第25卷 第6期 物理学报 Vol. 25, No. 6
1976年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1976

关于声散射声*

钱祖文

提 要

关于传播方向不同的两有限束的相互作用问题,历年来曾存在着分歧,分歧的焦点是:在公共区之外有没有二阶散射场? Ingard[1] 用间断函数

$$\rho=\begin{cases}e^{j(\omega t-ky)}, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

表示有限束(即所谓完全准直束),通过计算求得:在公共区外有二阶散射场. Westervelt[3,4] 讨论了两列平面波的相互作用,却得出否定的结论. 实验上也同样出现分歧. AL-Temimi[6] 将空间分成内外两部分公共区,分别求解 Westervelt 方程,将所得到的解在边界上连接. 结果表明,公共区之外有二阶散射场. 此外,他还认为上述两种相反的结论能够相对地一致.

本文讨论两束正交简谐波,将上述间断函数用二个阶跃函数之差表示,代人 Westervelt 方程求解. 结果表明,由这种理想有限束所构成的二阶散射场不是真正的散射场,而是由于按界面分布的 δ 函数性质的偶极源与平面波相互作用所产生的场,它随着这种界面的消失而熄灭. 而这种偶极面源如文献[3,4]所述是人为的,它是由于采用了不满足齐次波动方程的间断函数来表示一阶声场所带来的结果. 本文进一步指出,从这种有限束出发求得的解却和文献[6]的结果相同. 这就说明,上述两种相反的结论是不能相对地一致的. 本文还对文献[6]的连接条件作了分析,并指出这些条件是不恰当的. 根据本文的结果,作者认为用上述间断函数来表示有限束从而计算参量发射和接收阵也是有影响的.

一、引 言

关于声散射声的问题发表的文章很多,但一直存在着根本的分歧,本文不拟对所有的文章多加评述,只是集中地从理论上讨论分歧的焦点,即两列正交声波在它们相交的公共区之外有无二阶散射场?

近年来提出了一种高指向性小尺寸的参量发射、接收阵,其原理就是声散射声. 因此弄清这个问题,对于使声纳小型、现代化有一定的实际意义.

1956年 Ingard[1] 等人首先应用 Lighthill[2] 理论来研究这个问题,一阶声场是"完全准直"束,其表示式是一个间断函数,例如沿 y 方向传播的准直束为

$$\rho=\begin{cases}e^{j(\omega t-ky)}, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases} \tag{1}$$

其中 ρ 为密度场. 他们计算的结果表明:两正交准直束的相互作用区之外有频率为 $\omega_1\pm\omega_2$ 的二阶散射,并在两组多普勒角的方向上散射场最大,但它们的实验值比理论值小很多.

* 1974年3月22日收到; 1976年3月26日收到修改稿.

后来 Westervelt[3,4] 根据同一理论讨论了类似的问题，推导出自己的方程（原 Eckart 方程）。由这个方程作出如下的推论：相互作用的垂直"局部"平面波在公共区之外没有二阶散射场。应当指出，Westervelt 方程讨论的是两列平面波1)，因此二者所讨论的公共区是有本质的不同。

实验结果也是分歧的由来，其后如文献[10]的结果否定存在二阶散射，而文献[5,11]等却有相反的结果。

显然，(1)式表示的完全准直束，其一阶场在 $|x|=a$ 处并不满足齐次波动方程，即声束边缘声压与速度场不连续[4]。为了解决这个问题，AL-Temimi[6] 将空间分成相互作用区内外两部分，将传播方向垂直的两束平面波都用(1)式表示，代入 Westervelt 方程，并在相互作用区内外分别求解。将得到的解在边界上连接，其连接条件是：二阶声压和二阶法向速度分别在边界上连续。最终结果表明，在公共区的外边界有二阶波阵面。再根据惠更斯原理，断言存在二阶散射场。他还作了进一步的计算，企图将上面提到的分歧相对地统一起来。

本文认为：(1)公共区之外不存在按体积分布的源函数所产生的二阶散射场，仅有由于引入完全准直声束而带来了间断界面所贡献的场，这种场随着界面的消失而熄灭，并就此对文献[1]和[3,4]进行比照；(2) AL-Temimi 的连接条件是不恰当的，他求得的解与用不满足波动方程的阶跃函数表示一阶声场时求得的解是相同的，而这种解所描写的场恰恰是由于用(1)式表示一阶场而人为地引进了一个 δ 函数性质的偶极边界分布源的贡献2)。

