第25卷 第6期 1976年11月
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 25, No. 6 Nov., 1976

不可易规范场的对偶荷* 1)

侯伯宇 段一士 葛墨林
(西 北 大 学) (兰 州 大 学)

提 要

本文讨论了不可易 $SU(2)$ 规范场的各种规范不变物理量——电荷、对偶荷(磁荷)、电磁场以及有质量矢粒子场的表达式与关系，特别是对偶荷(磁荷)与电荷算符同位旋方向的大范围拓扑性质的关系.

一

毛主席教导我们:"**和形而上学的宇宙观相反，唯物辩证法的宇宙观主张从事物的内部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展，即把事物的发展看做是事物内部的必然的自己的运动，而每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着.**"在基本粒子理论中电磁场及引力场的规范不变性就反映了场与粒子及荷流的内在联系. 进一步探讨不可易规范场与弱作用、强作用的关系是有必要的. 近年来这方面有大量的工作，但任意性很大，表明还缺少一些实质性的东西[1]. 我们认为规范不变性的物理量及对偶荷是应该注意的一部分内容.

早在1931年狄拉克[2]就已经发现即使存在电荷的对偶荷——磁荷，仍然可以有规范不变性，不过这时规范势必须有奇异弦. 电荷逼近奇异弦时可以用规范变换改变弦的位置使之避开，而电荷绕其一周的规范不变性就自然要求电荷值是量子化的. 最近 't Hooft[3] 对于自发破缺的不可易规范场建议了用规范场 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)$ 及 Higgs 场构成的电磁分量的一个规范不变的表达式，找到了一个在远处规范势满足达兰贝尔类型方程的在中心有量子化磁荷而无奇异弦的特殊解，不过还没有明显写出这一不变规范场的麦克斯韦方程.

本文从满足第一类麦克斯韦方程这一物理要求出发，利用不可易规范不变性的自然推论(扁西等式)，表明了 't Hooft 所建议的电磁场的表达式的唯一性与合理性，然后又证明了这一规范不变的电磁场只要模为常数的同位旋矢量 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的同位旋方向转圈子这一拓扑性质存在，就必然导致量子化磁荷的存在，而 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 绕圈意味着内部必然有奇异，对应有磁荷.

磁荷的存在只取决于电磁场用不可易规范势表达及同位旋方向绕圈子这两个条件.

此外，从杨-Mills 拉氏函数出发，还讨论了如何建立此规范不变张量的第二类麦克斯韦方程的问题，它所对应的守恒荷是上述磁荷的对偶荷——电荷.

---

* 1975年6月21日收到.

1) 原载于兰州大学学报一九七五年第二期.

二

考虑电荷 e 耦合的不可易规范理论．在 $SU(2)$ 群的情况下，规范场为：

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu(x)-\partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu(x)+e\boldsymbol{W}_\mu(x)\times \boldsymbol{W}_\nu(x), \tag{1}$$

式中 $\mu,\nu=1,2,3,4$．场量为黑斜体者代表同位旋空间的矢量．规范势 $\boldsymbol{W}_\mu(x)$ 的变换规律为

$$\boldsymbol{W}'_\mu(x)=\boldsymbol{W}_\mu(x)+e\boldsymbol{W}_\mu(x)\times \boldsymbol{\alpha}(x)+\partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x), \tag{2}$$

此时 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)$ 是规范协变的．如果还存在(除奇异点外）一个在同位旋空间模为常数的矢量、在四维时空为标量的函数 $\boldsymbol{\phi}(x)$，其变换为

$$\boldsymbol{\phi}'(x)=\boldsymbol{\phi}(x)+e\boldsymbol{\phi}(x)\times \boldsymbol{\alpha}(x), \tag{3}$$

亦即它是 $SU(2)$ 群的伴随表示，则 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的规范协变微商 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}(x)$ 为

$$\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}(x)=\partial_\mu \boldsymbol{\phi}(x)+e\boldsymbol{W}_\mu\times \boldsymbol{\phi}(x). \tag{4}$$

