第 25 卷 第 6 期 物 理 学 报 Vol. 25, No. 6
1976 年 11 月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1976

层子模型里介子的波函数和能级[*1)]

胡 宁
(北京大学物理系)

提 要

本文利用 Bethe-Salpeter 型的方程处理了层子模型中的介子内部波函数，指出如果层子和反层子之间的作用可以用一个赝标型位阱来代表，那么 0^- 和 1^- 介子将满足相同的近似径向波动方程，从而导致 SU_6 对称性．我们以前曾经证明赝标型位阱是唯一可以导致这个对称性的单一型位阱．我们的位阱是 $V = V_0 + V_1$，V_0 代表一个超强的深位阱，它的作用是降低层子的原始质量 M，使它的有效值 M' 变得很小，使得层子在强子内部的运动是相对论的．V_1 代表数量级为 $1/M$ 的简谐振子位阱，另外还引入一个张量力来解释自旋和轨道角动量相同态的能级分裂．我们得出基态和角动量激发态 0^- 和 1^- 介子的解，基本上解释了所有观察到的介子．我们的理论可以同样处理重子态，只要唯象位阱 V_0 只有介子的值的一半．

一、引 言

1965 年我们曾经系统地给出在层子模型里处理强子的电磁作用和弱作用的相对论理论[1]．按照这个理论，介子是由一对层子和反层子组成，重子则由三个层子组成；这些层子被看成点粒子．强子的电磁作用和弱作用行为完全由描写层子在强子内部运动的 Bethe-Salpeter（以下简称 B-S）波函数来决定．作为初步尝试，我们假定波函数的旋量部分具有 Bargmann-Wigner 波函数的形式，而它的空间部分是随着距离 r 的增加而迅速下降的函数（如高斯型或指数型）．根据这样波函数计算出来的电磁作用和弱作用的结果基本上是和实验相符的．这突出地表明电磁作用和弱作用的量子力学规律在强子的内部仍是正确的．

下一步的问题是，既然在强子内部电磁作用和弱作用都可以用旧有的量子力学理论来描绘，是否也可以应用量子力学理论进一步得出层子在强子内部的波函数？如果这能够做到，那将意味着量子力学仍能普遍适用于强子内部这个“超微观”区域．如果做不到，我们将会知道量子力学适用的范围，从而进一步发现新的超微观的运动规律．这个新的规律不是孤立地存在的，它必然和旧的量子力学有着密切的联系，正象量子力学和经典力学有着密切的联系一样．人们必须首先把量子力学应用到强子内部，然后通过突破看来不可克服的困难才能过渡到新的运动规律．

---

* 1975 年 3 月 11 日收到．

1) 这个工作是在集体的讨论和试探的基础上完成的．工作中得到组内同志很多帮助．

我们可以把上面提出的问题分为两部分．第一部分的问题是：上述强子的正确的相对论波函数以及相应的强子质量谱是否可以由一个给出的层子间的相互作用位势，通过解 B-S 方程或其它类似的量子力学运动方程得出．第二部分的问题是：这个作用位势是否可以根据量子力学的基本原理得出．当人们以波函数为出发点得到一个较满意的结果以后，进一步的考虑很自然地是这个波函数是否可以由一个位势通过解波动方程得出或得到进一步的改进，然后再问这样的位势是否可由量子场论的基本原理得出．尤其是当人们看到在强子内部可能出现新的力学规律时，首先找出波函数和位势之间的联系可能是合理的做法．

近年来，利用 Regge 轨迹分析强子质量谱的结果指出，层子在强子内部的运动很可能是简谐振动．实验结果指出，所有强子的 Regge 轨迹几乎都是互相平行的直线．这说明造成不同强子内部运动的位势也是相同的．按照层子模型，自由层子的质量应大于 10 BeV．为着解释强子间存在的 SU_6 对称性，可以认为层子间的相互作用主要是与自旋无关的，并且层子的动量比它的静止质量小得多．我们假定相互作用位阱包括两部分，一部分是层子间与自旋无关的超强作用位势 V_0，V_0 为常数，它的作用主要是降低层子的有效质量．层子间另一部分与自旋无关的作用位势是

$$V_1 = ar^2.$$

形式上 V_1 可以看作是位阱 V 对 r^2 展开的第二项．V_1 将导致层子的简谐振动．这个作用的自旋无关性使得所有强子的 Regge 轨迹都是具有相同的坡度的直线．

根据上面给出的位阱，可以写出相应的 B-S 波动方程．假定层子的原始质量 M 是一个很大的量，并且层子的动量很小，从而允许这个方程对 p/M 展开，并略去高次项．这样得出的“非相对论极限”和通常的薛定谔非相对论方程并不相同．方程的本征值不是介子的质量 m，而是 m^2，所得的解正是通常的简谐振子波函数．因此相应的 Regge 轨迹是直线．为着和实验相比，当然还必须引入自旋有关的力和破坏 SU_3 对称性的力，改变各种介子的 Regge 直线的位置成为实验所给出的一组平行直线．

有些作者倾向于认为层子的原始质量并不很大，相互作用也不很强，但由于某种未知的原因，不能从强子内部逃出．这种图象中的层子无法用量子力学来描绘，因为不能写出相应的边界条件．Schiff[2] 曾给出一个可用的边界条件，但这个条件等于假定在强子内部存在着一个很深的标量常数位阱 V_0，而层子的质量实际上是层子在位阱中的有效质量，在位阱 V_0 的外面层子仍具有很大的质量 M．