二、用阶跃函数表示一阶声场时两正交束的相互作用

上述(1)式所表示的有限束不是处处满足齐次波动方程，对二维空间问题它可以用两个广义函数之差来表示，即

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= e^{j(\omega_1 t-k_1 x)}[U(y+b)-U(y-b)],\\ \rho_{12} &= e^{j(\omega_2 t-k_2 y)}[U(x+a)-U(x-a)].\end{aligned} \tag{2}$$

上式中 ρ_{11} 为沿 x 方向传播的一阶密度场，ρ_{12} 为沿 y 方向传播的一阶密度场，k_1, k_2 分别是 x, y 方向传播的一阶场波数，a 和 b 是束的半宽度，$U(x)$ 是阶跃函数，

$$U(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3}$$

因为 $\partial U(x)/\partial x=\delta(x)$ 为狄拉克函数，因此(20)式所表示的一阶场实际上满足下述非齐次波动方程，即

$$\begin{aligned}\nabla^2\rho_{11}+k_1^2\rho_{11} &= e^{j(\omega_1 t-k_1 x)}\frac{\partial}{\partial y}[\delta(y+b)-\delta(y-b)],\\ \nabla^2\rho_{12}+k_2^2\rho_{12} &= e^{j(\omega_2 t-k_2 y)}\frac{\partial}{\partial x}[\delta(x+a)-\delta(x-a)].\end{aligned} \tag{4}$$

1) Berktay[5] 等即持有这种看法，并认为 Westervelt 的推论是否适用于准直束还有待证实。这也是本文要探讨的内容之一。

2) (1)式带来人为面源首先是 Westervelt[3,4] 指出的，因他未作细致的讨论，似乎没有引起以后某些作者[6,11]的注意，故本文将解析地证明，它是产生二阶场的面源。

由上式可见,(2)式表示的是不满足齐次波动方程的有限束，由(4)式可见，它在边界上附加了一个 δ 函数性质的偶极分布源，用它来计算声散射声的问题是不恰当的. 为了弄清这种面源给二阶场带来的影响,以便澄清声散射声理论中历来存在的根本分歧,下面仍用(2)式来表示一阶声场,求解 Westervelt 方程，并将结果和 AL-Temimi 的结果进行比较.

两个一阶场互相垂直时，可以证明（证明从略）Westervelt[3] 方程是

$$\nabla^2\rho_s + k_0^2\rho_s = \rho_0^{-1}\{(1-B)\nabla^2(\rho_{11}\rho_{12}) + k_0^2(\rho_{11}\rho_{12})\}, \tag{5}$$

式中 k_0 是二阶场相互作用波的波数，它等于 $k_1 \pm k_2$，“±”号对应于和差频，ρ_0 是平衡密度场，c_0是声速，ρ_s 为二阶相互作用密度场，B 是非线性参数,且

$$B = \rho_0 c_0^{-2}\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}.$$

将 ρ_s 展成二维傅氏积分,即

$$\rho_s = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_s(k, K)e^{-i(kx+Ky)}\,dk\,dK, \tag{6}$$

式中 k, K 分别是与两个坐标空间变量相对应的傅氏积分意义下的波数空间变量. 将(2), (6)式代人(5)式经过一些数学处理解出 $\phi_s(k, K)$，再代回(6)式求出二阶场的解为

$$\rho_s(x, y) = W(x, y) + f(x, y), \tag{7}$$

而[1)]

$$W(x, y) = \frac{1}{\rho_0}\left\{(1-B) \pm \frac{Bk_0^2}{2k_1k_2}\right\}[U(x+a) - U(x-a)][U(y+b) - U(y-b)]e^{-ik_2y\mp k_1x}, \tag{8a}$$

$$f(x, y) = \pm\frac{Bk_0^2}{2\rho_0k_1k_2}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\pm 2k_1k_2}{k_0^2-k^2-K^2}\,\frac{\sin(K-k_2)b}{\pi(K-k_2)}\,\frac{\sin(k\mp k_1)a}{\pi(k\mp k_1)}\,e^{-ikx-iKy}\,dk\,dK - [U(x+a)-U(x-a)][U(y+b)-U(y-b)]e^{\mp ik_1x-ik_2y}\right\}. \tag{8b}$$

这里和以后将略去与时间有关的因子,“±”号表示二阶场的和差频,和频取上面的符号,差频取下面的符号. 由(7)式可知,二阶场由二部分组成. $W(x, y)$ 是局部场,只是公共区内部不为零. 它很易从文献[3]中的波动方程(即本文(5)式)求解得到即为(8a)式.当一阶声场都是平面波时,全部二阶场只有 $W(x, y)$. 当两个一阶场为完全准直束时,就多出一项附加场 $f(x, y)$. 下面要探讨场的性质.