而模为常数 λ 的条件可表示为

$$\boldsymbol{\phi}(x)\cdot \boldsymbol{\phi}(x)=\lambda^2,\quad \text{即 } |\boldsymbol{\phi}|=\lambda. \tag{5}$$

由上式可导出

$$\boldsymbol{\phi}(x)\cdot \nabla_\mu \boldsymbol{\phi}(x)=0,\ \boldsymbol{\phi}(x)\cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi}(x)=0. \tag{6}$$

这就是说在同位旋空间里，$\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}$ 和 $\partial_\mu \boldsymbol{\phi}$ 分别与 $\boldsymbol{\phi}$ 正交．

现在进一步研究这种规范理论的特点．将 $\boldsymbol{W}_\mu(x)$ 分解为 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的分量和垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的分量．为此，将(4)式两端叉乘 $\boldsymbol{\phi}$，按普通矢量运算方法得

$$\boldsymbol{W}_\mu(x)=\frac{1}{\lambda^2}(\boldsymbol{W}_\mu\cdot \boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\phi}+\frac{1}{e\lambda^2}(\boldsymbol{\phi}\times \nabla_\mu \boldsymbol{\phi})+\frac{1}{e\lambda^2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi}\times \boldsymbol{\phi}). \tag{7}$$

显然上式右端第二项在 $\boldsymbol{\phi}$ 方向，而后两项都是垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的．此外，从(7)式可以注意到，规范势垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的分量可以用 $\boldsymbol{\phi}$, $\partial_\mu \boldsymbol{\phi}$ 和 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}$ 表示出来，特别是以后可以看出，(7)式右端第三项将与磁荷的存在与否有密切的联系．

将(7)式代入(1)式，可得规范场的表达式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=&\frac{1}{\lambda^2}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\boldsymbol{\phi}+\frac{1}{e\lambda^4}[\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}\times \nabla_\nu \boldsymbol{\phi})]\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{e\lambda^2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi}\times \partial_\nu \boldsymbol{\phi})\\&+\frac{1}{\lambda^2}(A_\nu \nabla_\mu \boldsymbol{\phi}-A_\mu \nabla_\nu \boldsymbol{\phi})+(\partial_\mu \boldsymbol{B}_\nu-\partial_\nu \boldsymbol{B}_\mu)-\frac{1}{\lambda^2}[\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{B}_\nu-\partial_\nu \boldsymbol{B}_\mu)]\boldsymbol{\phi},\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$A_\mu=\boldsymbol{W}_\mu\cdot \boldsymbol{\phi}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B}_\mu=\frac{1}{e\lambda^2}(\boldsymbol{\phi}\times \nabla_\mu \boldsymbol{\phi}). \tag{10}$$

(8)式也可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=&\frac{1}{\lambda^2}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{e\lambda^2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi}\times \partial_\nu \boldsymbol{\phi})\\&+\frac{1}{e\lambda^4}[\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}\times \nabla_\nu \boldsymbol{\phi})]\boldsymbol{\phi}+\frac{1}{\lambda^2}(\boldsymbol{\phi}\times \boldsymbol{F}_{\mu\nu})\times \boldsymbol{\phi},\end{aligned} \tag{11}$$

它的物理意义我们以后再讨论.

下面寻找此规范场中电磁场部分 $F_{\mu\nu}(x)$ 的表达式,它应该是同位旋空间规范不变的(不仅是协变的),这才可能是物理量. 同时它应是四维时空中的二阶反对称张量场. 易见,用 $\boldsymbol{\phi}$, $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 构成的此种量仅可能是 $\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 及 $\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\nu\boldsymbol{\phi})$ 的线性组合. 可以根据电磁场 $F_{\mu\nu}(x)$ 在 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的非奇异区域满足第一对麦克斯韦方程

$$\partial_\mu \overset{*}{F}_{\mu\nu}(x)=0, \tag{12}$$

其中

$$\overset{*}{F}_{\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}(x),$$

这一物理要求确定如下(具体证明见附录):

$$F_{\mu\nu}(x)=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{e\lambda^3}\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\nu\boldsymbol{\phi}). \tag{13}$$

