

脆性断裂统计理论*

邢修三

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文试图用统计方法,将金属脆性断裂的微观过程与宏观过程结合起来,把断裂理论建立于微裂纹发展动力学的统计基础上。

脆性断裂实质上是在小的范性变形过程中微裂纹成核长大的非平衡统计过程和单个主裂纹的传播过程。

本文导出了描述这种非平衡统计过程的微分积分方程,并从位错机理出发研究了微裂纹动力学,从而解出了微裂纹的分布函数,求出了金属试样的断裂几率,进而导出了延伸率、断裂强度、范性功、裂纹扩展力、断裂韧性、临界裂纹长度、范性-脆性转变温度以及它们的统计偏差与其它有关物理量之间的函数关系。

一、引 言

脆性断裂理论,目前大致可以归纳为三个方面^[1-3]:

1. 宏观理论,主要是断裂力学理论,将金属看成是连续介质,研究宏观裂纹在外应力作用下的不稳定性及其扩展过程。它所提出的新概念——断裂韧性 K_{Ic} , 在指导脆性材料的安全设计方面,提供了重要的理论根据,因而深受人们重视。但它的最大弱点是未涉及断裂的微观物理过程,因而与金属的微观结构缺乏联系,特别是断裂韧性 K_{Ic} 究竟可用哪些基本物理量表示,至今一直是人们探索的课题。

2. 微观理论,主要是位错理论,对于描述晶体中微裂纹的成核长大和传播,不仅物理图象清晰,而且某些理论推断也大致与实验相符。但它由于从单个微裂纹的状态出发,因而难以与宏观断裂过程相联系,不能说明强度的统计性和尺寸效应。至于如何从理论上描述范性变形在裂纹发展过程中的作用,虽经长期研究,迄今并未解决。

3. 统计理论^[3-5],它假设导致晶体断裂的缺陷或裂纹遵守一定的统计分布函数,说明了强度的统计性和尺寸效应。但由于它未涉及晶体的微观结构和微裂纹的动力学过程,所得的强度不反映晶体的特性,因而也不能真正解决脆性断裂问题。

综上所述,现有的脆性断裂理论虽各有所长,但也都有其局限性。因而,在继续发展这些理论的同时,人们自然会思考这样的问题^[2,6]: 如何用统计方法将断裂的微观过程与宏观过程结合起来,把断裂的统计理论建立于微裂纹发展过程的物理基础上,从而从理论上导出所有重要的宏观力学量? 本文就是试图论证: 从微裂纹动力学的位错机理出发,用非平衡统计的方法,的确有可能对整个断裂过程作统一的理论描述,并能导出延伸

* 1978年9月1日收到,1979年12月17日收到修改稿。

率、断裂强度、范性功、裂纹扩展力、断裂韧性、临界裂纹长度、范性-脆性转变温度等宏观力学量,以及它们的统计偏差。

二、物理图象

如所周知,晶体在外应力作用下,随着其内部微裂纹在不断发展,最后必将断裂。

实验指出^[4,7],晶体,特别是金属,即使是脆性的,断裂前总要发生一定的范性变形,只不过其量很小而已。微裂纹的发展就是在范性变形过程中由位错相互作用引起的。在断裂前期,晶体内有很多微裂纹在慢速成核长大,而其后期总是由一个主裂纹高速传播导致材料断裂。从位错理论出发,本文还将证明:微裂纹小时,长大速率很小,而当微裂纹大于一定的临界值后,它将很快以接近声速的高速度传播。实验证明^[3,7,8],由于实际固体内部微观成分、缺陷、相结构及范性变形的不均匀性,表现于强度等宏观力学量,总是结构敏感的,有规律分散的和有尺寸效应的,从而显示统计规律在描述断裂时的重要性。

这样,我们就有根据认为:脆性断裂过程实质上是在小的范性变形过程中微裂纹成核长大和传播的过程。

整个断裂过程是个不可逆的动力学过程,它基本上可看成由两个阶段组成的,即大量微裂纹成核长大的非平衡统计过程和单个主裂纹的传播过程。微裂纹的成核长大是由位错机理决定的。

单个微裂纹的状态(如长度和长大速率等)和宏观力学量之间的关系极为复杂,难以找出定量的函数关系。宏观断裂过程及有关的宏观力学量可由大量微裂纹的统计状态进行定量的表述。

三、微裂纹统计分布方程

如上所述,在外应力作用下,晶体的脆性断裂前期,其内部一方面在发生范性变形,同时在变形过程中微裂纹在不断成核长大。我们把这种过程看成是个非平衡统计过程,或叫随机过程,描述这种过程的将是一个微分积分方程,可称作微裂纹成核长大的统计分布方程。

为简化起见,我们只讨论一维长度的微裂纹,并假设它们在晶体内部取向分布是均匀的。设 ϵ 表示晶体发生的范性变形, c 表示微裂纹长度,分布函数 $N(\epsilon, c)dc$ 表示 ϵ 时单位体积内在长度 c 和 $c+dc$ 间形成的微裂纹的平均数目, $v(\epsilon, c)$ 表示 ϵ 时微裂纹 c 随 ϵ 的平均长大速率, $q(\epsilon)$ 表示 ϵ 时单位体积内单位变形 ϵ 内微裂纹成核的平均数目, $R(\epsilon, c, c_1)dc_1$ 表示 ϵ 时长度为 c 的微裂纹在单位变形 ϵ 内与其它微裂纹合并而变成长度在 c_1 和 c_1+dc_1 间的微裂纹的几率。由于微裂纹在范性变形过程中不断统计成核长大,根据微裂纹数目平衡原理,故分布函数 $N(\epsilon, c)$ 应遵守下列微分积分方程^[6]:

$$\frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial}{\partial c} [v(\epsilon, c)N(\epsilon, c)] + q(\epsilon)\delta(c - c_0) + \int N(\epsilon, c_1)R(\epsilon, c_1, c)dc_1 - N(\epsilon, c) \int R(\epsilon, c, c_1)dc_1, \quad (1)$$

其中 c_0 为微裂纹核的长度, $\delta(c - c_0)$ 为 Dirac 函数. (1)式右边第一项是由于均匀长大而引起微裂纹数目的增多, 第二项是由于成核而引起微裂纹数目的增多, 第三项和第四项各是由于相互合并长大而引起微裂纹数目的增多和减少, 即微裂纹平均数目对范性变形的变化率来自三部分: 均匀长大、形成新核和相互合并长大.