首先在公共区内部研究 $\rho_s(x, y)$. 这时阶跃函数项是1,由(7)和(8)式可知,

$$W(x, y) = \frac{1}{\rho_0}\left[(1-B) \pm \frac{Bk_0^2}{2k_1k_2}\right]e^{-ik_2y\mp ik_1x}. \tag{9}$$

这即为 Westervelt 局部场在公共区的表示式. 而 $f(x, y)$ 一般说来不一定是零. 但当 a, $b\to\infty$ 时，根据 δ 函数理论[12]，任何逐段光滑的函数 $f(x)$，它在$(-\infty, \infty)$内绝对可积，则有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin N(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\,dx = f(x_0). \tag{10}$$

1) (8a) 式花括号中的第二项以及 (8b) 式花括号中的第二项都可乘以同一常数 C，最终结果完全相同，但这时物理意义不清楚.

利用这个结果于(8b)式，可以证明(从略)所要求的条件在我们这里是满足的．由此可得

$$\lim_{a,b\to\infty} f(x, y) = \left[\frac{\pm 2k_1k_2}{k_0^2 - k^2 - K^2} - 1\right]_{\substack{k=\pm k_1\\ K=k_2}} \frac{\pm Bk_0^2}{2\rho_0 k_1 k_2} e^{-jk_2y\mp jk_1x} = 0.$$

因此当 $a, b\to\infty$，即当公共区边界趋向无限远时，$f(x, y)$逐渐消失，公共区内只有 $W(x, y)$．由此可见，$f(x, y)$ 不是由体积分布源产生的场．否则，根据 Lighthill[2] 理论，声散射声是由公共区内按体积分布的四极子辐射源在场点的叠加，当 a, b 增大时，四极子源的数目增多，则公共区内总有一些场点其二阶场 $f(x, y)$ 不等于零．但实际上，当 $a, b\to\infty$ 时，公共区内任一有限远点的 $f(x, y)$ 都为零，这就意味着产生 $f(x, y)$ 的辐射源是在边界上，而不是在体积内部．因为只有这样，随着 $a, b\to\infty$ 时，辐射源离场点愈来愈远，对场点的贡献逐渐消失．

现在讨论公共区之外的场．再观察(8)式，由于阶跃函数项为零，$W(x, y)=0$，$f(x, y)$ 中只剩下大括号中第一项．公共区之外的远场点的数学表示是 $|x\pm a|\to\infty$，$|y\pm b|\to\infty$，而 $|x|>a$，$|y|>b$．将这个结果代入(8a)和(8b)式，注意 $f(x, y)$ 大括号中第二项恒为零，而在第一项中的指数项由于

$$e^{-jKy-jkx} = (\cos kx - j\sin kx)(\cos ky - j\sin ky),$$

故在(8b)式中将三角函数的乘积用三角函数之和表示，利用(10)式可得(见附录)

$$\lim_{\substack{|x\pm a|\to\infty\\ |y\pm b|\to\infty}} f(x, y) = 0.$$

应当提一下，$|x\pm a|\to\infty$，$|y\pm b|\to\infty$ 表示场点只要远离边界，不管公共区的体积有多大，$f(x, y)$ 的远场辐射总是零．此外，由附录以及下面的三、四节可以看出，当 $|x|$，$|y|$ 与 a, b 比较不是很大时，$f(x, y)$ 不一定是零1)，这也说明 $f(x, y)$是由辐射面源的贡献．

从上面的讨论可知，两互相垂直的完全准直束相互作用在空间产生两部分二阶场，一部分是 Westervelt 局部场，它在公共区内不为零；另一部分是附加场，而后一部分场的辐射源是在界面上．由(4)式可知，准直束不满足齐次波动方程，在边界上是有源的，这种面源与另一平面波束相互作用产生了二阶场的新辐射面源．

