第25卷 第6期 物理学报 Vol. 25, No. 6
1976年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1976

关于非阿贝耳规范群的对偶荷问题
——一个对单磁荷的讨论*

李华锺 冼鼎昌 郭硕鸿
（中山大学物理系）（中国科学院高能物理研究所）（中山大学物理系）

提 要

从规范场的积分定义出发，应用一个类似于在紧致流形上建立起来的微分几何定理——Gauss-Bonnet 定理——的公式得到了普遍的规范荷与对偶荷的共轭关系．电子荷与单磁荷就是这种共轭关系的一例．当规范群为 $SO(3)$，含有 $U(1)$ 群作为其不变子群时，无需引入任何关于奇异弦概念或任何自发破缺对称性的机制，我们自然地得到 't Hooft 的单磁荷解．

一

1931 年，Dirac[1] 从电磁场作为波函数的不可积的相因子这一观点出发，推测可能存在有单磁荷，单磁荷的存在则导致电荷量子化[1)]．虽然单磁荷迄今尚未被发现，但这一问题由于其带有根本的重要性，一直在理论上和实验上受到相当的注意[2]．

不久前杨振宁指出[3]，电荷量子化与规范群的紧致性有密切的关系．他论证自然界存在电荷量子化的现象意味着定义电荷的阿贝耳规范群 $U(1)$ 必须是紧致的．

上述两种观点，看起来都同电荷量子化有关，但是它们所采取的数学形式和出发点是如此不同，以至于它们之间的联系一直未曾被注意过．

最近杨振宁提出了规范场的积分形式[4]，其出发点是把由 Dirac[1]，Mandelstam[5] 等人提出及发展的电磁场是一不可积相因子这一基本观点，推广到任意的非阿贝耳规范场．我们认为这种形式的规范场理论便于用来讨论规范群的紧致性，从而有可能将本文开头所叙述的两种观点结合起来，讨论其物理含义，并且还可以推广到一般的非阿贝耳规范群的情况，这是一直未曾被探讨过的．

我们从规范场的积分定义出发，直接应用一个类似于在紧致流形上建立的微分几何定理——Gauss-Bonnet 定理的公式，结合到规范场相因子的不可积性及其物理含义，得到一个普遍的关系：对应于任一规范荷必然存在一个对偶荷．电子荷的对偶荷就是磁单荷．规范荷与对偶荷之间存在着共轭关系，此关系进一步导致这些荷的量子化，其中包括了电荷的量子化．

最近 't Hooft[6] 指出紧致非阿贝耳规范场方程可以有单磁荷解．在他的讨论中，引入了自发破缺的 Higgs-Kibble 机制，并应用到一个特定的模型（$SO(3)$ 群）．当 $U(1)$ 电磁

* 1975年5月3日收到．
1）电荷量子化指一切带电物质所带的电荷都是一个最小单位的倍数．

规范群是其子群时，在特殊的边界条件下，场方程有一个独特的解，就是单磁荷.

我们讨论的出发点和 't Hooft 不同. 我们从一般的规范荷与对偶荷的共轭关系出发，当应用到 $SO(3)$ 群时，就自然得出 Dirac[1], Schwinger[7], 't Hooft[6] 等人所得的结果. 无需引入 Higgs-Kibble 机制或任何特定的边界条件. 这里的讨论适用于任何紧致李群，单磁荷的 Dirac 条件是共轭关系的自然推论.

二

在本节中先对对偶荷作一般的、形式的推导.

研究这问题的基础是类似于微分几何的 Gauss-Bonnet 定理的一个公式. 为了便于把此公式推广应用到规范场中，这里先对此公式作一点说明.

考虑一个二维闭合曲面，其高斯曲率为 K. 把一矢量绕曲面上的一小闭合迴路平移一周，矢量的旋转角度 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = K\Delta\sigma,$$

其中 $\Delta\sigma$ 为迴路所围绕的曲面元. 把上式对曲面 S_1 积分，得到绕其边界 C 平移一周后矢量的旋转角度为

$$\Delta\theta = \iint_{S_1} K d\sigma. \tag{1}$$

如果曲面 S_2 与 S_1 形成一个闭曲面，它们的相交是迴路 C（图 1），那么，如果上式对曲面 S_2 积分，得到绕迴路 C 平移一周后矢量的旋转角为

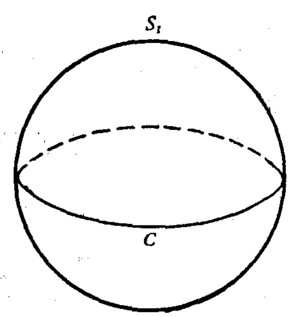

图 1

$$\Delta\theta' = \iint_{S_2} K d\sigma, \tag{2}$$

$\Delta\theta$ 不一定等于 $-\Delta\theta'$（例如当 K 在闭合曲面上到处为正数时，$\Delta\theta$ 及 $\Delta\theta'$ 均为正数）. 但是，由于 $\Delta\theta$ 及 $-\Delta\theta'$ 实质上都表示矢量绕同一迴路平移一周后的旋转角. 因此，它们只能相差 2π 的整倍数. 令 $\Delta\theta = -\Delta\theta' + 2\pi\chi$，得