近年来高能碰撞实验指出，在强子的内部存在着胶子和数量不确定的层子和反层子对．按照量子场论，一个物理强子的态一般是由含有不同数目的层子和反层子的态叠加而成．人们总可以把这些多粒子数的态看作是“中间态”从波动方程中消去，只保留粒子数最低的态．高粒子数的态对粒子数最低的态的影响将完全由相互作用位阱来代替．这样位阱将不简单地只代表交换一个或两个某种场的量子，因此有可能给出简谐振子的位阱．这个情形和原子核壳层结构理论很相似．在壳层结构里，也引入了简谐振子的位阱，这个位阱实际上代表原子核中其他核子对于所考虑的核子的作用的总效应．

再者 V_0 和 V_1 必然是“瞬时作用”．为着说明这一点，举出将在本文中讨论的介子态为例．介子的最低粒子数的态是一个层子和一个反层子的态．在质心坐标中，任何时候

这两个粒子的动量必须相等相反.如果它们之间的作用是一个推迟的位阱,那么当一个粒子和位阱作用时另一个粒子还没有作用,这样,当一个粒子由于作用而改变了动量,另一个粒子因尚未受到作用而动量没有改变,因而它们的动量不再能相等相反.这违反了态中只有两个粒子的条件.事实上引入推迟势等于承认在所考虑的态中还有传递作用的第三个粒子.这说明,当只考虑两个粒子的态时,只有瞬时作用的位阱.我们在前面已假定介子中的层子和反层子的动量很小,可以用非相对论近似.这样,考虑瞬时作用将更是合理的.

二、介子的 B-S 方程

下面考虑由一个层子和一个反层子所组成的介子系统.命 p_1 代表层子的四动量,$-p_2$ 代表反层子的四动量,$p_1=(\mathbf{p}_1, ip_{10})$,$p_2=(\mathbf{p}_2, ip_{20})$ 引入相对四动量 p 和总四动量 P:

$$p=\frac{1}{2}(p_1+p_2),$$
$$P=p_1-p_2. \tag{1}$$

在动量空间中的 B-S 方程可写为

$$\left(i\hat{p}+\frac{1}{2}i\hat{P}+M\right)\chi(p,P)\left(i\hat{p}-\frac{1}{2}iP+M\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int \Gamma U(p,p',P)\chi(p,P)\Gamma d^4p', \tag{2}$$

式中 $\hat{p}=(\gamma p)=\gamma_\mu p_\mu$, $\hat{P}=(\gamma P)=\gamma_\mu P_\mu$, M 代表层子的原始质量, $U(p,p',P)$ 代表由 p' 跃迁到 p 的相互作用矩阵元, Γ 为 γ_μ 的某种乘积和组合. 按照 Kursunoglu[3] 的作法,在质心坐标 $(P_4=iP_0=im, \mathbf{P}=0)$ 中引入

$$\chi=\frac{1}{H_p-\frac{1}{2}m-p_0}\varphi-\varphi\frac{1}{H_{-p}+\frac{1}{2}m-p_0}, \tag{3}$$

其中

$$H_p=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta M,\quad H_{-p}=-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta M,$$
$$\alpha_i=i\gamma_4\gamma_i\quad(i=1,2,3),\quad \beta=\gamma_4. \tag{4}$$

将 (3) 式代入 (2) 式得出

$$-\varphi H_{-p}+H_p\varphi-m\varphi=\int U(p,p')\frac{1}{2\pi i}\beta\Gamma$$
$$\cdot\left[\varphi(p')\frac{1}{H_{-p'}+\frac{1}{2}m-p_0'}-\frac{1}{H_{p'}-\frac{1}{2}m-p_0'}\varphi(p')\right]\Gamma\beta d^4p', \tag{5}$$

$U(p,p')$ 代表在质心坐标中 $U(p,p',P)$ 的形式.

瞬时作用等于假定 $U(p,p')$ 不是 p_0 和 p_0' 的函数,即

$$U(p,p')=U(\mathbf{p},\mathbf{p}'). \tag{6}$$

将 (6) 式代入 (5) 式,立刻看出 (5) 式的右边不含有变数 p_0. 由此进一步看出,由 (5) 式

解出的 φ 将不含有变数 p_0，因为 H_p 和 H_{-p} 也都不含有 p_0. 因此 (5) 式变为

$$-\varphi(\mathbf{p})H_{-p}+H_p\varphi(\mathbf{p})-m\varphi(\mathbf{p})=\int U(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{1}{2\pi i}\beta\Gamma\cdot\left[\varphi(p')\frac{1}{H_{-p'}+\frac{1}{2}m-p_0'}-\frac{1}{H_{p'}-\frac{1}{2}m-p_0'}\varphi(p')\right]\Gamma\beta d^3p dp_0'. \tag{7}$$

现在可以对 p_0' 积分. 由于 $U(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ 和 $\varphi(\mathbf{p}')$ 都与 p_0' 无关，只须计算对

$$\left[H_{\mathbf{p}'}-\frac{1}{2}m-p_0'\right]^{-1} \text{和} \left[H_{-\mathbf{p}'}+\frac{1}{2}m-p_0'\right]^{-1}$$