此外，我们回忆一下 Lighthill[2] 理论及 Westervelt[3,4] 理论都要求一阶场满足齐次波动方程，如果能找到满足这一条件的准直束，则(4)式右端一定为零，面源不存在，$f(x, y)$ 一定为零．

由此可见，声散射声问题的根本分歧是存在的，这是由于用完全准直束作为一阶声场的理论表示式所引起的．因而任何使文献 [1] 和 [3, 4] 的分歧得到相对统一的企图都是徒劳的．

三、计 算 $f(x,y)$

将(8b)式中的正弦项写成指数项，令

1) 文献[5]认为只要公共区无限大时，文献[1]和[3]的结论一致．这在远离边界的场点我们也导出这一结果．尽管如此，还不应忽视二者所用的一阶场不同，文献[1]所用的一阶场有人为面源，致使公共区边界附近的场并不为零．

$$A_1 = e^{-jk_2b\pm jk_1a} \qquad A_2 = A_1^*,$$
$$A_3 = -e^{-jk_2b\mp jk_1a}, \qquad A_4 = A_3^*,$$
$$y - b = R_1\sin\varphi_1, \quad y + b = R_2\sin\varphi_2, \quad y - b = R_3\sin\varphi_3, \quad y + b = R_4\sin\varphi_4,$$
$$x + a = R_1\cos\varphi_1, \quad x - a = R_2\cos\varphi_2, \quad x - a = R_3\cos\varphi_3, \quad x + a = R_4\cos\varphi_4.$$

并作旋轴变换

$$\begin{matrix} k\cos\varphi_n + K\sin\varphi_n = s_n \\ k\sin\varphi_n - K\cos\varphi_n = t_n \end{matrix} \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

将这些关系式代人(8b)式可得

$$f(x, y) = \frac{\pm Bk_0^2}{8\rho_0\pi^2 k_1 k_2}\sum_{n=1}^{4} A_n$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_1^2 + k_2^2 - s_n^2 - t_n^2)e^{-js_nR_n}}{(k_0^2 - s_n^2 - t_n^2)(s_n\sin\varphi_n - t_n\cos\varphi_n - k_1)(s_n\cos\varphi_n + t_n\sin\varphi_n \mp k_2)}ds_n dt_n. \tag{11}$$