若已知 $v(\epsilon, c)$, $q(\epsilon)$ 和 $R(\epsilon, c, c_1)$, 就可由(1)式解出 $N(\epsilon, c)$. 注意: 这里 c 是不随 ϵ 变化的独立变数, 其物理意义就是假设单个微裂纹的长度 c 与宏观范性变形 ϵ 之间不存在函数关系.

若只存在相互合并长大, 可略去均匀长大, 则(1)式变为

$$\frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial \epsilon} = q(\epsilon)\delta(c - c_0) + \int N(\epsilon, c_1)R(\epsilon, c_1, c)dc_1 - N(\epsilon, c)\int R(\epsilon, c, c_1)dc_1. \quad (2)$$

若只存在均匀长大, 可略去相互合并长大, 则(1)式变为

$$\frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial}{\partial c} [v(\epsilon, c)N(\epsilon, c)] + q(\epsilon)\delta(c - c_0). \quad (3a)$$

本文仅讨论这种情况.

因假设导致断裂的微裂纹是在范性变形过程中形成的, 未变形时无此种微裂纹, 且因材料未断裂时, 其内部显然不存在无限大的裂纹, 故(1)式的起始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} N(\epsilon = 0, c) &= 0, \\ N(\epsilon, c \rightarrow \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

根据微分方程理论, 右边含 δ 函数项的方程 (3a) 和右边不含 δ 函数项的方程

$$\frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial}{\partial c} [v(\epsilon, c)N(\epsilon, c)] \quad (5)$$

的解完全相等, 只不过(5)式需满足源条件

$$[v(\epsilon, c)N(\epsilon, c)]_{c_0} = q(\epsilon). \quad (6)$$

(6)式的意义是: 在 $c = c_0$ 处微裂纹的长大全来自新核, 即此处微裂纹长大的平均数目等于新核的平均数目. 当然, (5)式也需满足条件(4)式.

四、微裂纹动力学

现在从位错机理出发来讨论微裂纹动力学, 目的有两个: 一方面, 是要了解微裂纹在外应力作用下的长大机理和长大速率; 另一方面, 它为本文统计理论提供微观基础.

1. 单个微裂纹动力学

根据位错理论^[1,7], 晶体内单堆积位错群或双堆积位错群都可形成微裂纹. 以 Stroh 模型的单堆积位错群为例(图 1), 若要形成微裂纹, 堆积群中位错数 n_p 需满足条件

$$n_p b \geq n_p^0 b, \quad (7)$$

n_p^0 是由晶体特性决定的常数, b 为布氏向量, τ 为作用于堆积位错群上的外加切应力, σ 为垂直作用于微裂纹上的外加拉应力, l 为滑移面长度. 一个长度为 c 的微裂纹的位能为^[9,10]

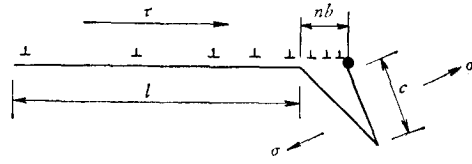


图 1

$$U = 2\gamma c - \frac{\pi(1-\nu)\sigma^2 c^2}{4\mu} - \frac{nb c \sigma}{2} - \frac{(nb)^2 \mu}{4\pi(1-\nu)}, \quad (8)$$

动能为^[1]

$$T = \frac{k\rho\sigma^2 c^2 \dot{c}^2}{E^2}, \quad (9)$$

n 为挤入微裂纹内的位错数目, μ 和 E 各为切变模量和杨氏模量, ν 为泊松比, γ 为表面能, ρ 为晶体密度, $k = 5.45$, $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ 为微裂纹的长大速率。

不难证明, 当

$$nb = \frac{2\gamma}{\sigma}, \quad (10)$$

$$c = c_k = \frac{2\gamma\mu}{\pi(1-\nu)\sigma^2} \quad (11)$$

时, $\left(\frac{\partial U}{\partial c}\right)_{c_k} = 0$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}\right)_{c_k} < 0$, 即 c_k 为 U 的极大值。(10), (11) 式可改写为

$$c = \frac{\mu}{\pi(1-\nu)\sigma} nb, \quad (12)$$

其中 nb 满足(10)式。临界值 c_k 的物理意义为: 当 $c > c_k$ (即 $nb > \frac{2\gamma}{\sigma}$) 时, 微裂纹不稳定, 迅速以近于声速的高速度传播; 当 $c < c_k$ (即 $nb < \frac{2\gamma}{\sigma}$) 时, 微裂纹只能慢慢长大。为了证实此论断, 有必要详细讨论微裂纹的长大问题。

根据能量守恒原理, 有

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0. \quad (13)$$

将(8), (9)式代入(13)式, 并求 σ , nb , c 及 \dot{c} 对 t 的微商, 即得

$$c\dot{c}\ddot{c} + \dot{c}^3 + \frac{\dot{\sigma}c\dot{c}^2}{\sigma} + \frac{E^2}{2k\rho\sigma^2c} \left[2\gamma - \frac{nb\sigma}{2} - \frac{\pi(1-\nu)\sigma^2c}{2\mu} \right] \dot{c} - \frac{E^2}{2k\rho\sigma^2c} \left[\left(\frac{\sigma c}{2} + \frac{nb\mu}{2\pi(1-\nu)} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left(\frac{nb c}{2} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma c^2}{2\mu} \right) \dot{\sigma} \right] = 0, \quad (14a)$$

式中 $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ 为外应力的增加率, $\ddot{c} = \frac{d\dot{c}}{dt}$ 为微裂纹的长大加速度。(14a)式就是微裂纹的运动方程, 它给出微裂纹的长度 c 、长大速率 \dot{c} 、长大加速度 \ddot{c} 与外应力 σ 及其它有关物理量之间的函数关系。由于难以从(14a)式解出 \dot{c} 的整个表示, 我们分 $c \ll c_k$ 和

$c > c_k$ 及 $c = c_k$ 三个阶段求其近似解,以见其变化趋向.