的极点的留数积分. 简单的计算给出

$$H_{\mathbf{p}}\varphi(\mathbf{p})-\varphi(\mathbf{p})H_{-\mathbf{p}}-m\varphi(\mathbf{p})=\int d^3\mathbf{p}'U(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{1}{2E_{p'}}\beta\Gamma[H_{\mathbf{p}'}\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p}')H_{-\mathbf{p}'}]\Gamma\beta. \tag{8}$$

上式中含 H_{-p} 项前面的负号是由于反层子的四动量用 $-p_2$ 表示所造成的. $H_{-\mathbf{p}}$ 在 $\varphi(\mathbf{p})$ 的右边出现是因为 $\varphi(\mathbf{p})$ 本身是一个 4×4 的矩阵，所有对反层子作用的算符必须乘在 $\varphi(\mathbf{p})$ 的右边. (8) 式正是通常场论中束缚态态矢量所满足的薛定谔方程. $H_{\mathbf{p}}$ 和 $H_{-\mathbf{p}}$ 分别代表自由层子和反层子的哈密顿量.

三、0^- 和 1^- 介子的 B-S 方程

赝标介子 ($J^P=0^-$) 的波函数 φ^P 最普遍的形式可写为[4]

$$\varphi^P=\gamma_5 f_1+\frac{i\hat{P}}{m}\gamma_5 f_2+i\hat{p}\gamma_5\frac{1}{M^2m}(pP)f_3+\frac{1}{2Mm}\gamma_5(\hat{P}\hat{p}-\hat{p}\hat{P})f_4. \tag{9}$$

在文献 [4] 中上式原系 χ^P 的形式. 不难利用 (3) 式证明 φ^P 也具有 (9) 式的形式. 在质心坐标中上式可表为

$$\varphi^P=\gamma_5 f_1+\gamma_5\gamma_4 f_2+\frac{i}{M^2}\gamma_5\hat{p}p_0 f_3+\frac{i}{2M}\gamma_5(\gamma_4\hat{p}-\hat{p}\gamma_4)f_4. \tag{10}$$

或者用矩阵表示为

$$\varphi^P=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_4 & g_1\\ g_2 & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_3\end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中

$$\begin{gathered}g_4=-\frac{1}{M}f_4+\frac{p_0}{M^2}f_3,\quad g_3=-\frac{1}{M}f_4-\frac{p_0}{M}f_3,\\ g_1=-f_1+f_2-\frac{p_0^2}{M^2}f_3,\quad g_2=-f_1-f_2+\frac{p_0^2}{M^2}f_3.\end{gathered} \tag{12}$$

在前面所讨论的瞬时作用情况里，φ^P 不含有 p_0，这样 (11) 和 (13) 式中的 f_3 必须为零. 于是 (13) 式给出 $g_3=g_4$. 在后面解方程的计算中也可直接给出这个结果.

(8) 式中出现的 $H_{\mathbf{p}}$ 和 $H_{-\mathbf{p}}$ 也可表为

$$H_{\pm\mathbf{p}}=\begin{pmatrix}M & \pm(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\\ \pm(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) & -M\end{pmatrix}. \tag{13}$$

由(11)和(13)式得

$$\Phi^P \equiv H_{\mathbf{p}}\varphi^P - \varphi^P H_{-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+ & 2Mg_1 + p^2(g_4+g_3) \\ -2Mg_2 + p^2(g_4+g_3) & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+ \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$g_\pm = g_1 \pm g_2. \tag{15}$$

于是(8)式可写为

$$\Phi^P - m\varphi^P = \int d^3\mathbf{p}' U(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{1}{2E_{p'}} \beta\Gamma\Phi^{P'}\Gamma\beta, \tag{16}$$

$\Phi^{P'}$ 代表 Φ 中的变数 $\mathbf{p}$ 换成 $\mathbf{p}'$.

现在再讨论矢量介子($J^P = 1^-$)的波函数 φ^V. 它的普遍形式可写为[4]

$$\varphi^V = \varphi - i\gamma_\mu\varphi_\mu - i\gamma_\mu\gamma_5\varphi_{\mu5} + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}, \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{i}{M}(ep)F_3,\ \varphi_\mu = e_\mu F_1 + (ep)\frac{p_\mu}{M^2}F_4 + \frac{(ep)(pP)}{m^2M^2}P_\mu F_8, \\ &\varphi_{\mu5} = -\frac{1}{mM}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}e_\nu p_\lambda P_\sigma F_6, \\ &\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{m}(e_\mu P_\nu - e_\nu P_\mu)F_2 + \frac{1}{mM^2}(p_\mu P_\nu - p_\nu P_\mu)(ep)F_5 \\ &\qquad + \frac{1}{mM^2}(e_\mu p_\nu - e_\nu p_\mu)(pP)F_7, \end{aligned} \tag{18}$$

e_μ 代表极化矢量. 和 0^- 介子的情形一样, 文献[4]给出的(17)和(18)式原系 χ^V 的形式,我们不难利用(3)式证明 φ^V 也可写成这个形式.