$$\oiint K d\sigma = 2\pi\chi, \tag{3}$$

这就是 Gauss-Bonnet 定理[8]. (3) 式中 χ 是一个整数，其数值取决于流形的几何性质. 对于闭合的凸曲面，$\chi = 2$.

现在把上述概念推广，应用到规范场理论中去. 设有规范群 G，其生成元为 X_a，$a = 1, 2, \cdots n$，规范势为 W^a_μ，规范场为 $f^a_{\mu\nu}$，有

$$f^a_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial W^a_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial W^a_\mu}{\partial x^\nu} + C^a_{bc} W^b_\mu W^c_\nu, \tag{4}$$

其中 C^a_{bc} 是群 G 的结构常数. 根据规范场的积分定义，由 x 点移至 $x + dx$ 点时规范无关波函数的不可积相因子[4]为

$$\Phi_{x,\, x+dx} = I + gW^a_\mu(x) X_a dx^\mu. \tag{5}$$

此相因子一般为一个矩阵函数.

假设所研究的规范场是可以"阿贝耳化"的，即作适当的规范变换后，规范势只剩下阿贝耳化的一个分量，成为单参数 $U(1)$ 子群的规范势．我们考虑 G 的这样一个 $U(1)$ 子群 H．H 是紧致的，其生成元 X 在基本表示中可用 i 表示．设这个子群的规范势为 W_μ，规范场为 $f_{\mu\nu}$．由于现在只剩下一个规范势 W_μ，所以在 $f_{\mu\nu}$ 的表示式 (4) 中不出现交叉项，$f_{\mu\nu}$ 是规范势的 4-旋度．不可积相因子为

$$\Phi_{x,\,x+dx}=\mathrm{I}+i\mathrm{g}W_\mu dx^\mu. \tag{6}$$

这是一个普通的相因子，其位相为

$$\mathrm{g}W_\mu dx^\mu. \tag{6'}$$

应用 Stokes 定理，得到绕无穷小闭合迴路一周后的位相差为

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{g}f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}, \tag{7}$$

式中 $d\sigma^{\mu\nu}$ 为迴路所围的面元．把 (7) 式对一有限曲面 S 积分，得到绕 S 的边界 C 一周后的位相差

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\iint\limits_S \mathrm{g}f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}, \tag{8}$$

式中 S 为以 C 为边界的一个曲面．由 (8) 式可以看出，当有规范场存在时，时空具有类似于弯曲空间的特征．规范势类似于平移的 Christoffel 符号，规范场类似于曲率张量．特别是对于图 1 所示的闭合曲面，以 $\Delta\theta$ 表示规范场对 S_1 的积分，$\Delta\theta'$ 表示规范场对 S_2 的积分：

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\iint\limits_{S_1} \mathrm{g}f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}, \tag{9}$$

$$\Delta\theta'=\frac{1}{2}\iint\limits_{S_2} \mathrm{g}f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}, \tag{10}$$

则一般地 $\Delta\theta \fallingdotseq -\Delta\theta'$．但是由于 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\theta'$ 实质上都表示绕同一迴路 C 一周后的位相差，因之它们只可能差 2π 的整倍数．令 $\Delta\theta=-\Delta\theta'+2\pi n$，则由 (9) 和 (10) 式有

$$\frac{1}{2}\oiint \mathrm{g}f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}=2\pi n, \tag{11}$$

式中 n 为一整数．把 (11) 式写作

$$\frac{1}{2}\oiint f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}=\frac{2\pi}{\mathrm{g}}n. \tag{12}$$

(12) 式左面是一种场的通量，(12) 式不为零表示闭合曲面中有此种场的源 g：

$$\frac{1}{2}\oiint f_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}=4\pi g. \tag{13}$$