1) $c \ll c_k$ 及小 \dot{c} 阶段 这时可略去动能项,即略去 \dot{c}^2 , \dot{c}^3 和 \dot{c} 项,并考虑到 $2\gamma \gg \frac{nb\sigma}{2} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma^2 c}{2\mu}$, 则由(14a)式得

$$\dot{c} \simeq \left(\frac{\sigma c}{4\gamma} + \frac{nb\mu}{4\pi(1-\nu)} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left(\frac{nb c}{4\gamma} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma c^2}{4\gamma\mu} \right) \frac{d\sigma}{dt}. \quad (15)$$

可见这时微裂纹长大速率是由两部分组成的:一是挤入微裂纹内的位错数目不断增多,即 $\frac{d(nb)}{dt} > 0$ 项;另一是作用于微裂纹上的外加拉应力不断提高,即 $\frac{d\sigma}{dt} > 0$ 项.若

$\frac{d(nb)}{dt} = 0$, 同时 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, 则 $\dot{c} = 0$.

为了进一步求出(15)式中 \dot{c} 的表示,有必要算出 nb 和 $\frac{d(nb)}{dt}$. 根据位错连续分布理论,对于 Stroh 模型的微裂纹,应有^[9]

$$bD \int_0^{l+c} \frac{\rho(\lambda)}{x-\lambda} d\lambda + \sigma = 0, \quad (16)$$

其中 $D = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}$, $\rho(\lambda)$ 为位错分布密度. 由(16)式解得

$$\rho(x) = \frac{(l+c)^{1/2}\sigma}{\pi b D (l+c-x)^{1/2}}. \quad (17)$$

由此得

$$nb = b \int_l^{l+c} \rho(x) dx = \frac{4(1-\nu)(cl+c^2)^{1/2}\sigma}{\mu}. \quad (18a)$$

当 $c \ll l$ 时,则

$$nb \simeq \frac{4(1-\nu)(cl)^{1/2}\sigma}{\mu}, \quad (18b)$$

$$\frac{d(nb)}{dt} \simeq \frac{4(1-\nu)(cl)^{1/2}\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{2(1-\nu)l^{1/2}\sigma\dot{c}}{\mu c^{1/2}}. \quad (19)$$

将(18a),(19)式代入(15)式,并略去高级无穷小,则

$$\dot{c} \simeq \frac{4(1-\nu)lc\sigma\dot{\sigma}}{\pi\gamma\mu}. \quad (20)$$

由此可见:仅当 $\sigma > 0$ 且 $\dot{\sigma} > 0$ 时,微裂纹才会长大. 情况所以如此,因为微裂纹 $c < c_k$ 时,它在热力学上是稳定的. 对应于一定的外应力 σ , 存在一定的长度 c , 随着 σ 的提高, c 也变大,这就是微裂纹的长大.

若金属内微裂纹的初始长度为 c_0 , 则由(20)式可求得长大到长度为临界值 c_k 时所需的时间

$$t_f = \int_{c_0}^{c_k} \frac{dc}{\dot{c}} \simeq \frac{\pi\gamma\mu}{4(1-\nu)l\sigma\dot{\sigma}} \ln \frac{c_k}{c_0}. \quad (21)$$

我们不妨把 t_f 叫做金属在惰性介质中定向载荷下的寿命.

由(20),(21)式可见:微裂纹的长大速率 \dot{c} 和金属的寿命 t_f 既与外应力 σ 和外应力增加率 $\dot{\sigma}$ 有关,也与表面能 γ 、切变模量 μ 、滑移面长度 l 及微裂纹长度 c 有关. 若 $\dot{\sigma}=0$,

则 $\dot{c} = 0$, $t_f \rightarrow \infty$. 这就是为什么结构材料在低于其强度的定向常值载荷下长期不会破坏的原因.

利用(20),(21)式,不难理解迄今机理不清的小能量多次重复载荷冲击为何也能破坏金属,其原因就在于冲击时不仅 $\sigma > 0$, 而且 $\dot{\sigma} > 0$, 因而引起微裂纹长大. 若每次平均冲击时间为 t_1 , N 次冲击破坏金属, 则 $t_f = Nt_1$, 代入(21)式得

$$N \simeq \frac{\pi\gamma\mu}{4(1-\nu)t_1 l \dot{\sigma}} \ln \frac{c_k}{c_0}. \quad (22)$$

它与实验上的冲击次数 N -冲击能量 a_k 的变化趋向相符^[1]. 显然, 由于(20)式仅适用于 $c \ll c_k$, 故(21),(22)式只是近似的结果.

2) $c > c_k$ 及大 \dot{c} 阶段 当 $c > c_k$ 时, 裂纹在热力学上已是不稳定的, 即使 $\frac{d(nb)}{dt} = 0$ 和 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, 它在外应力 σ 作用下也可自动扩展, 故可略去(14a)式中的 $\frac{d(nb)}{dt}$ 项和 $\frac{d\sigma}{dt}$ 项, 并将(10),(11)式代入(14a)式, 得

$$c\ddot{c} + \dot{c}^2 - \dot{c}_m^2 \left(1 - \frac{c_k}{c}\right) = 0, \quad (23)$$

其中 $\dot{c}_m = \left[\frac{\pi(1-\nu^2)}{4k} \left(\frac{E}{\rho}\right)\right]^{1/2}$ 为裂纹的极限传播速率, $\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$ 为应力波在固体中传播速率.

(23)式是个微分方程, 边界条件为 $c = c_k$ 时, $\dot{c} = \dot{c}_k$, 由此解得裂纹的传播速率

$$\dot{c} = \dot{c}_m \left(1 - \frac{2c_k}{c} + \frac{c_k^2}{c^2} + \frac{\dot{c}_k^2 c_k^2}{\dot{c}_m^2 c^2}\right)^{1/2}. \quad (24)$$

裂纹的传播加速度

$$\ddot{c} = \frac{\dot{c}_m^2 c_k}{c^2} \left(1 - \frac{c_k}{c} - \frac{\dot{c}_k^2 c_k}{\dot{c}_m^2 c}\right). \quad (25)$$

可见当 $c \rightarrow \infty$ 时, $\dot{c} \rightarrow \dot{c}_m$, 即裂纹的极限传播速率接近于应力波在固体中的传播速率. 这结果已由很多理论和实验论证过.