上式含有八个未知函数 $F_1, F_2, \cdots, F_8$. 这些函数将由 B-S 方程决定. φ^V 也可用矩阵形式表出,在质心系中, φ^V 可写为

$$\begin{aligned} &\varphi^V = \Lambda_h\varphi^h + \Lambda_f\varphi^f, \\ &\Lambda_h = \frac{1}{\mathbf{p}^2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p}),\ \Lambda_f = \gamma_4(\sigma e_3),\ \mathbf{p}^2\mathbf{e}_3 = \mathbf{p}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\varphi^h = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})h_4 & h_1 \\ h_2 & (\sigma p)h_3 \end{pmatrix},\quad \varphi^f = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_4 & f_1 \\ f_2 & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned} &h_1 = -iF_1 - F_2 - \frac{i}{M^2}\mathbf{p}^2F_4 - \frac{i}{M^2}\mathbf{p}^2F_5 + \frac{1}{M^2}p_0^2F_7, \\ &h_2 = iF_1 - F_2 + \frac{i}{M^2}\mathbf{p}^2F_4 - \frac{i}{M^2}\mathbf{p}^2F_5 + \frac{1}{M^2}p_0^2F_7, \\ &h_3 = \frac{i}{M}F_3 - \frac{i}{M^2}p_0(F_4 - F_8),\quad h_4 = \frac{i}{M}F_3 + \frac{i}{M^2}p_0(F_4 - F_8), \\ &f_1 = -iF_1 - F_2 + \frac{1}{M}p_0F_7,\quad f_2 = iF_1 - F_2 + \frac{p_0}{M^2}F_7, \\ &f_3 = \frac{i}{M}F_6 - \frac{1}{M^2}p_0F_7,\quad f_4 = -\frac{i}{M}F_6 - \frac{1}{M^2}p_0F_7. \end{aligned} \tag{21}$$

和 0^- 介子的情形一样，我们可以由(21)式利用 φ^V 不含有 p_0 的条件得出 $F_7=F_4-F_8=0$。这也给出

$$h_3 = h_4, \quad f_3 = f_4. \tag{22}$$

很容易验证下面对易关系：

$$[\Lambda_h, H_{\pm\mathbf{p}}] = 0, \quad [\Lambda_f, H_{\pm\mathbf{p}}] = 0, \tag{23}$$

由于这个关系的成立，φ^V 所满足的方程可写成

$$\begin{aligned}&\Lambda_h(\Phi^h - m\varphi^h) + \Lambda_f(\Phi^f - m\varphi^f)\\ &\quad = \int d^3\mathbf{p}' U(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{1}{2E_{p'}} \beta\Gamma[\Lambda'_h\Phi^{h'} + \Lambda'_f\Phi^{f'}]\Gamma\beta,\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi^h &\equiv H_{\mathbf{p}}\varphi^h - \varphi^h H_{-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})h_+ & 2Mh_1 + p^2(h_3+h_4) \\ -2Mh_2 + p^2(h_3+h_4) & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})h_+ \end{pmatrix},\\ \Phi^f &\equiv H_{\mathbf{p}}\varphi^f - \varphi^f H_{-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_+ & 2Mf_1 + p^2(f_3+f_4) \\ -2Mf_2 + p^2(f_3+f_4) & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_+ \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{25}$$

(23) 式中的 Λ'_h, Λ'_f, $\Phi^{h'}$ 和 $\Phi^{f'}$ 表示变数 $\mathbf{p}$ 换成 $\mathbf{p}'$。

由 (19) 式给出的 Λ_f 和 Λ_h 表明，(20) 式的大分量 h_1, h_2, f_1 和 f_2 含有 S 波和 D 波。当相互作用位阱与自旋无关时，轨道角动量量子数 l 将是好量子数，S 波和 D 波部分将代表两个独立的解．取

$$f_1 = h_1, \quad f_2 = -h_2. \tag{26}$$

(19) 式变为

$$\varphi^V_{l=0} = \gamma_4(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}) \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_4 & f_1 \\ f_2 & (\sigma p)f_4 \end{pmatrix} - \gamma_4(\mathbf{e}\mathbf{p}) \begin{pmatrix} f_4 - h_4 & 0 \\ 0 & f_4 + h_4 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

再取

$$h_1 = -2f_1, \quad h_2 = 2f_2. \tag{28}$$

(19) 式变为

$$\begin{aligned}\varphi^V_{l=2} = &-\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}) - 3(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right]\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}\\ &+ \gamma_4(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\begin{pmatrix} f_4 & 0 \\ 0 & f_4 \end{pmatrix} + \gamma_4(\mathbf{e}\mathbf{p})\begin{pmatrix} h_4 - f_4 & 0 \\ 0 & -h_4 - f_4 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{29}$$

(27) 和 (29) 式分别代表大分量为 S 波和 D 波的态．把 (26) 和 (28) 式代入 (23) 式，我们分别得到 $\varphi^V_{l=0}$ 和 $\varphi^V_{l=2}$ 所满足的方程为

$$\Phi^V_{l=0,2} - m\varphi^V_{l=0,2} = \int d^3\mathbf{p}' U(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{1}{2E_{p'}} \beta\Gamma\Phi^V_{l=0,2}\Gamma\beta, \tag{30}$$

式中 $\Phi^V_{l=0,2}$ 由下式给出：

$$\Phi^V_{l=0} = [\Lambda_h\Phi^h + \Lambda_f\Phi^f]_{f_1=h_1,\, f_2=-h_2}, \tag{31a}$$

$$\Phi^V_{l=2} = [\Lambda_h\Phi^h + \Lambda_f\Phi^f]_{h_1=-2f_1,\, h_2=2f_2}. \tag{31b}$$