用留数定理求上式中的积分，可以化为在极点的贡献和两个超越积分的贡献，不难算出(计算从略)和频情况下(差频情况类似)解为

$$f(x, y) = \frac{Bk_0^2}{8\rho_0}\Big\{B_1 e^{-j\sqrt{k_0^2-k_2^2}\,x - jk_2 y} + B_2 e^{j\sqrt{k_0^2-k_2^2}\,x - jk_2 y}$$
$$+ B_3 e^{-jk_1x + j\sqrt{k_0^2-k_1^2}\,y} + B_4 e^{-jk_1 x - j\sqrt{k_0^2-k_1^2}\,y}\Big\}$$
$$+ \frac{Bk_0^2}{8\rho_0\pi k_1 k_2}\sum_{n=1}^{4} A_n[I_{s1}(R_n, \varphi_n) + I_{s2}(R_n, \varphi_n)], \tag{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= \frac{N_1(\varphi_1) - N_1(\varphi_4)}{\sqrt{k_0^2 - k_2^2}(\sqrt{k_0^2 - k_2^2} - k_1)} e^{j(k_1 - \sqrt{k_0^2-k_2^2})a} \\
&\quad + \frac{N_1(\varphi_2) - N_1(\varphi_3)}{\sqrt{k_0^2 - k_2^2}(\sqrt{k_0^2 - k_2^2} - k_1)} e^{-j(k_1 - \sqrt{k_0^2-k_2^2})a}, \\
B_2 &= \frac{N_2(\varphi_1) - N_2(\varphi_4)}{\sqrt{k_0^2 - k_2^2}(\sqrt{k_0^2 - k_2^2} + k_1)} e^{j(k_1 + \sqrt{k_0^2-k_2^2})a} \\
&\quad + \frac{N_2(\varphi_2) - N_2(\varphi_3)}{\sqrt{k_0^2 - k_2^2}(\sqrt{k_0^2 - k_2^2} + k_1)} e^{-j(k_1 + \sqrt{k_0^2-k_2^2})a}, \\
B_3 &= \frac{N_3(\varphi_1) - N_3(\varphi_3)}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}(\sqrt{k_0^2 - k_1^2} + k_2)} e^{-j(\sqrt{k_0^2-k_1^2} + k_2)b} \\
&\quad + \frac{N_3(\varphi_2) - N_3(\varphi_4)}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}(\sqrt{k_0^2 - k_1^2} + k_2)} e^{-j(\sqrt{k_0^2-k_1^2} + k_2)b}, \\
B_4 &= \frac{N_4(\phi_1) - N_4(\varphi_3)}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}(\sqrt{k_0^2 - k_1^2} - k_2)} e^{j(\sqrt{k_0^2-k_1^2} - k_2)b} \\
&\quad + \frac{N_4(\varphi_2) - N_4(\varphi_4)}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}(\sqrt{k_0^2 - k_1^2} - k_2)} e^{-j(\sqrt{k_0^2-k_1^2} - k_2)b},
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&N_1(\varphi)=-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi)+D_1(\varphi)+R_1(\varphi),\\
&N_2(\varphi)=-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi)+R_2(\varphi),\\
&N_3(\varphi)=-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi)-D_2(\varphi)-R_3(\varphi),\\
&N_4(\varphi)=-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi)-D_3(\varphi)-R_4(\varphi),\\
&R_1(\varphi)=U(\varphi)U\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0-\varphi\right),\\
&R_2(\varphi)=U\left(\varphi-\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)U\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_0-\varphi\right),\\
&R_3(\varphi)=U\left(\varphi-\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)U\left(\frac{3\pi}{2}-\theta_1-\varphi\right),\\
&R_4(\varphi)=U\left(\varphi-\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)U\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_1-\varphi\right),\\
&D_1(\varphi)=U(\varphi)U\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0-\varphi\right),\\
&D_2(\varphi)=U(\varphi)U\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1-\varphi\right),\\
&D_3(\varphi)=U(\varphi)U\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1-\varphi\right),
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

θ_0 和 θ_1 是两个多普勒角，且有

$$\sin\theta_0=\frac{k_2}{k_0},\quad \cos\theta_1=\frac{k_1}{k_0},$$

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

$I_{s1}(R_n,\varphi_n)$，$I_{s2}(R_n,\varphi_n)$ 是两个越过积分，当 k_0R_n 充分大时，它们都是柱面衰减的波，不同的情况有不同的表示式，限于篇幅就不一一列出.

由上述结果可见，当 $|x\pm a|\to\infty$，$|y\pm b|\to\infty$ 时，φ_1，φ_2，φ_3 和 φ_4 愈益接近相等，因而 $B_1=\cdots=B_4\to 0$. 故远场熄灭，近场存在. 从下节可见，这种近场即为文献[6]中所说的波阵面.

四、关于 AL-Temimi 的解及其连接条件

AL-Temimi[6] 处理两正交束的相互作用，在公共区内外解 Westervelt 方程，边界连接条件是

$$p_{s2}=p_{s1},\quad v_{s1}=v_{s2},$$

p_{si} 和 v_{si} 分别为区域内外的二阶压力和二阶法向速度. 根据这些条件他得到下列结果：在公共区外边界面上存在波阵面，因而断定区域外有二阶散射场.

我们认为，由于该作者在计算中是用(1)式表示一阶声场的，即用不连续函数表示，而一阶声压 p_{11} 和一阶密度 ρ_{11} 有下述关系，即

$$p_{11}=c_0^2\rho_{11},$$

式中 p_{11} 为沿 x 方向传播的一阶声压场. 若二阶声压在边界连续，由于一阶声压不连续，

则整个声压就不连续;同理可知,若二阶法向速度在边界上连续,则整个法向速度就不连续,这样的连接条件在连续介质力学中是不允许的. 这个矛盾归根到底是起源于用不连续函数来描写一阶声场.