3) $c = c_k$ 阶段 这时 $2\gamma - \frac{nb\sigma}{2} - \frac{\pi(1-\nu)\sigma^2 c}{2\mu} = 0$, 裂纹在热力学上刚开始出现不稳定. 又由(25)式, 当 $c = c_k \left(1 + \frac{\dot{c}_k^2}{\dot{c}_m^2}\right)$ 时, $\ddot{c} = 0$. 因 $\dot{c}_k \ll \dot{c}_m$, 故当 $c = c_k$ 时, 可以认为 $\ddot{c} \simeq 0$. 这样,(14)式变成三次方程

$$\dot{c}^3 + p\dot{c}^2 + r = 0, \quad (14b)$$

其中

$$p = \frac{\dot{\sigma} c}{\sigma},$$

$$r = -\frac{E^2}{2k\rho\sigma^2 c} \left[\left(\frac{\sigma c}{2} + \frac{nb\mu}{2\pi(1-\nu)}\right) \frac{d(nb)}{dt} + \left(\frac{nb c}{2} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma c^2}{2\mu}\right) \dot{\sigma} \right].$$

(20),(24)式各为(14a)式在小 c 和大 c 阶段的解, 因而也可以认为是(14b)式的两个近

似解。从物理上讲, \dot{c} 随 c 的变化应是连续的, 即在某个中间 c 值, 这两个解应相等。我们就令 $c = c_k$ 时两个解相等。根据方程式理论, 二解相等的条件为 $(\eta^3/27) + (\beta^2/4) = 0$,

其中 $\eta = -p^2/3$, $\beta = r + \frac{2p^3}{27}$, 于是求得,

$$\dot{c}_k = 2 \sqrt{\frac{-\eta}{3}} = \frac{2c_k \dot{\sigma}}{3\sigma}. \quad (26a)$$

将上式代入(12)式, 得

$$\dot{c}_k = \frac{2\mu\dot{\sigma}nb}{3\pi(1-\nu)\sigma^2}. \quad (26b)$$

nb 满足(10)式。

由(20), (26b)和(23)式可见 \dot{c} 随 c 的变化应如图 2 所

示。

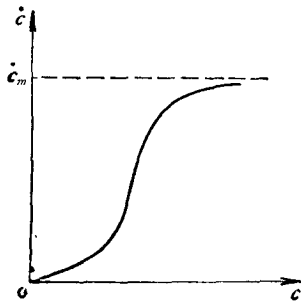


图 2

2. 平均成核率

我们仍以单堆积位错群为例来求平均成核率 $q(\epsilon)$ 。设 N_0 为单位体积内活动位错源的平均数, M 为单位体积内形成微裂纹所需的障碍(如第二相粒子)的平均数, a 为每个障碍的平均截面, $aM^{2/3}$ 为单位面积内障碍的总截面, $a^{3/2}MN_0$ 为单位体积内活动位错源与障碍相遇而形成微裂纹的潜在核的平均数, $N(\epsilon)$ 为范性变形 ϵ 时单位体积内形成的微裂纹的总平均数, 因微裂纹是由外应力 σ 作用下的位错堆积群形成的, 而且已形成微裂纹处不再形成新的微裂纹, 故可假定: 微裂纹的总平均数对外应力的增加率正比于剩余潜在核的平均数, 即

$$dN(\epsilon) = \alpha[a^{3/2}MN_0 - N(\epsilon)]d\sigma, \quad (27)$$

式中 $\alpha d\sigma$ 为外应力增加 $d\sigma$ 时每个剩余潜在核形成微裂纹的几率。由(7)式, 当 $n_p b \geq n_p^0 b$ 时, 微裂纹形成, 则 $a^{3/2}MN_0$ 个潜在核都刚好形成微裂纹时平均引起的变形为 $a^{3/2}MN_0 l^2 n_p^0 b$, 由于这种变形很小, 可看成弹性变形, 所对应的外应力为 $a^{3/2}MN_0 l^2 n_p^0 b \mu$, 故单位外应力作用下每个潜在核形成微裂纹的几率为

$$\alpha = \frac{1}{a^{3/2}MN_0 l^2 n_p^0 b \mu}. \quad (28)$$

在金属中, 外应力 σ 和范性变形 ϵ 之间存在普遍经验公式^[12]

$$\sigma = A\epsilon^m, \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon} = mA\epsilon^{m-1}, \quad (29)$$

A 为强度系数, m 为硬化指数。将(29)式代入(27)式并求积分, 得

$$N(\epsilon) = a^{3/2}MN_0(1 - e^{-\alpha A\epsilon^m}). \quad (30)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, $N(\epsilon) = 0$; 当 $\epsilon \gg (1/\alpha A)^{1/m}$ 时, $N(\epsilon) \simeq a^{3/2}MN_0$ 。微裂纹的平均成核率

$$q(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \alpha a^{3/2}MN_0 m A \epsilon^{m-1} e^{-\alpha A\epsilon^m}. \quad (31)$$

在(30), (31)式中, 都假定 N_0 与 ϵ 无关。实际上, N_0 是随 ϵ 变化的, 故上式结果只是一种近似。

3. 平均长大速率

由于我们是分三个阶段求解微裂纹长大速率 \dot{c} 的, 那么(1)式中的 $v(\epsilon, c)$ 究竟该用哪一阶段的平均长大速率? 考虑到以后讨论强度和韧性时, 我们关心的是每个微裂纹开始传播的几率, 故我们要求的 $v(\epsilon, c)$ 应是开始传播阶段的平均, 长大速率, 即是(26b)式中 \dot{c} 的平均值. 由(26b)式, 得

$$v(\epsilon, c) = \frac{\overline{dc}}{d\epsilon} = \frac{2\mu\bar{n}b}{3\pi(1-\nu)\sigma^2} \frac{d\sigma}{d\epsilon}, \quad (32a)$$

\bar{n} 为变形 ϵ 时每个微裂纹中平均挤入的位错数. 因总的范性变形 $\epsilon = N_0 l^2 (\bar{n}_p b + \bar{n} b)$, \bar{n}_p 是每个活动位错源直接引起变形的平均位错数, $n_0 l^2 \bar{n} b$ 仅是 ϵ 中很小一部分, 可看成弹性变形, 故有 $N_0 l^2 \bar{n} b \simeq \sigma/\mu$, 代入(32)式并利用(29)式, 得

$$v(\epsilon, c) = v(\epsilon) = \frac{2m}{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 \epsilon}, \quad (32b)$$

即 $v(\epsilon, c)$ 与 c 无关. 因(26a)式是近似结果, 故(32b)式也只是(1)式中 $v(\epsilon, c)$ 的一种近似表示.