前面所述位势与自旋无关条件限制了对 Γ 的选取．最明显的选取是 $\Gamma=1$，即标量位势．这是作为 SU_6 对称性的依据最初提出来的方案．下面的计算将指出这不导致 SU_6 对称性，相反选取 $\Gamma=\gamma_5$ 则给出 SU_6 对称性．所有其它对 Γ 的选取，由于都含有自旋算

符 $\boldsymbol{\sigma}$,因而不能给出与自旋无关的位阱．我们将在第五节中重新研究这个问题．

四、0⁻ 介子及其激发态

本节我们将只考虑 $\Gamma=\gamma_5$ 型位势．以(11)和(14)式代入(17)式，得到下面三个联立方程：

$$
\begin{aligned}
&2Mg_1+2\mathbf{p}^2g_4-mg_1=V\frac{M}{E_p}g_2-V\frac{1}{E_p}\mathbf{p}^2g_4,\\
&-2Mg_2+2\mathbf{p}^2g_4-mg_2=-V\frac{M}{E_p}g_1-V\frac{1}{E_p}\mathbf{p}^2g_4,\\
&(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+-m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_4=V\frac{1}{2E_p}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

取前面两式的和与差,并代入 $g_\pm=g_1\pm g_2$, (32)式变为

$$
\begin{aligned}
&2Mg_-+4\mathbf{p}^2g_4-mg_+=-V\frac{M}{E_p}g_--V\frac{2}{E_p}\mathbf{p}^2g_4,\\
&2Mg_+-mg_-=V\frac{M}{E_p}g_+,\\
&(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+-m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_4=V\frac{1}{2E_p}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

式中 V 代表积分算符：

$$V=\int d^3\mathbf{p}U(\mathbf{p},\mathbf{p}'). \tag{34}$$

根据引言中的讨论,可以取

$$V=V_0-V_1. \tag{35}$$

在介子内部 V_0 代表一个常数位阱,它的数量级为 M. V_1 代表一个数量级为 M^{-1} 的简谐振子位阱,

$$V_1=ar^2. \tag{36}$$

于是(33)式变为

$$
\begin{aligned}
&(2M+V_0)g_-+2(2M+V_0)\frac{1}{M}\mathbf{p}^2g_4-mg_+=V_1g_-+\frac{V_0}{2M^2}\mathbf{p}^2g_-,\\
&(2M-V_0)g_+-mg_-=-V_1g_+-\frac{V_0}{2M^2}\mathbf{p}^2g_+,\\
&(2M-V_0)\frac{1}{2M}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_+-m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})g_4=0.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

上式中的 $V_0\mathbf{p}^2g_\pm/2M^2$ 是展式

$$\frac{1}{E_p}=\frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{2M^2}\mathbf{p}^2+\cdots\right) \tag{38}$$

第二项的贡献．在(37)式中所有 M^{-2} 级的量都已被略去．

因为 M 是一个很大的量,(37)式有解的条件为

$$2M-V_0\sim O(M^{-1}),\ g_4\sim O(M^{-2}),\ g_-\sim O(M^{-1}),\ g_+\sim O(1). \tag{39}$$

这表明(37)式中含 g_4 的项可以完全被略去．引入

$$M' = M - \frac{V_0}{2}.$$

由(39)式看到 M' 的数量级为 M^{-1}，M' 可看作是层子在位阱 V_0 中的有效质量．消去(37)式中的 g_- 和 g_4，得到 g_+ 所满足的波动方程为

$$8MM'g_+ + 4\mathbf{p}^2 g_+ + 4Mar^2 g_+ - m^2 g_+ = 0. \tag{40}$$

(40)式中各项的数量级都是 1．在坐标表象中 $\mathbf{p}^2$ 应表为 $-\nabla^2$．

(40)式描绘一个相对论的简谐运动．它的基态解为

$$g_+^{(0)} = e^{-\lambda r^2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{Ma}, \tag{41}$$

$$m_0^2 = 8MM' + \frac{3}{2}\omega, \quad \omega = 8\sqrt{Ma}. \tag{42}$$

这等效地代表一个质量为 $\sqrt{8MM'}$ 的简偕振子．φ^P 可近似写为

$$\varphi^{P(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & g_+^{(0)} \\ g_+^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

(40)式的角动量 $l=1$ 的激发态解为

$$g_+^{(1)} = (\mathbf{e}\boldsymbol{\nabla})e^{-\lambda r^2}, \quad m_1^2 = 8MM' + \frac{5}{2}\omega. \tag{44}$$

相应的 $\varphi^P_{l=1}$ 为

$$\varphi^P_{l=1} = (\mathbf{e}\boldsymbol{\nabla})\begin{pmatrix} 0 & g_+^{(0)} \\ g_+^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

(45)式代表 $J^P = 1^+$ 的态．它相应于 π 的激发态 B(1235) 和 K 的激发态 K_A(1240)．

(40)式给出 $l=2$ 的激发态为

$$\begin{aligned} g_+^{(2)} &= \left[(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nabla}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\nabla}^2\right] g_+^{(0)}, \\ m_2^2 &= 8MM' + \frac{7}{2}\omega. \end{aligned} \tag{46}$$