根据上述条件,AL-Temimi 算出在 $y=b$ 的外边界其波阵面为

$$D_1 e^{-jk_1x-j\sqrt{k_0^2-k_1^2}\,y}; \tag{15}$$

在 $x=b$ 的外边界面上(他讨论的是 $a=b$ 的情况)为

$$D_2 = e^{-jk_2y-j\sqrt{k_0^2-k_2^2}\,x}. \tag{16}$$

上式 D_1, D_2 是系数,例如 D_1 为1)

$$D_1 = \frac{1}{2\rho_0}\left\{1+\frac{k_0^2 B}{\sqrt{k_0^2-k_1^2}(\sqrt{k_0^2-k_1^2}-k_2)}\right\} e^{-j(k_2-\sqrt{k_0^2-k_1^2})\,b}. \tag{17}$$

显然(15)式这一个波相应于本文(12)式中 B_4 的一个波. 根据(12)、(13)和(14)式很易算出在 $y=b$ 的外面附近

$$B_4\frac{Bk_0^2}{8\rho_0} = j\frac{Bk_0^2}{2\rho_0}\frac{\sin(\sqrt{k_0^2-k_1^2}-k_2)b}{\sqrt{k_0^2-k_1^2}(\sqrt{k_0^2-k_1^2}-k_2)}. \tag{18}$$

将(17)和(18)式对比,两个解差一个系数

$$\frac{1}{2\rho_0}\left[1+\frac{Bk_0^2\cos(\sqrt{k_0^2-k_1^2}-k_2)b}{\sqrt{k_0^2-k_1^2}(\sqrt{k_0^2-k_1^2}-k_2)}\right] = D_1'. \tag{19}$$

为了解释这个差别,我们回忆一下 AL-Temimi 在求解 Westervelt 方程的过程. 在他的文章中[6]从场方程组出发,保留到二阶项,根据文献[3]的方法,将 Westervelt 方程写成(文献[6]的(A.9)式)

$$\Box^2\rho_s = \Box^2(\beta\rho_{11}\rho_{12}), \tag{20}$$

$$\beta = \frac{1}{\rho_0}\left\{1+\left[\frac{\rho_0}{2c_0^2}\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\omega_1\omega_2}\right]\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\right\}.$$

由(20)式直接得出

$$\rho_s = \beta\rho_{11}\rho_{12} + F, \tag{21}$$

F 是齐次波动方程的解,显然

$$\rho_s' = \beta\rho_{11}\rho_{12} + F - D_1' e^{-j(\omega_1+\omega_2)t-jk_1x-j\sqrt{k_0^2-k_1^2}\,y} \tag{22}$$

也是(20)式的解. 如果文献[6]中在 $y=b$ 的面上令解为(22)式,则(17)和(18)式的差别完全消失. 同理,可以讨论 $x=\pm b$, $y=-b$ 面上的解.

综合起来,AL-Temimi 的波阵面即是本文的解(12)式的一部分. 因此,他的这种波阵面是由人为的 δ 偶极面源造成的.

五、结 束 语

用完全准直束作为一阶场给声散射声带来了 δ 函数性质的偶极源,这是由于这种一

1) 原文中有错误和笔误,这里作了改正和订正.

阶声场在界面不满足齐次波动方程，因而不满足 Lighthill 方程或者 Westervelt 方程的推导条件．我们采用了这种束作为一阶场，则二阶散射场中就有一部分附加场，其场源是在界面上，随着场点远离界面，它就逐渐熄灭．但在界面附近（不管公共区内外），这部分场并不为零．因此，两个完全准直束的相互作用和两列平面波的相互作用存在本质的区别．前者外界面附近的非零场（即文献[6]中所说的波阵面）正是 δ 性质的偶极面源的贡献，而不是真正的散射波阵面．

至于本文计算与文献[3,4]所假定的"局部平面波"相互作用能量在公共区外为零（并得出 $\rho_s = 0$）从而使（5）式计算简化的比照也是很有兴趣的，这里从略．而这个课题多年来之所以没有一致性的实验验证，也因为两种"声束"都是建立在和实际情况有不同程度近似的理论基础上的缘故．