这正好是 ’t Hooft 所建议的式子,不过我们具体表明了它是唯一满足(12)式的规范不变反对称二阶张量场. 事实上,从(11)式也可以看到这个结果的正确性,但是不能排除在 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的奇异点 x_0 处可能有源-流存在,即

$$\begin{aligned}&\overset{*}{J}_\mu(x)=0,\ \text{在}\ \boldsymbol{\phi}(x)\ \text{的非奇异区;}\\ &\partial_\nu\overset{*}{F}_{\mu\nu}(x)=-\overset{*}{J}_\mu(x)\quad \overset{*}{J}_\mu(x)\neq 0,\ \text{在}\ \boldsymbol{\phi}(x)\ \text{的奇异区.}\end{aligned} \tag{14}$$

后面将进一步看出的确可以存在不为零的 $\overset{*}{J}_\mu(x)$. 从(14)式可见,这样的 $\overset{*}{J}_\mu(x)$ 就是通常的磁场源——磁荷流密度.而且由 $F_{\mu\nu}(x)$ 的反对称性可得磁荷流守恒定律

$$\partial_\mu\overset{*}{J}_\mu(x)=0. \tag{15}$$

将(11)式代入(13)式后,可得电磁场张量的具体形式

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{\lambda}[\partial_\mu(\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{\phi})-\partial_\nu(\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\phi})]-\frac{1}{e\lambda^3}(\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial_\nu\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{\phi}. \tag{16}$$

从上式可以看出,第一项是 $\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\phi}$ 的旋度. 因此对 $\overset{*}{F}_{\mu\nu}$ 的散度(磁荷)贡献必须为零;磁荷仅取决于第二项 $\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial_\nu\boldsymbol{\phi}$ 的面积分(磁通量). 因为磁荷应由下式决定:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \overset{*}{J}_\mu dS^\mu&=-\int_\Sigma\partial_\mu\overset{*}{F}_{\mu\nu}dS^\mu=-\int_\sigma\overset{*}{F}_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\int_\sigma\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}d\sigma^{\mu\nu}\\&=-\int_\sigma F_{\mu\nu}[dx^\mu\delta x^\nu].\end{aligned} \tag{17}$$

上式中 Σ 为四维时空中的三维体积, σ 是包围该体积的二维闭曲面. 将(16)式代入(17)式可知

$$\int_\Sigma\overset{*}{J}_\mu(x)dS^\mu=\frac{-1}{e\lambda^3}\int_\sigma(\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial_\nu\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{\phi}[dx^\mu\delta x^\nu]=\frac{-n}{e\lambda^3}\int_R\boldsymbol{\phi}[d\boldsymbol{\phi}\delta\boldsymbol{\phi}]=-4\pi\frac{n}{e}. \tag{18}$$

由(17)和(18)式可以看出,已将四维时空的二维闭曲面 σ 上的积分转化为 $\boldsymbol{\phi}$ 矢量在同位旋空间的积分. R 为同位旋空间中半径为 $\lambda=|\boldsymbol{\phi}|$ 的球面. $\boldsymbol{\phi}(x)$ 将空间流形中闭合曲面上的一点 x 映射到同位旋空间中半径为 λ 的球面上的一点. n 是在这个映射下当 x 走遍 σ 面一次时 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 走遍 R 的次数(覆盖重数),它只能取正负整数或零. 亦即磁荷(电荷

e 的对偶荷)是量子化的，

$$g = \frac{n}{e}. \tag{19}$$

当 $n = 1$, $g/e = 1/e^2 = 137$. 由此可知，g 将是一个很大的作用常数，因而有可能它与基本粒子内部的超强相互作用有关.