相应地给出

$$\varphi^P_{l=2} = \left[(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nabla}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\nabla}^2\right]\begin{pmatrix} 0 & g_+^{(0)} \\ g_+^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ 代表两个任意的矢量．这个态的 $J^P = 2^-$，相应于 π 的可能的激发态 A_3(1640) 和 K 的激发态 L(1770)．实验上在 $J - m^2$ 图中，π 和它的激发态 B 和 A_3 位于一根直线上，K 和它的激发态 K_A 和 L 位于另一根几乎是平行的直线上．由直线坡度测得激发能级和下一个态的能级间隔为

$$\Delta m^2 = \omega \approx 1\ \mathrm{GeV}^2.$$

属于同一八维 SU_3 表示的 η 和属于另一 SU_3 单态的 η' 的角动量激发态，在实验上未观察到．K, π, η 和 η' 不在同一根 Regge 直线上表示同位旋有关的力对 SU_3 对称性的破坏．

没有发现 l 更高的态和径向激发态，这说明这些态极不稳定．较详细的分析和讨论已在另一文中给出[4]．

五、1^- 介子及其激发态

在上节中我们只考虑 $\Gamma=\gamma_5$ 型位阱．这种位阱的一个直接后果是 $g_4=g_3$ 属于 M^{-2} 级的小量，从而可以自方程中略去．如果取 $\Gamma=1$，那么 g_4 和 g_3 将与 g_1，g_2 属于同一数量级而不能略去．对于 1^- 介子，下面的计算将发现，当 $\Gamma=\gamma_5$ 时，$h_3=h_4$ 和 $f_3=f_4$ 也都属于 M^{-2} 级的可忽略的小量．这样才能使得 1^- 介子所满足的近似的非相对论方程和 0^- 介子的相应方程相同，从而导致 SU_6 对称性．如果采用 $\Gamma=1$ 或者其它与自旋有关的位阱（如 $\Gamma=\gamma_\mu$，$\gamma_{\mu\nu}$ 或者 $\gamma_5\gamma_\mu$）时，f_4 和 h_4 都不能忽略，而且所得的 1^- 介子方程和 0^- 介子的方程完全不同，这样就不能导致 SU_6 对称性．

这里要特别指出，我们在前一工作中[5]曾考虑过更加广泛类型的位阱．结果指出，如果只考虑一种类型而不考虑几种类型位阱的叠加，那么 $\Gamma=\gamma_5$ 型作用是唯一可以导致 SU_6 对称性的位阱．

下面对 1^- 介子也只考虑 $\Gamma=\gamma_5$ 的情况．我们首先讨论 S 波解 $\varphi^V_{l=0}$．把(27)和(31a)式代入(30)式，给出

$$\begin{aligned}
&2Mf_1+2\mathbf{p}^2f_4-2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})(f_4-h_4)-mf_1\\
&\qquad=-V\frac{M}{E_p}f_2+V\frac{1}{E_p}\mathbf{p}^2f_4-V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})\frac{1}{E_p}(f_4+h_4),\\
&-2Mf_2+2\mathbf{p}^2f_4-2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})(f_4+h_4)-mf_2\\
&\qquad=+V\frac{M}{E_p}f_1+V\frac{1}{E_p}\mathbf{p}^2f_4-V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})\frac{1}{E_p}(f_4-h_4),\\
&(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_+-(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p})f_+-m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_4+m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p})f_4\\
&\qquad=-V\frac{1}{2E_p}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_++V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p})\frac{1}{2E_p}f_+,\\
&(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})f_--m(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p})h_4=V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p})\frac{1}{2E_p}f_-.
\end{aligned}\tag{48}$$

上式和 0^- 介子的(32)式相当．进行由(32)到(37)式相同的处理，我们得到和(37)式相当的方程为

$$\begin{aligned}
&(2M-V_0)f_-+2(2M-V_0)\frac{1}{M}\mathbf{p}^2f_4-2(2M-V_0)\frac{1}{M}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})f_4-mf_+\\
&\qquad=-V_1f_--\frac{V_0}{2M^2}\mathbf{p}^2f_-,\\
&(2M+V_0)f_++2(2M-V_0)\frac{1}{M}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p})h_4-mf_-=V_1f_++\frac{V_0}{2M^2}\mathbf{p}^2f_+,\\
&(2M+V_0)\frac{1}{2M}f_+-mf_4=0,\quad(2M-V_0)\frac{1}{2M}f_--mh_4=0.
\end{aligned}\tag{49}$$

我们在上节已经要求

$$M'=M-\frac{1}{2}V_0\sim O(M^{-1}),$$

(49)进一步指出

$$h_4 \sim O(M^{-2}),\ f_4 \sim O(M^{-1}),\ f_+ \sim O(M^{-1}),\ f_- \sim O(1). \tag{50}$$

略去量级为 M^{-2} 的项，(49) 式的第一第二两式变为

$$\begin{aligned}&(2M + V_0)f_+ - mf_- = 0,\\ &(2M - V_0)f_- - mf_+ = -V_1 f_- - \frac{V_0}{2M^2}\mathbf{p}^2 f_-.\end{aligned} \tag{51}$$

消去 f_+，得

$$8MM'f_- + 4\mathbf{p}^2 f_- + 4Mar^2 f_- - m^2 f_- = 0. \tag{52}$$

(52) 和 (40) 式完全相同. 这表明在略去了 M^{-1} 的高次项以后，0^- 和 1^- 介子满足相同的波动方程，能级也一样. 也就是说近似地表现出 SU_6 对称性.