在计算参量阵时也应用了这种准直束[8,9]，界面的影响有待进一步讨论．

魏荣爵同志对本文提出过有益意见，梁昆淼同志校阅了本文的计算，并和作者作过有益的讨论，特此表示感谢．

附　　录

（8b）式右端大括号中的第二项在公共区外恒为零，故这里只要证明第一项的远场亦为零即可．为此，将指数函数化为三角函数，即

$$
\begin{aligned}
&\sin(k\mp k_1)a\sin(K-k_2)be^{-j(kx+Ky)}\\
&= \sin(k\mp k_1)a\sin(K-k_2)be^{-j[(k\mp k_1)a+(K-k_2)y]\mp jk_1x-jk_2y}\\
&= \frac{1}{4}\{[\sin(k\mp k_1)(x+a)-\sin(k\mp k_1)(x-a)][\sin(K-k_2)(y+b)-\sin(K-k_2)(y-b)]\\
&\quad -4\sin(k\mp k_1)a\sin(K-k_2)b\sin(k\mp k_1)x\sin(K-k_2)y\\
&\quad -2j\sin(k\mp k_1)x\sin(k\mp k_1)a[\sin(K-k_2)(y+b)-\sin(K-k_2)(y-b)]\\
&\quad -2j\sin(K-k_2)y\sin(K-k_2)b[\sin(k\mp k_1)(x+a)-\sin(k\mp k_1)(x-a)]\}e^{\mp jk_1x-jk_2y}.
\end{aligned}
$$

将上面的结果代入（8b）式右端的第一项中，利用（10）式，当 $|x\pm a|$ 和 $|y\pm b|$ 中有一个（或两者）趋向无限时，则在远离公共区边界的场点（显然，这里 $|x|$ 或 $|y|$ 至少有一个趋向无限）处积分为零，即 $f(x,y)=0$．因为计算方法和步骤与第二节相同，故过程从略．

参　考　文　献

[1] U. Ingard, D. C. Pridmore-Brown, *JASA*, **28** (1956), 367.
[2] M. J. Lighthill, *Proc. Roy. Soc. London*, **A211** (1952), 564.
[3] P. J. Westervelt, *JASA*, **29** (1957), 199.
[4] P. J. Westervelt, *JASA*, **29** (1957), 973.
[5] H. O. Berktay, C. A. AL-Temimi, *JASA*, **50** (1971), 181.
[6] C. A. AL-Temimi, *J. Sound and Vib.*, **8** (1968), 44.
[7] P. J. Westervelt, *JASA*, **38** (1963), 535.
[8] H. O. Berktay, *J. Sound and Vib.*, **2** (1965), 462.
[9] H. O. Berktay, *J. Sound and Vib.*, **6** (1967), 244.
[10] J. P. Jones, R. T. Beyer, *JASA*, 48 (1970), 398.
[11] В. А. Зверев, А. И. Калачев, *Акуст. ж.* **15** (1969), 369; **14** (1968), **214**.
[12] 谷超豪等编，数学物理方程，上海科学技术出版社，第二版，第六章．

ON THE SCATTERING OF SOUND BY SOUND

QIAN ZU-WEN

ABSTRACT

The problem of the non-linear interaction between two fully collimated plane-wave beams travelling in different directions has given rise to much of the controversy to date as to whether the secondary scattered radiation exists outside the interaction region. Ingard et al. expressed the primary beams with a type of discontinuous function

$$\rho = \begin{cases} e^{j(\omega-ky)}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Through calculations, they claimed that a scattered radiation is shown to exist outside the region of interaction. Assuming primary fields are plane waves of infinite extent, Westervelt studied the same problem, but a negative conclusion was obtained. By dividing co-ordinate space into the inside and outside of the common volume, Al-Temimi solved Westervelt's equation for both cases and concluded that the two conflicting results could relatively be brought together.

Although in this paper only ideal beams interacting at right angles are discussed, the author suggests that this type of discontinuity can be more adequately described with a certain combination of unit-step functions. By applying and solving Westervelt's equation, the author obtains an interesting result, i. e., the secondary scattered radiations outside the common volume originate not from a volume source as claimed by Al-Temimi, but from a δ-function surface-dipole. However, this surface source is artificial, because discontinuous functions which do not satisfy the homogeneous wave equation have been used to describe the primary waves. It is shown that the solution obtained by the author is the same as that of Al-Temimi, therefore, a relative agreement cannot be reached between the two conflicting results. A comment is also made on the latter's paper concerning the inappropriateness of the continuous conditions assumed at the boundaries. Based on the above discussions, the author predicts that if the primary beams are to be described by discontinuous functions, then the theories of the parametric transmitting and recieving arrays will be similarly affected.