实际上，上面所谈到的积分就是 Kronecker 积分，n 是映射的次数. 应该强调指出，量子化的覆盖次数取决于在整个 σ 面上 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的方向是否转圈子. 在规范变换下，$\boldsymbol{\phi}$ 的局部方向可以变化，但是否转圈子这一整体拓扑性质却是规范不变的，即磁荷是规范不变的. 具体说，(16)式中的两项对 $SU(2)$ 群来说，它们分别都不是规范不变量. 从局部的定域变换来看，似乎总可以选择变换使得 $\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} = 0$，但是从整体来看有磁荷时不可能选定一个处处单值的定域变换将 $\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}$ 在整个曲面 σ 上同时消去. 亦即(18)式表明 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 转圈子与否这一整体拓扑性质是规范不变的.

此外，由(18)式还可以看出，$\boldsymbol{\phi}(x)$ 在同位旋空间中的反射变换使磁荷改变符号，即存在磁荷共轭变换

$$\boldsymbol{\phi} \to -\boldsymbol{\phi},\ g \to -g. \tag{20}$$

为了看出 $\boldsymbol{\phi}$ 转圈的物理意义，先讨论 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} = 0$ 的情况. 由于

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \boldsymbol{\phi} = e \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \times \boldsymbol{\phi}, \tag{21}$$

因此 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} = 0$ 意味着 $\boldsymbol{\phi}$ 沿规范场 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)$ 的方向，而磁荷的存在决定了 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 要转圈子这一拓扑特性. 同时，此时电磁场张量具有如下简单形式：

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu}, \tag{22}$$

亦即电磁场可以认为是规范场 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 在其自身方向的投影或是由 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 本性决定的规范不变张量场. 由于在通常规范场理论中有

$$\nabla_\nu \boldsymbol{F}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{J}_\mu, \tag{23}$$

这相应于假定拉氏函数的规范场部分取通常的形式：$-\frac{1}{4} \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu}$. $\boldsymbol{J}_\mu$ 形式上为同位旋矢量流密度，但实质上并不守恒(因为是 $\nabla_\mu \boldsymbol{J}_\mu = 0$ 而非 $\partial_\mu \boldsymbol{J}_\mu = 0$)，也不是规范不变的物理量. 由(22)与(23)式可知，

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \nabla_\nu F_{\mu\nu} = -J_\mu,\ \partial_\mu J_\mu = 0, \tag{24}$$

其中

$$J_\mu = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{J}_\mu. \tag{25}$$

(24)式就是第二对麦克斯韦方程，J_μ 是电流密度. 由(25)式还可看出，电流密度 J_μ 实际是同位旋流密度 $\boldsymbol{J}_\mu$ 在 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的投影，它是规范不变的物理电流. 而 $\boldsymbol{\phi}$ 的方向即是物理荷流矢、电磁场的同位旋方向. 易见，在绕 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 轴转 $\alpha(x) =$ 常数的这种 $U(1)$ 子群变换下，$\boldsymbol{W}_\mu(x)$, $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}(x)$ 都是不变的，因而(16)式中 $(\boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\phi})$ 具有通常电磁势意义，这一 $U(1)$ 子群就是通常整体的阿贝耳电磁变换.

由上面的讨论和得到磁荷的过程还可以看出，在单纯研究电磁场问题时，磁荷的存在似乎仅与 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的方向和它在时空中是如何变化的特点有关，而与它的模 $|\boldsymbol{\phi}| = \lambda$ 无关.

因而可以将 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 仅仅看成是用来描述同位旋特殊方向的单位矢量. 但问题并不这样简单,还要看到 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 和 Higgs 机制联系起来,就不能说 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的模是任意的. 相反,它的模将具有特别重要的物理意义.

三

现在进一步研究 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} \neq 0$ 情况所对应的物理含义. 先假定某个 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的协变微商 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} = 0$, 则由(7)式可知,这时规范势应为

$$\boldsymbol{\omega}_\mu = \frac{1}{\lambda^2}(\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{e\lambda^2}\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\phi}, \tag{26}$$

$\boldsymbol{\omega}_\mu$ 应满足变换关系

$$\boldsymbol{\omega}'_\mu = \boldsymbol{\omega}_\mu + e\boldsymbol{\omega}_\mu \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x_\mu}. \tag{27}$$