忽略去 M^{-1} 的高次项，1^- 介子的基态波函数 $\varphi^V_{l=0}$ 可写为

$$\varphi^V_{l=0} \approx (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & f_-^{(0)} \\ f_-^{(0)} & 0 \end{pmatrix},\ f_-^{(0)} = e^{-\lambda r^2}. \tag{53}$$

同样得出 1^- 介子的 $l = 1$ 激发态为

$$\varphi^V_{l=1} \approx (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})(\boldsymbol{\lambda}\nabla)\varphi^{(0)},\ m_1^2 = 8MM' + \frac{5}{2}\omega, \tag{54}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 是除 $\mathbf{e}$ 外又引进的一个极化矢量. (54)式代表自旋为 1，轨道角动量也为 1 的态. 它将包括总角动量 $J = 0, 1, 2$ 三个独立的解. 为着分开这三个解，取任意三个互相垂直的单位矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\mathbf{e}$ 可以是这三个单位矢量中的任两个. 我们可把 (54) 式最普遍的形式写成 ($\mathbf{p} \equiv -i\nabla$)

$$\varphi^{Vij}_{l=1} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i)(\mathbf{p}\mathbf{e}_j)\varphi^{(0)} \tag{55}$$

(55) 式可以组合为比例于 $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i) = 1$，对于 $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{e}_j$ 反对称与对称三个独立的解:

$$\varphi^{Vii}_{l=1,\ J=0} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\varphi^{(0)}. \tag{56}$$

$$\varphi^{V[ij]}_{l=1,\ J=1} = [(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i)(\mathbf{p}\mathbf{e}_j) - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_j)(\mathbf{p}\mathbf{e}_i)]\varphi^{(0)}. \tag{57}$$

$$\varphi^{V(ij)}_{l=1,\ J=2} = \left[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i)(\mathbf{p}\mathbf{e}_j) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_j)(\mathbf{p}\mathbf{e}_i) - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\delta_{ij}\right]\varphi^{(0)}. \tag{58}$$

如已标出的那样，上面三个解代表 $J = 0, 1, 2$ 三个态.

(56) 式又可写为

$$\varphi^{Vk}_{l=1,\ J=1} = (\mathbf{e}_k,\ \boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p})\varphi^{(0)},\quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j. \tag{59}$$

当层子和反层子间的作用与自旋无关时，上面三个解 (56),(57),(58) 三式的能级是相同的. 如果存在着自旋轨道耦合或者张量作用，这三个态的能级将分裂. 现已发现的 $f_0(1270, J = 2)$, $E(1420, J = 1)$ 和 $S(993, J = 0)$ 可以看作是 ω 的 $l = 1$ 的三个激发态；已发现的 $A_2(1310, J = 2)$, $F_1(1540, J = 1?)$ 和 $\delta(970, J = 0)$ 可以看作是 ρ 的 $l = 1$ 的三个激发态；再者，$K^{**}(1420, J = 2)$ 和 $\kappa(J = 0)$ 也可看作是 K 的 $l = 1$ 的三个激发态中的两个，其它一个态因能量较高不稳定，所以没有发现，ϕ 的 $l = 1$ 激发态只发现 f′. 初看起来也许认为 D 和 e 与 f′ 组成 $l = 1$ 的三个态，但它的能级次序与已有的三组不同. 已有的三组三重态的能级次序指出造成能级分裂的作用是张量力.

下面进一步讨论 1^- 介子的 $l=2$ 激发态. 很容易看出

$$\varphi_{l=2}^{ijk}=\left[(\mathbf{e}_i\mathbf{p})(\mathbf{e}_j\mathbf{p})-\frac{1}{3}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\mathbf{p}^2\right](\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_k)\varphi^{(0)}$$

也是(52)式的解. 上式可以组合成 $J=1, 2, 3$ 三个独立解:

$$\varphi_{l=2,J=1}^{i}=\delta_{kj}\varphi_{l=2}^{ijk}=\left[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\mathbf{e}_i\mathbf{p})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i)\mathbf{p}^2\right]\varphi^{(0)}. \tag{60}$$

$$\varphi_{l=2,J=2}^{(ij)}=\epsilon_{ick}\varphi_{l=2}^{jck}+\epsilon_{jck}\varphi^{ick}=-[(\mathbf{e}_i\mathbf{p})(\mathbf{e}_j\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p})+(\mathbf{e}_j\mathbf{p})(\mathbf{e}_i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p})]\varphi^{(0)}. \tag{61}$$

$$\varphi_{l=2,J=3}^{(ijk)}=\varphi_{l=2}^{ijk}+\varphi_{l=2}^{jki}+\varphi_{l=2}^{kij}. \tag{62}$$

ρ 的 $J=3$ 激发态 g(1680) 和 K 的 $J=3$ 激发态 $K_N(1760)$ 可以由(62)式表示,但由(60)和(61)式表示的 $J=1$ 和 $J=2$ 的激发态迄今未明确观察到. 原因可能是它们极不稳定. 有可能 $\rho'(1640)$ 是 ρ 的 $l=2, J=1$ 的激发态.