五、分布函数和断裂几率

现在来求解微裂纹的分布函数 $N(\epsilon, c)$. 将(31)式中的 $q(\epsilon)$ 和(32b)式中的 $v(\epsilon, c)$ 代入(3a)式, 且为简化计算, 令 $c_0 = 0$, 则(3a)式变为

$$\frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial \epsilon} = -\frac{2m}{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 \epsilon} \frac{\partial N(\epsilon, c)}{\partial c} + \alpha a^{3/2} M N_0^m A \epsilon^{m-1} e^{-\alpha A \epsilon^m} \delta(c). \quad (3b)$$

利用拉格朗日方法, 并考虑条件(4)式, 立即求出此一阶偏微分方程的解为

$$N(\epsilon, c) = \frac{3\pi(1-\nu)a^{3/2} M N_0^m l^2 \alpha A \epsilon^m}{2} \exp\left[-\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 c}{2}\right] \times \exp\left[-\alpha A \epsilon^m \exp\left(-\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 c}{2}\right)\right], \quad (33)$$

这就是我们解得的微裂纹的分布函数, 它给出了范性变形 ϵ 时晶体单位体积内形成长度为 c 的微裂纹的平均数目随 ϵ 和 c 及有关各量的函数关系. 范性变形 ϵ 时单位体积内形成的微裂纹的总数为 $N(\epsilon) = \int_0^\infty N(\epsilon, c) dc = a^{3/2} M N_0 (1 - e^{-\alpha A \epsilon^m})$.

即(30)式所给出的结果.

由(33)式可求出微裂纹长度的几率分布函数

$$p(\epsilon, c) dc = \frac{N(\epsilon, c) dc}{N(\epsilon)} = \frac{3\pi(1-\nu)a^{3/2} M N_0^m l^2 \alpha A \epsilon^m}{2N(\epsilon)} \times \exp\left[-\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 c}{2}\right] \exp\left\{-\alpha A \epsilon^m \exp\left[-\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 c}{2}\right]\right\} dc. \quad (34)$$

$p(\epsilon, c) dc$ 的意义为: 范性变形 ϵ 时在单位体积内所有各种长度的微裂纹中找到长度在 c 和 $c + dc$ 间的微裂纹的几率. 显然, $p(\epsilon, c) dc$ 满足归一化条件

$$\int_0^{\infty} p(\epsilon, c) dc = 1.$$

由(34)式可求得微裂纹的平均长度

$$\bar{c} = \int_0^{\infty} c p(\epsilon, c) dc = \frac{2h(\epsilon)}{3\pi(1-\nu)N_0 l^2}, \quad (35)$$

其中

$$h(h) = \ln(\alpha A \epsilon^m) + \frac{\int_{\alpha A \epsilon^m}^0 \ln x \cdot e^{-x} dx}{1 - e^{-\alpha A \epsilon^m}}.$$

由于裂纹传播是以接近声速的高速度进行的,只要有一个裂纹开始传播,材料立即会断裂.人们把裂纹的开始传播应力叫做断裂强度,或简称强度.若只有一个裂纹存在,当它满足(11)式时,就会开始传播而导致材料断裂,因而(11)式可看成是断裂的充要条件.但当断裂前期已形成很多微裂纹且以分布函数(33)式的形式存在时,则(11)式只是断裂的必要条件,并非充分条件.原因是:从统计的观点看,由于微观阻力的不均匀,满足(11)式的微裂纹不一定就能传播;反之,它只有一定的传播几率.若微裂纹长度在 c 和 $c + dc$ 间的几率为 $p(\epsilon, c)dc$, 则其对应的强度在 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间的几率为 $p(\epsilon, c)d\sigma$, 根据概率论,应有 $p(\epsilon, c)d\sigma = p(\epsilon, c)|dc|$, 代入(11)和(35)式,得微裂纹强度的几率分布函数

$$p(\epsilon, \sigma)d\sigma = \frac{6a^{3/2}MN_0^2 l^2 \gamma \mu \alpha A \epsilon^m}{N(\epsilon)\sigma^3} \exp\left(\frac{-3N_0 l^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right) \times \exp\left[-\alpha A \epsilon^m \exp\left(\frac{-3N_0 l^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right)\right] d\sigma. \quad (36)$$

$p(\epsilon, c)d\sigma$ 的意义为: 范性变形 ϵ 时在单位体积内所有各种强度的微裂纹中找到强度在 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间的微裂纹的几率. 显然, $\int_0^{\infty} p(\epsilon, \sigma)d\sigma = 1$.

现在的问题是: 若固体的体积为 V , 其中共有 $N_1 = VN(\epsilon)$ 个裂纹, 它的断裂几率是什么? 由于断裂总是最小强度的裂纹引起的, N_1 个裂纹中任意一个裂纹的强度在 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间而其余 $N_1 - 1$ 个裂纹的强度都大于 σ 的几率为

$$W(\epsilon, \sigma)d\sigma = N_1 \left[\int_{\sigma}^{\infty} p(\epsilon, \sigma)d\sigma \right]^{N_1-1} p(\epsilon, \sigma)d\sigma. \quad (37)$$

$W(\epsilon, \sigma)d\sigma$ 的物理意义可理解为范性变形 ϵ 时总共形成 N_1 个裂纹的固体而其强度在 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间的断裂几率, 或简称固体的断裂几率.

$$\int_0^{\sigma} W(\epsilon, \sigma)d\sigma = 1 - \left[\int_{\sigma}^{\infty} p(\epsilon, \sigma)d\sigma \right]^{N_1(\epsilon)V} \quad (38)$$