比较 (12) 及 (13) 式，有

$$g\mathrm{g}=\frac{n}{2}, \tag{14}$$

$\bar{g}$ 叫做规范荷 g 的对偶荷．对于每一个规范荷，都有对应的对偶荷．(14)式是规范荷及其对偶荷的共轭关系．

如果所考虑的 $U(1)$ 子群是电磁规范群，则 g 就是电荷 e，而 $\bar{g}$ 就是磁荷 μ，两者之间的共轭关系式为

$$\mu e = \frac{n}{2}. \tag{15}$$

这就是 Dirac 的量子化条件[1]．

关系式(11)与微分几何的 Gauss-Bonnet 定理(3)有一点不同．在微分几何中，整数 χ 由流形的性质唯一地确定；而在规范场情况下，整数 n 不能也不应由曲面的性质及规范群 G 唯一地确定．因此，场所带的规范荷以及其对偶荷都可以是一个基本荷的整数倍．

上述讨论与 Dirac 的推理[1]有相似之处．但是我们指出量子化条件(14)式是规范场的积分定义的一个自然的结果，无须引入奇异弦的概念．实际上，Dirac 所讨论的奇异性不是实质的．当 $U(1)$群作为紧致规范群的一个子群时，可以适当选择规范来避免奇异弦的引入．正如一个球面没有任何的奇异性，但是在它上面引入球面标架时就在它的两极引进了奇异性．如果把球面标架换成三维空间的固定标架，这种奇异性也就消失了．在下一节的具体计算中，将会更清楚地看到这一点．另外，我们也不需要像 't Hooft 那样引入自发破缺和 Higgs-Kibble 机制来获得对偶荷的结论．

三

在本节中具体计算一个 $SO(3)$ 规范群的例子．

考虑 $SO(3)$ 规范群．设群的矢量的表示空间的基矢为 $\boldsymbol{l}_a(a=1,2,3)$．在空间每一点上，基矢 $\boldsymbol{l}_a$ 的取向可以任意选择．群的三维表示矢量 ϕ^a 沿时空的平移关系也不是唯一确定的，存在着多种可能的平移对应关系．下面研究一种可能性，由此得出规范场的一个特殊解——球对称单磁荷解．

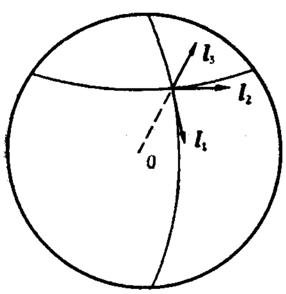

图　2

考虑一个球面．选择球面上每一点上 $\boldsymbol{l}_a$ 的取向与球坐标曲线相对应(图 2)．考虑 $SO(3)$ 群的一个 $SO(2)$ 子群(它与 $U(1)$ 群同构)，其二维表示矢量 $\phi^a(a=1,2)$ 可以看作为球面上的一个矢量．现在把球面几何上的平移关系用来作为矢量 ϕ^a 沿球面的平移关系．这种平移关系与标架 $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ 的选择无关，因此自然就是一种可能的平移关系．下面计算与此平移关系对应的规范势及规范场．

取球面坐标 (θ, ϕ)，球面上间隔为

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

度规张量 $g_{\mu\nu}(\mu, \nu = 1, 2)$ 为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{16}$$

由此求出矢量平移的 Christoffel 符号 $\Gamma^i_{j\mu}(i, j, \mu = 1, 2)$ 为

$$\begin{aligned}&\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta};\\&\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta;\\&\text{其它分量} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

或者写成矩阵形式 $(\Gamma_\theta)^i_j$ 和 $(\Gamma_\phi)^i_j$，得

$$(\Gamma_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix};\ (\Gamma_\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

$SO(2)$ 群的生成元为

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

矩阵 Γ_μ 与规范算符 $W^3_\mu X_3$ 相对应．但是还须注意一点：规范群中所用的基矢 $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ 长度不变，但在球面几何上，基矢长度随 θ 而变(两个线元为 $rd\theta$ 及 $r\sin\theta d\phi$)．因此，引入如下的变换 M，使得球面上的标架的每个基矢都为么模：

$$\tilde{v} = Mv,\quad M = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{20}$$

其中 v 为球面上的矢量．在此变换下，Γ_μ 变为 $\tilde{\Gamma}_\mu$，

$$\tilde{\Gamma}_\mu = M\Gamma_\mu M^{-1} + M\partial_\mu M^{-1}. \tag{21}$$

由此得出

$$\tilde{\Gamma}_\theta = 0;\ \tilde{\Gamma}_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -\cos\theta X_3. \tag{22}$$

矩阵 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 可以直接与 W^3_μ 联系起来：

$$\tilde{\Gamma}_\mu = gW^3_\mu X_3. \tag{23}$$

由此得出

$$gW^3_\theta = 0;\quad gW^3_\phi = -\cos\theta. \tag{24}$$

规范场为

$$\begin{aligned}&f^3_{\theta\phi} = -f^3_{\phi\theta} = \frac{\partial W^3_\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial W^3_\theta}{\partial\phi} = \frac{\sin\theta}{g};\\&\text{其它分量} = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