除上面讨论的角动量激发态以外，还可能存在角动量不改变的径向激发态. 由于这种激发态轨道角动量小，并且能级高，看来应是极不稳定的. 比 ρ 介子恰好高两个能级(相应于最低径向激发)的 $\rho'(1640)$ 被人们认为是 ρ 的径向 $n=1$ 的激发态. 值得注意的是 $\rho'\to 2\pi$ 反应一直没有观察到. 这可能是 ρ' 有较大的轨道角动量而不是 ρ 的径向激发态. 详细的定量的讨论已由另文给出[4].

六、介子的顶点函数和 B-S 波函数

在计算跃迁问题时,由下式定义的顶点函数:

$$F(p, P)\equiv\int \Gamma U(p, p')\chi(p', P)\Gamma d^4p' \tag{63}$$

有时比 B-S 波函数 χ 更为方便. 在质心坐标中利用(2)和(3)式立即得到

$$F(p, m)=\beta(\Phi-m\varphi)\beta, \tag{64}$$

Φ 由(14)式给出. 由(16)式看到, 上式中的 Φ 亦即 F 没有考虑到质量重正化效应. 在非相对论近似下,利用(43)式 Φ 可写成

$$\Phi=\begin{pmatrix}0 & 2M\\ -2M & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}. \tag{65}$$

将(65)和(43)式代入(64)式得

$$F(p, m)=-\begin{pmatrix}0 & 2M-m\\ -2M-m & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}.$$

(16)式也可写为

$$-\begin{pmatrix}0 & 2M-m\\ -2M-m & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}=V_0\frac{1}{2E_p}\begin{pmatrix}0 & -2M\\ 2M & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}+ar^2\frac{1}{2E_p}\begin{pmatrix}0 & -2M\\ 2M & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}.$$

利用(38)式在上式右边可以把 E_p 近似地代为 M, 因此右边第一项只代表层子质量的改

变. 把这项移到左边，上式变为

$$-\begin{pmatrix}0 & 2M'-m\\ -2M'-m & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}=ar^2\frac{1}{2M}\begin{pmatrix}0 & -2M\\ 2M & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}+\text{含}\ \frac{V_0p^2}{4M^3}\ \text{的项},$$

其中 $2M'=2M-V_0$ 代表层子在介子中的有效质量. 这样可以定义一个重正化的顶点波函数为

$$F_r(p,m)=-\begin{pmatrix}0 & 2M'-m\\ -2M'-m & 0\end{pmatrix}g_+^{(0)}. \tag{66}$$

用 γ 矩阵表出式为

$$F_r(p,m)=-\gamma_5(m+\gamma_4M')g_+^{(0)}. \tag{67}$$

在任意坐标中，(67) 式可表为

$$F_r(p,P)=-\gamma_5\left(m+i\hat{P}\frac{M'}{m}\right)e^{-\frac{1}{4\lambda}\left(p^2+\frac{(Pp)^2}{m^2}\right)}. \tag{68}$$

这表明 0^- 介子和层子的作用包含赝标和赝矢两种类型.

在介子内部重正化后的层子传播函数可写为

$$S_F(p)=\frac{1}{i\hat{p}+M-\gamma_5V_0/2}=\frac{-i\hat{p}+M+\gamma_5V_0/2}{p^2+M^2-\frac{1}{4}V_0^2}. \tag{69}$$

上式代表在赝标型常位阱中费米场的传播函数. 由于 M 取很大的值，在介子外部，因 $V_0=0$，$S_F(p)$ 是属于 M^{-1} 量级的小量，当计算介子和外场的作用时，这部分的传播函数的贡献可以略去. 所以在计算介子和外场的作用时，层子的传播函数可以直接用(69)式. 由于积分必然包括顶点函数 (68)式，积分的区域将实际上限于介子的内部.

参　考　文　献

[1] 原子能，**3** (1966), 131—236; **7-8** (1966), 439—507; 北京大学学报(自然科学)，**2** (1966), 103—237.

[2] L. Schiff, *Ann. of Phys.*, **63** (1971), 1.

[3] B. Kursunoglu, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1690.

[4] 胡宁，物理学报，**25** (1976), 65. 该文所引文献 [1] 系指本文，但误为另一已发表的文章，顺便在此更正.

[5] 北京大学物理系基本粒子理论组，物理学报，**25** (1976), 所引之文不是在 316 页的第一篇而是即将发表的第二篇.

THE WAVE FUNCTION OF MESONS IN THE STRATON MODEL

HU NING

(*Physics Department, Beijing University*)

ABSTRACT

An equation of the Bethe-Salpeter type is used to obtain the internal wave function of mesons. It is found that if the potential well between the straton and anti-straton is of the pseudo-scalar type, then the 0^- and 1^- mesons will satisfy the same approximate radial wave function, and thus lead to SU_6 symmetry. We have shown previously that pseudo-scalar potential is the only single type of potential which leads to this symmetry. The potential is $V = V_0 + V_1$, where V_0 represents a super-strong deep well, the effect of which is to reduce the very large mass M of the free straton to a small effective value. The motion of the straton inside the meson is therefore relativistic. V_1 represents a small potential of the order of $1/M$ of a simple harmonic oscillator. A tensor force is also introduced to account for the splitting of energy levels of the states with the same spin and orbital angular momentum. Our solutions for the ground and angular excited states of 0^- and 1^- mesons practically explain all the observed meson states. Our theory can apply equally to the baryon states if the phenomenological potential V_0 is reduced by a factor of 2.