为固体强度在 $[0, \sigma]$ 间的断裂几率. 显然, $W(\epsilon, \sigma)d\sigma$ 满足归一化条件

$$\int_0^{\infty} W(\epsilon, \sigma)d\sigma = 1.$$

其物理意义为: 任何一个固体的强度总小于 ∞ . 将(36)式代入(37)式, 得断裂几率的具体表示为

$$W(\epsilon, \sigma)d\sigma = \frac{6a^{3/2}MN_0^2 l^2 \gamma \mu \alpha A V \epsilon^m}{\sigma^3} \exp\left(\frac{-3N_0 l^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\alpha A \epsilon^m \exp\left(\frac{-3N_0 l^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right)\right]$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1 - e^{-\alpha A \epsilon^m}} \left[\exp \left[-\alpha A \epsilon^m \exp \left(-\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\sigma^2} \right) \right] - e^{-\alpha A \epsilon^m} \right] \right\}^{N(\epsilon)V^{-1}} d\sigma. \quad (39)$$

顺便指出,(37)式正是 Конторова-Френкель^[5]脆性强度统计理论的出发点,而由(38)式则可得 Weibull 脆性强度统计理论的结果^[3]. 前者是求最可几值,后者是求平均值,对于同一个 $p(\sigma)$, 两者物理意义虽不同,数值差别却不大. 当然,他们及其后继者都未涉及固体的微观结构及断裂的动力学过程,只是各自假定了一个分布函数 $p(\sigma)$.

六、宏观力学量

如所周知,对于宏观成分,工艺条件(如冷加工和热处理等)及外形尺寸相同的固体,由于其内部微观成分、缺陷及相结构的不均匀,各个试样的断裂强度和断裂韧性等力学量相差显著,为了准确地判断固体的特性,人们需要去求各个试样的统计平均值. 因此,我们就可以认为:反映固体特性的宏观力学量就是对宏观成分、工艺条件及外形尺寸相同的大量试样集合的相应的力学量的统计平均值. 设 $f(\sigma)$ 是某个与断裂有关的力学量,则其统计平均值为

$$\bar{f}(\sigma) = \int_0^{\infty} f(\sigma) W(\epsilon, \sigma) d\sigma, \quad (40)$$

其中断裂几率由(39)式表示之. 下面就是根据(39),(40)式来计算各个宏观力学量,由于(39)式很复杂,所得的结果都是近似的.

我们先计算延伸率,根据(29)式, $\epsilon = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{1/m}$, 故延伸率

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_j &= \int_0^{\infty} \epsilon W(\epsilon, \sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{1/m} W(\epsilon, \sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{A^{1/m}} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_j))} \right]^{1/2m} \left[1 + o\left(\frac{1}{\ln(VN(\epsilon_j))}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \bar{\epsilon}_j = \frac{1}{A^{1/m}} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_j))} \right]^{1/2m}. \quad (41a)$$

在以下各力学量计算中,都采用类似上式的近似,略去了右边第二个括号内 $[\ln(VN(\epsilon_j))]^{-1}$ 项以及更高次的各项,这里不再赘述.

(41a)式中 $N(\epsilon_j)$ 为断裂时单位体积内的微裂纹数目,因 $\ln N(\epsilon_j)$ 对 $N(\epsilon_j)$ 变化不敏感,故可用自洽法估算 $N(\epsilon_j)$ 中的 ϵ_j .

$$\text{断裂强度} \quad \bar{\sigma}_j = \int_0^{\infty} \sigma W(\epsilon, \sigma) d\sigma = \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_j))} \right]^{1/2}.$$

$$\text{若考虑位错存在内阻力 } \sigma_i, \text{ 则} \quad \bar{\sigma}_j = \sigma_i + \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_j))} \right]^{1/2}. \quad (42a)$$

变形 ϵ 时单位体积内消耗的范性功 $\omega = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon} A \epsilon^m d\epsilon = \sigma^{(m+1)/m} / (m+1) A^{1/m}$, 故断裂时单位体积内消耗的范性功

$$\bar{\omega}_j = \int_0^{\infty} \omega W(\epsilon, \sigma) d\sigma = \frac{1}{(m+1)A^{1/m}} \int_0^{\infty} \sigma^{\frac{m+1}{m}} W(\epsilon, \sigma) d\sigma$$

$$= \frac{1}{(m+1)A^{1/m}} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{2m}}. \quad (43a)$$

因单位体积内有 N_0 个活动位错源, 每个活动位错源平均消耗的范性功为 ω/N_0 , 又因微裂纹顶端附近应力场增强^[1,2], 在其扩展过程中将使其自身周围有效体积 V_c 内的位错源放出位错而消耗范性功, V_c 内有 $V_c N_0$ 个位错源, 每个微裂纹的平均面积近似为 \bar{c}^2 , 故变形 ϵ 时每个微裂纹扩展单位面积平均消耗的范性功为 $G = \frac{\omega}{N_0} \times V_c N_0 \times \frac{1}{\bar{c}^2} = \omega V_c / \bar{c}^2$.

如何取 V_c ? 目前这个问题仍不清楚. 从本文统计观点看, 我们假定 $V_c = [\bar{c}^3 / N(\epsilon)]^{1/2}$. 因 \bar{c}^3 和 $1/N(\epsilon)$ 各为每个微裂纹的平均实际体积和平均形式体积, 故 V_c 为两者的几何平均值, 于是 $G = \omega / [N(\epsilon) \bar{c}]^{1/2}$. 断裂时每个裂纹扩展单位面积平均消耗的范性功, 即

$$\bar{G}_{1c} = \int_0^\infty GW(\epsilon, \sigma) d\sigma = \left[\frac{1}{N(\epsilon_f) \bar{c}} \right]^{1/2} \int_0^\infty \omega W(\epsilon, \sigma) d\sigma. \quad (44a)$$

代入(35)式中的 \bar{c} , 则 $\bar{G}_{1c} = \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2}{2h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/2} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{2m}}.$ (44a)

根据断裂力学定义, 断裂韧性

$$\begin{aligned} \bar{K}_{1c} &= (\bar{E} \bar{G}_{1c})^{1/2} = E^{1/2} \int_0^\infty G^{1/2} W(\epsilon, \sigma) d\sigma \\ &= \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 E^2}{2h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/4} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{4m}}. \end{aligned} \quad (45a)$$

$$\begin{aligned} \text{临界裂纹长度 } \bar{c}_f &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{K}_{1c}}{\sigma_f} \right)^2 = \frac{E}{\pi} \int_0^\infty \frac{G}{\sigma^2} W(\epsilon, \sigma) d\sigma \\ &= \left[\frac{3(1-\nu)N_0 l^2 E^2}{2\pi h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/2} \left[\frac{3N_0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{1-m}{2m}}. \end{aligned} \quad (46a)$$