假定 $\boldsymbol{b}_\mu$ 为垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 的同位旋空间的任意矢量,也即它属于 $SU(2)$ 群的伴随表示,即

$$\boldsymbol{b}'_\mu(x) = \boldsymbol{b}_\mu(x) + e\boldsymbol{b}_\mu(x) \times \boldsymbol{\alpha}(x), \tag{28}$$

$$\boldsymbol{b}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\phi}(x) = 0. \tag{29}$$

那么如果定义一个新的规范势

$$\boldsymbol{W}_\mu = \boldsymbol{\omega}_\mu + \frac{1}{e\lambda^2}\boldsymbol{b}_\mu, \tag{30}$$

即

$$\boldsymbol{W}_\mu = \frac{1}{\lambda^2}(\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{e\lambda^2}\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{e\lambda^2}\boldsymbol{b}_\mu, \tag{31}$$

则由(27),(28)式可以证明,这个新的 $\boldsymbol{W}_\mu$ 仍满足规范势的变换规律(2)式. 并且利用(29)和(30)式可将(31)式改写为

$$\boldsymbol{W}_\mu = \frac{1}{\lambda^2}(\boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{e\lambda^2}\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{e\lambda^2}\boldsymbol{b}_\mu. \tag{32}$$

将(32)式代入(4)式可得

$$\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} \equiv \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + e\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{b}_\mu \times \boldsymbol{\phi}. \tag{33}$$

这就是说 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} \neq 0$ 的情况相当于在 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi} = 0$ 所对应的规范势中加进了一个任意垂直于 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的规范协变矢量 $\boldsymbol{b}_\mu$, 而 $\boldsymbol{b}_\mu$ 不会影响 $\boldsymbol{\phi}$ 原来的性质. 这种情况与微分几何中的"挠度"场的特点十分类似.

由于 $\boldsymbol{b}_\mu$ 是规范协变的,即它的变换规律为(2)式,故 $\boldsymbol{b}_\mu \cdot \boldsymbol{b}_\mu$ 是一个规范不变量. 因此,在拉氏函数中对 $\boldsymbol{b}_\mu$ 可以加入质量项

$$l_m = M^2 \boldsymbol{b}_\mu \cdot \boldsymbol{b}_\mu \tag{34}$$

并不破坏规范不变性.

从另一角度也可按通常的作法在拉氏函数中加入不变量

$$l'_m = \nabla_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla_\mu \boldsymbol{\phi}, \tag{35}$$

将(33)式代入(35)式可得

$$l'_m = (\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{b}_\mu\cdot\boldsymbol{b}_\mu) = \lambda^2(\boldsymbol{b}_\mu\cdot\boldsymbol{b}_\mu). \tag{36}$$

无论是否是自发破缺理论，l'_m 都可以提供一个质量项，因此 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\neq 0$ 的情况表示在不可易规范理论中存在一种可以具有质量的自旋为 1 的同位旋矢量场. 从(11)式右端最后一项看,它具有垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 与 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 的分量.这种场所对应的物理现实可以是通常意义的中间玻色子,也可能是其它某种矢量介子. 这种 $\boldsymbol{b}_\mu$ 场的一个重要特点,它是规范协变量. 这样就很易了解(13)式的物理意义：(13)式中减去第二项的意思就是只考虑电磁作用时,应将 $\boldsymbol{b}_\mu$ 场(可能是中间玻色子)的贡献减掉.

四

从前两节可见，当 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}=0$ 时，$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 与决定电磁作用方向的 $\boldsymbol{\phi}$ 在同位旋方向处处相同，$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 在 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的投影(即 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 本身)就是电磁场,亦即 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 内只含有电磁场 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}=0$.

而当 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 方向与 $\boldsymbol{\phi}$ 不一致时，则 $\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 中要去掉 $\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\mu\boldsymbol{\phi})=\boldsymbol{\phi}\cdot(\boldsymbol{b}_\mu\times\boldsymbol{b}_\nu)$ 后才是电磁场.这相当 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\neq 0$ 的情况. 这里 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\nu\boldsymbol{\phi}$ 就是类似中间玻色子这样的场对于 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的贡献.