把规范场对球面积分，得

$$\oiint f^3_{\theta\phi}d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\sin\theta}{g} = \frac{4\pi}{g}. \tag{26}$$

因此，此规范场就是由对偶荷 $\mathrm{g} = \dfrac{1}{g}$ 作为源的场．设在此规范下 W^3_μ 为电磁势 A_μ，g 为电荷 e，则此解为单磁荷解，磁荷为

$$\mu = \frac{1}{e}. \tag{27}$$

把(24)及(25)式写成普通的矢量形式,电磁势 $\boldsymbol{A}$ 为

$$eA = -\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{l}_\phi, \tag{28}$$

电磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{f^3_{\theta\phi}}{r^2\sin\theta}\boldsymbol{l}_r = \frac{1}{er^2}\boldsymbol{l}_r, \tag{29}$$

场源就是原点处的一个单磁荷.

上面得到的场在原点处有奇异点,而势 $\boldsymbol{A}$ 除了有 $r=0$ 点处有奇异性外,在两极 $\theta=0, \pi$ 处亦有奇异性.绕两极周围的小迴路积分 $e\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\to 2\pi$,所得的解对应于 Schwinger[7] 的双向奇异弦解. 但是这种奇异性不是本质的,仅仅是上面所采用的特殊标架系的结果. 当电磁规范群作为紧致群的一个子群时,可以选择另一些标架系,使得基矢 $\boldsymbol{l}_1$ 及 $\boldsymbol{l}_2$ 不限制在球面上.这样就可以使得在势的表式中不出现上述奇异性. 例如,可以作规范变换使各点上的基矢 $\boldsymbol{l}_a$ 都转到平行于 X, Y, Z 轴方向,这规范变换为

$$\phi' = S\phi;$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{30}$$

在此规范变换下,新的规范势为

$$gW^{a'}_\mu X_a = SgW^a_\mu X_a S^{-1} + S\partial_\mu S^{-1}. \tag{31}$$

把空间分量 $\mu=\theta, \phi, r$ 变回到 x, y, z, 得

$$gW^{a'}_\mu = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x_3}{r^2} & \frac{x_2}{r^2} \\ \frac{x_3}{r^2} & 0 & -\frac{x_1}{r^2} \\ -\frac{x_2}{r^2} & \frac{x_1}{r^2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \\ a=3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \mu = \quad x & \quad y & \quad z \end{array} & \end{array} \tag{32}$$

这式子就是 't Hooft[6] 所得的规范势的解.在(32)式中,除原点外没有其他的奇异性.因此,可以得到如下的结论: (i) 't Hooft 所得的单磁荷解实质上与他所假设的 Higgs 机制无关,而是规范荷——对偶荷普遍关系的一个特殊例子; (ii) 单磁荷问题可以不必引入奇异弦来进行讨论,奇异弦的引入不是实质的.

作者同北京基本粒子理论组和中山大学基本粒子理论组进行过有益的讨论; 与西北大学,兰州大学基本粒子理论工作者曾通信讨论过;杨振宁先生寄来 't Hooft 的工作复制本,在此一并致谢.

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A133** (1931), 60; *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817.
[2] 例如参看 B. Zumino, Strong and Weak Interactions-Present Problems. (1966 International School of Physics, Erice, Ed. A. Zichichi.)

[3] C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D1** (1970), 2306.
[4] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974),445.
[5] S. Mandelstam, *Ann. Phys.*, **19** (1962), 1.
[6] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.
[7] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1407; *Phys. Rev.*, **144** (1966), 1087.
[8] N. J. Hicke, Note on Differentical Geometry, Vol. 2, 81; 吴文俊, 关于微分几何的一次报告 (1974, 北京).

ON THE PROBLEM OF THE DUAL CHARGE OF NON-ABELIAN GAUGE GROUPS ——A DISCUSSION ON MAGNETIC MONOPOLES

LI HUA-ZHONG

(*Physics Department, Chung Shan University*)

XIAN DING-CHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

GUO SHUO-HONG

(*Physics Department, Chung Shan University*)

ABSTRACT

Starting from the integral definition of gauge fields, and using a formula resembling the Gauss-Bonnet theorem —— a theorem in differential geometry on compact manifolds, we derive a general conjugate relationship between the gauge charge and the dual charge. The relation between electronic charge and the magnetic monopole is an example of this conjugate relationship. For an $SO(3)$ gauge group with a $U(1)$ group as its invariant subgroup, we obtain the 't Hooft monopole solution as a special solution, without introducing any concept of singular strings or any mechanism such as the spontaneous breaking of symmetries.