众所周知, 好多晶体, 特别是体心立方点阵结构金属, 在高温并不脆, 到低温却显著变脆, 表现于范性和韧性随温度降低而显著减小^[7,13,14]. 要想说明此现象, 只须知范性和韧性如何随温度降低而减小即可. 以断裂韧性为例, 在(45a)式各量中, 活动位错源数目 N_0 随温度 T 变化最显著. 在低温, 由于杂质封锁较强, 活动位错源数目少, 高温热激活使更多的位错源活动. 根据位错理论, 应有^[15]

$$N_0 = N_0^0 e^{-\frac{u}{kT}}, \quad (47)$$

N_0^0 为常数, u 为激活能, k 为玻耳兹曼常数. 将(47)式代入(46a)式, 得范性-脆性转变温度 T_s 的表达式

$$\frac{1}{T_s} = \frac{4mk}{(m+1)u} \ln \left\{ \frac{1}{\bar{K}_{1c}^T} \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0^0 l^2 E^2}{2h(\epsilon_f)N^0(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/4} \left[\frac{3N_0^0 l^2 \gamma \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{4m}} \right\}. \quad (48a)$$

\bar{K}_{1c}^T 为 T_s 时的断裂韧性, $N^0(\epsilon_f)$ 表示(30)式中 N_0 应由 N_0^0 代替.

在多晶体中, 当穿晶断裂时, 由于晶界的点阵不完整性及晶界两边晶粒解理面取向的不同, 因而晶界比晶粒内部对裂纹的扩展阻力更大. 若 γ_p , γ_b 及 γ 各为多晶体、晶界及晶粒内部的平均表面能, b_1 为晶界平均宽度, d 为晶粒平均直径, c_b 和 $c - c_b$ 各为裂纹 c 穿过晶界部分和晶粒内部的长度, 则单位厚度的裂纹 c 在多晶体内消耗的总表面能为

$$2\gamma_p c = 2\gamma_b c_b + 2\gamma(c - c_b) = \frac{2\gamma_b b_1 c}{d} + 2\gamma c \left(1 - \frac{b_1}{d}\right), \quad (49a)$$

其中 $c_b = b_1 c/d$. 因 $b_1 \ll d$, 故 $\gamma_p \simeq \gamma + b_1 \gamma_b/d$. (49b)

将 γ_p 代替(41a)–(46a)和(48a)式中的 γ , 得多晶体的各力学量为

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{1}{A^{1/m}} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{1/2m}, \quad (41b)$$

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_i + \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{1/2}, \quad (42b)$$

$$\bar{\omega}_f = \frac{1}{(m+1)A^{1/m}} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{2m}}, \quad (43b)$$

$$\bar{G}_{1c} = \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2}{2h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/2} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{2m}}, \quad (44b)$$

$$\bar{K}_{1c} = \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 E^2}{2h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/4} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{m+1}{4m}}, \quad (45b)$$

$$\bar{c}_f = \left[\frac{3(1-\nu)N_0 l^2 E^2}{2\pi h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/2} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{\frac{1-m}{2m}}, \quad (46b)$$

$$\frac{1}{T_s} = \frac{4mk}{(m+1)u} \ln \left\{ \frac{1}{\bar{K}_{1c}^2} \left[\frac{3\pi(1-\nu)N_0 l^2 E^2}{2h(\epsilon_f)N(\epsilon_f)(m+1)^2 A^{2/m}} \right]^{1/4} \left[\frac{3N_0 l^2 (\gamma + b_1 \gamma_b/d) \mu}{\ln(VN(G_f))} \right]^{\frac{m+1}{4m}} \right\}. \quad (48b)$$

(41b)–(46b)和(48b)式正是决定材料是否会发生脆性断裂的几个重要力学量, 其各个物理意义已如上述. 这里再稍加说明.

$\bar{\epsilon}_f$ 是判断材料是否脆性断裂的重要宏观力学量之一, 如是脆性断裂, 则由(41a)式算出的 $\bar{\epsilon}_f$ 应很小. 究竟多小才算脆断, 则与工程上的定义有关, 并无绝对标准.

尽管人们通常将 \bar{K}_{1c} 理解为韧性, 实际上, $\bar{\omega}_f$, \bar{G}_{1c} , \bar{K}_{1c} 都可作为韧性概念之一, 都是强度和范性的综合表现, 都与材料消耗的范性功有关, 只不过其物理意义不同而已. 当 ω , G , K 各等于或大于(43a), (44a)和(45a)式中的 $\bar{\omega}_f$, \bar{G}_{1c} , \bar{K}_{1c} 时, 材料都将发生断裂.

若已知材料的 A , m , N_0 , d , l , μ , ν , γ , V 等, 就可由上列各式算出 $\bar{\epsilon}_f$, $\bar{\sigma}_f$, $\bar{\omega}_f$, \bar{G}_{1c} , \bar{K}_{1c} , \bar{c}_f 和 T_s 等量, 尽管这种计算不太精确(这是目前金属物理理论不成熟的特点之一), 却可见其变化趋向. 如材料的加工硬化愈大(A 愈大, m 愈小), 活动位错源数目 N_0 愈少, 晶粒直径 d 愈大, 表面能 γ 愈小, 切变模量 μ 愈小, 试样体积 V 愈大, 则 $\bar{\epsilon}_f$, $\bar{\sigma}_f$, $\bar{\omega}_f$, \bar{G}_{1c} , \bar{K}_{1c} 和 \bar{c}_f 愈小, T_s 愈高, 材料愈脆; 反之, 结果亦相反. 这些变化趋向都与实验相符.

下表数值是根据(41a)–(46a)式对高强度时效马氏体钢所作的粗略估算, 并和实验值作了对比.

| | $\bar{\epsilon}_f(\%)$ | $\bar{\sigma}_f\left(\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}\right)$ | $\bar{\omega}_f\left(\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}\right)$ | $\bar{G}_{1c}\left(\frac{\text{kg}}{\text{mm}}\right)$ | $\bar{K}_{1c}\left(\frac{\text{kg}}{\text{mm}^{3/2}}\right)$ | $\bar{c}_f(\text{mm})$ |
|-----|------------------------|--|--|--|--|------------------------|
| 理论值 | 5.6 | 150 | 7.6 | 4.5 | 307 | 2.9 |
| 实验值 | 4 | 160 | | 3 | 245 | 2.3 |

七、统计偏差

由于强度和韧性等宏观力学量是结构敏感且有规律地显著分散的, 现在用熟知的统计公式计算这种分散.

