_s} 0 \cdots 0 | r_\alpha^s(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_r} 0 \cdots 0 \rangle; \\ z^u \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\nu} | r_{uv}(\zeta) | \mathbf{k}'_{D_1} \cdots \mathbf{k}'_{D_u} \rangle &\equiv z^u (zA)^{\frac{v-u}{2}} \sum_{\alpha \geq (u, \nu)} \frac{(xz\Omega B)^{\alpha - \frac{1}{2}(u+\nu)}}{(\alpha-u)!(\alpha-\nu)!} \times \\ &\times \langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\nu} 0 \cdots 0 | r_\alpha^s(\zeta) | \mathbf{k}_{D_1} \cdots \mathbf{k}_{D_u} 0 \cdots 0 \rangle. \end{aligned} \right\} (5.14)$$

除顶点的因子以外,整个图形有因子 S^{-1} .

我们总结一下通过以上两步收缩后图形之构成方式.图形包含 $O(r, s)$ 个 (r, s) 级“●”顶点及 $\Delta(u, v)$ 个 (u, v) 级“▲”顶点, $r+s \geq 2, u+v \geq 2$.在每个 (r, s) 级“●”顶点 $[(u, v)$ 级“▲”顶点]上有 $r[u]$ 条入射线和 $s[v]$ 条出射线.连接这些顶点的共有

$$\Sigma r O(r, s) - 1 = \Sigma v \Delta(u, v) \quad (5.15)$$

条 \mathbf{k} 动量内线(自“▲”顶点至“●”顶点和

$$\Sigma s O(r, s) - 1 = \Sigma u \Delta(u, v) \quad (5.16)$$

条 \mathbf{k}' 动量内线(自“●”顶点至“▲”顶点).此外,还有一进一出两条 \mathbf{p} 动量外线连在“●”顶点上.必须注意,所有的 \mathbf{k} 动量均不能为零,但 \mathbf{k}' 动量可以是零或不是零,应根据每个顶点上入射线和出射线总动量守恒来确定.

(四)最后,和第三节中相似地,可对在各粒子线上增添一对对“▲”和“●”(1,1)顶点的图形进行收缩.经过这一步收缩后的图形称为收缩图形.收缩时应注意,在动量 \mathbf{k}' 等于零的 \mathbf{k}' 线上不可能添加一对对的(1,1)顶点.这样,我们就得到下面的规则:

规则IV

在计算 $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$ 的每个收缩图形的贡献时:

(1) 每个 (r, s) 级“●”顶点贡献因子 $\langle \mathbf{k}_{A_1} \cdots \mathbf{k}_{A_s} | r_{rs}(\eta) | \mathbf{k}_{B_1} \cdots \mathbf{k}_{B_r} \rangle$; 每个 (u, v) 级“▲”顶点贡献因子 $\langle \mathbf{k}_{C_1} \cdots \mathbf{k}_{C_\nu} | r_{uv}(\zeta) | \mathbf{k}_{D_1} \cdots \mathbf{k}_{D_u} \rangle$.

(2) 每条内线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{k}} \bullet$ 提供因子 $\zeta^x(\mathbf{k})$; 每条外线 $\triangle \xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 $\triangle \xrightarrow{\mathbf{k}} \triangle$ 提供因子 $\eta^x(\mathbf{p})$ 或 $\eta^x(\mathbf{k})$; 每条外线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{p}}$ 或内线 $\triangle \xrightarrow{\mathbf{k}}$ 或动量不等于零的内线 $\bullet \xrightarrow{\mathbf{k} \neq 0} \triangle$ 提供因子 $m^x(\mathbf{p})$ 或 $m^x(\mathbf{k})$, 动量等于零的内线 $\bullet \xrightarrow{0} \triangle$ 提供因子1; 这里

$$m^x(\mathbf{k}) \equiv [1 - z \langle \mathbf{k} | r_{11}(\zeta) | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | r_{11}(\eta) | \mathbf{k} \rangle]^{-1},$$

$$\eta^*(\mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k} | r_{11}(\eta) | \mathbf{k} \rangle m^*(\mathbf{k}),$$

$$\zeta^*(\mathbf{k}) \equiv z \langle \mathbf{k} | r_{11}(\zeta) | \mathbf{k} \rangle m^*(\mathbf{k}).$$

(3) 对所有内线动量求和.

(4) 再乘以因子 S^{-1} , S 为图形之对称数.

(5) 在计算 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$ 时, 在每个图形中把所有粒子线的箭头反向, 仍用上列规则, 不过处处要以参数 ζ^* 和 η^* 代替 η 和 ζ , 并且在计算内线因子时互换 $\bullet \rightarrow \blacktriangle$ 和 $\blacktriangle \rightarrow \bullet$ 的作用(即 $\bullet \rightarrow \blacktriangle$ 内线的动量现在恒不等于零, 而 $\blacktriangle \rightarrow \bullet$ 内线的动量可为零或不为零).

至数量级 $O(a)$, $iG^>(\mathbf{p}, \tau)$ 或 $iz^{-1}G^<(\mathbf{p}, \tau)$ 等于 $\eta^*(\mathbf{p})$ 加上图 4 中第一行的二个图形, 至 $O(a^2)$ 再增加 28 个图形. 容易验证, 在自由系统情形, $\eta^*(\mathbf{p})$ 成为自由格林函数.

参 考 文 献

- [1] Абрикосов, А. А., Горьков, Л. и Дзялошинский, И. Е., 统计物理学中的量子场论方法 (科学出版社, 1964).
- [2] Беляев, С. Т., *ЖЭТФ*, **34** (1958), 433.
- [3] Галицкий, В. М., *ЖЭТФ*, **34** (1958), 151.
- [4] Mohling, F., *Phys. Rev.*, **122** (1961), 1043; *ibid.*, 1062; **124** (1961), 583; **135** (1964), A876. Pathria, R. K. and Kawatra, M. P., *Prog. Theor. Phys.*, **27** (1962), 638; 1085.
- [5] Cohen, M. and Feynman, R. P., *Phys. Rev.*, **107** (1957), 13.
- [6] Kubo, R., *Boulder Lectures in Theoretical Physics*, Vol. I, p. 120.
- [7] Lee, T. D. and Yang, C. N. *Phys. Rev.*, **113** (1959), 1165; **116** (1959), 25. **117** (1960), 12, 22, 897.
- [8] Montroll, E., *Boulder Lectures in Theoretical Physics*, Vol. III, p. 276.

THE BINARY COLLISION EXPANSION OF DOUBLE-TIME-TEMPERATURE-DEPENDENT GREEN'S FUNCTIONS

C. H. TSAI H. H. HSU

(Department of Physics, Nanking University)

ABSTRACT

The method of binary collision expansion has been employed to obtain series developments in powers of the scattering length between two particles for double-time-temperature-dependent Green's functions of statistical mechanics. We have studied the cases of Bose and Fermi statistics as well as the case of a Bose system in the presence of a condensed phase, and have established rules for computation of the successive terms of expansion with the aid of diagrams. The present method is applicable to many particle systems with strong and short-ranged mainly repulsive two-body interactions.