因此,可以说如果 $\boldsymbol{\phi}$ 是真空破缺选定的电荷方向,且 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}=0$,则 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 内只有电磁场;当 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 与 $\boldsymbol{\phi}$ 方向不同时,则 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 内还有“中间玻色子”.

同位旋方向在原始对称情况下各方向本应是一样的，但真空破缺在同位旋空间决定了 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的方向作为电磁方向，在这个真空的基础上存在有由 $\boldsymbol{W}_\mu$ 产生的规范场所决定的物理态. 但是真空是简并的,可以由不同方向的另一个 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 决定另一真空态，而 $\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}$ 则决定了变到另一真空时所相应的物理态的变换关系，即 $\boldsymbol{b}_\mu=\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}$ 决定了不同真空态间的关系,体现了原始的对称性. 根据这种观点,“中间玻色子”或许是真空态“激发”的一种体现. 希望在此基础上能够有可能探讨有关真空激发的问题.

感谢冼鼎昌、李华鍾同志寄来 ’t Hooft 工作的预印本和有益的讨论.

附　　录

设

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \frac{a}{e\lambda^3}\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\nu\boldsymbol{\phi}), \tag{A1}$$

式中 a 为待定系数. 代入(14)式,在 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 为非奇异区得

$$\begin{aligned}\partial_\mu\overset{*}{F}_{\mu\nu} &= \nabla_\mu\overset{*}{F}_{\mu\nu} = 0 = \nabla_\mu\left\{\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\phi}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} + \frac{a}{e\lambda^3}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\lambda\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\rho\boldsymbol{\phi})]\right\}\\ &= \frac{1}{\lambda}(\nabla_\mu\boldsymbol{\phi})\cdot\overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} + \frac{a}{e\lambda^3}\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\{[\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\cdot(\nabla_\lambda\boldsymbol{\phi}\times\nabla_\rho\boldsymbol{\phi})] + \boldsymbol{\phi}\cdot[(e\overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\lambda}\times\boldsymbol{\phi})\times\nabla_\rho\boldsymbol{\phi}]\}\\ &= \frac{1}{\lambda}\nabla_\mu\boldsymbol{\phi}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}(1+a).\end{aligned} \tag{A2}$$

这里用到了扁西恒等式

$$\nabla_\mu \overset{*}{F}_{\mu\nu} = 0,$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\boldsymbol{\phi} = e\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \times \boldsymbol{\phi},$$

以及 (5), (6) 式,还考虑到了同位旋矢量 $\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}$, $\nabla_\lambda \boldsymbol{\phi}$, $\nabla_\rho \boldsymbol{\phi}$ 均在垂直于 $\boldsymbol{\phi}$ 的"平面"上,故有

$$\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho} \nabla_\mu \boldsymbol{\phi} \nabla_\nu \boldsymbol{\phi} \nabla_\rho \boldsymbol{\phi} = 0$$

的性质.

由 (A2) 式可见,除了 $(\nabla_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot \overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} = 0$ 的情况外[此时易见, $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 就已满足 $\partial_\mu(\overset{*}{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\phi}) = 0$ 的要求],上式决定了

$$a = -1. \tag{A3}$$

这就是本文中的(13)式.

参 考 文 献

[1] 杨振宁, 1974 年在北京的报告.

[2] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, (*London*), **A133** (1931), 60; *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817.

[3] G. 't Hooft, Magnetic Monopole in Unified Gauge Theories. Preprint Ref TH 1876-CERN (1974).

DUAL CHARGE OF A NON-ABELIAN GAUGE FIELD

HOU BO-YU

(*Northwest University*)

DUAN YI-SHI GE MO-LIN

(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

The gauge inrariant expressions and relations of various physical quantities in the non-Abelian $SU(2)$ gauge field, such as electric charge, dual charge (magnetic charge), electromagnetic field and massive vector field, are studied, The relation between magnetic charge and the large scale topological property of the isotopic directions of the charge operator is shown.