$f(\sigma)$ 的平均平方偏差公式为

$$D(f) = \overline{[f(\sigma) - \overline{f(\sigma)}]^2} = \overline{[f(\sigma)]^2} - [\overline{f(\sigma)}]^2, \quad (50)$$

其中

$$\overline{[f(\sigma)]^2} = \int_0^{\infty} [f(\sigma)]^2 W(\epsilon, \sigma) d\sigma. \quad (51)$$

$$f(\sigma) \text{ 的相对偏差公式为 } \frac{\sqrt{D(f)}}{\overline{f(\sigma)}} = \frac{\sqrt{\overline{[f(\sigma)]^2} - [\overline{f(\sigma)}]^2}}{\overline{f(\sigma)}}. \quad (52)$$

由(39), (40), (50), (51)和(52)式就可算得各宏观力学量的统计偏差, 其近似结果如下.

$$\text{对于延伸率, 其平均平方偏差 } D(\epsilon_f) = \frac{(1-m)(\bar{\epsilon}_f)^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}, \quad (53)$$

$$\text{其相对偏差为 } \frac{\sqrt{D(\epsilon_f)}}{\bar{\epsilon}_f} = \frac{\sqrt{1-m}}{2m \ln(VN(\epsilon_f))}. \quad (54)$$

对于强度, 其平均平方偏差为

$$D(\sigma_f) = \frac{(\bar{\sigma}_f)^2}{4[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}, \quad (55)$$

其相对偏差为

$$\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f} = \frac{1}{2 \ln(VN(\epsilon_f))}. \quad (56)$$

$$\text{对于范性功, 其平均平方偏差为 } D(\omega_f) = \frac{(m+1)^2(\bar{\omega}_f)^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}, \quad (57)$$

$$\text{其相对偏差为 } \frac{\sqrt{D(\omega_f)}}{\bar{\omega}_f} = \frac{m+1}{2m \ln(VN(\epsilon_f))}. \quad (58)$$

$$\text{对于裂纹扩展力, 其平均平方偏差为 } D(G_{1c}) = \frac{(m+1)^2(\bar{G}_{1c})^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}, \quad (59)$$

$$\text{其相对偏差为 } \frac{\sqrt{D(G_{1c})}}{\bar{G}_{1c}} = \frac{m+1}{2m \ln(VN(\epsilon_f))}. \quad (60)$$

$$\text{对于断裂韧性, 其平均平方偏差为 } D(K_{1c}) = \frac{(m+1)^2(\bar{K}_{1c})^2}{16m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}, \quad (61)$$

$$\text{其相对偏差为 } \frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}} = \frac{m+1}{4m \ln(VN(\epsilon_f))}. \quad (62)$$

由上列结果可见: 硬化指数 m 愈小(材料愈脆)、试样体积 V 愈小, 总裂纹数目 $N(\epsilon_f)$ 愈少, 则各力学量的统计偏差就愈大; 反之, 各力学量的统计偏差就愈小. 这种趋向是与实验结果相符的.

下面以小尺寸的高强度钢为例, 各力学量的相对偏差估算如下:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{D(\epsilon_f)}}{\bar{\epsilon}_f}$ | $\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f}$ | $\frac{\sqrt{D(\omega_f)}}{\bar{\omega}_f}$ | $\frac{\sqrt{D(G_{1c})}}{\bar{G}_{1c}}$ | $\frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}}$ |
| 22.5% | 5% | 30% | 30% | 15% |

若是测量断裂韧性的标准大试样, 则 $\frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}} = 9\%$, $\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f} = 3\%$, 结果大致与实验相符^[16].

参 考 文 献

- [1] H. Liebowitz, *Fracture*, I-VII (1968).
- [2] D. R. Curran, L. Seaman and D. A. Shockey, *Phys. Today*, January (1977), 46.
- [3] В. В. Болотин, Статистический метод в строительной механике (1965).
- [4] W. Weibull, *Proc. Roy. Swedish Inst. Eng. Res.*, 151(1939), 153.
- [5] Т. А. Конгорова и Я. И. Френкель, *ЖТФ*, 11(1941), 173.
- [6] 邢修三, 物理学报, 22(1966), 487.
- [7] B. R. Lawn and T. R. Wilshaw, *Fracture of Brittle Solids* (1975).
- [8] Б. Б. Чечулин, Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов (1963).
- [9] E. Smith, *Proc. Roy. Soc. A*, 292(1966), 134.
- [10] P. T. Head and C. Aklinson, *Acta Met.*, 15(1967), 1617.
- [11] 周惠文, 黄明志, 西安交通大学学报, 金属材料及强度专辑(1964), 143.
- [12] A. H. Cottrell, *The Mechanical Properties of Matter* (1964).
- [13] K. H. Schwalbe, *Eng. Fracture Mechanics*, 9(1977), 795.
- [14] J. F. Knott, *Fracture* (1977), Ed. D. M. R. Taplin, V. 1.
- [15] A. N. Stroh, *Adv. Phys.*, 6(1957), 418.
- [16] M. G. H. Wells and J. J. Hauser, *Fracture Prevention and Control*, Ed. D. W. Hoepfner (1974).

A STATISTICAL THEORY OF BRITTLE FRACTURE

XING XIU-SAN

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

A statistical approach is proposed in order to establish a connection between microscopic process and macroscopic process of brittle fracture, and an attempt is made to base the theory of brittle fracture on the statistical foundation of micro-crack kinetics.

The brittle fracture is described as a non-equilibrium process in which micro-cracks nucleate and grow, and the single main crack propagates under very small plastic deformation.

A differential-integral equation describing this non-equilibrium process is derived. The micro-crack kinetics is studied from the dislocation mechanism. The statistical distribution function of micro-cracks and the fracture probability of metal sample are obtained, and thus the elongation, brittle strength, ductile work, fracture toughness, critical crack length, ductile-brittle transition temperature and their statistical deviation are all deduced theoretically.