

在一个磁通量子内 dc Josephson 电流 阶梯或振荡效应的物理本质

张 裕 恒

(中国科学技术大学物理系)

1982年12月15日收到

提 要

本文分析了放置于高 Q 谐振腔中的 Josephson 结、双结 SQUID 和单结超导环,当其 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 和腔的本征频率相等时, Josephson 电流在一个磁通量子内可以产生多次阶梯或振荡的物理本质. 指出对于 Josephson 结或双结 SQUID, 当 $\omega = \omega_c$ 时, 被激发起的腔的本征振荡将反馈辐照结或 SQUID, 反馈场的频率作用使 Josephson 电流产生一般地感应台阶;而反馈场的振幅是受到外磁场调制的,当这种调制作用使反馈场振幅的空间部分与辐射场的空间部分匹配时,则引起电流在一个磁通量子内产生一系列的新的阶跃. 对单结超导环,当 $n\omega = \omega_c$ 时,被激发起的腔的振荡反馈辐照作用将迫使其超流电流产生周期小于 ϕ_0 的振荡.

一、引 言

作者和其合作者们研究了放置于高 Q 值谐振腔中的 Josephson 结^[1]、双结 SQUID^[2], 在其超流电流随磁场的衍射或干涉图形上可以出现一系列的阶梯效应;而对单结超导环^[3] 则在原来的以 ϕ_0 为周期的超流电流随磁通的锯齿波振荡上迭加一个周期为 ϕ_0/n , 振幅为锯齿波振幅的 $2/n\pi$ 倍的正弦形小振荡.

对于激发谐振腔而致的反馈作用,理论上给出一系列新的现象,其物理本质是什么呢? 它和外加微波辐照引起的现象^[4,5]不同的原因又在何处呢? 本文指出: 对于 Josephson 结和双结 SQUID, 当其超流电流的频率与腔的本征频率共振时,将激起腔的本征振荡反馈辐照结或 SQUID, 反馈场的频率作用使超流电流产生一般地感应台阶;而这个反馈场的振幅是受到磁场调制的,这种调制作用使得当反馈场振幅的空间部分与辐射场的空间部分匹配时,引起超流电流在一个磁通量子内产生多次阶跃. 对于单结超导环,当 Josephson 频率的 n 次倍频激发起腔的本征振荡时,这个振荡反馈作用于单结超导环,从而迫使超流电流产生周期小于 ϕ_0 的振荡.

二、在 ϕ_0 内阶梯效应的物理本质

让 Josephson 结平面平行于 xy 面,沿 y 方向加一个恒定的磁场 H , z 方向加一个电

压 V_0 , 则超流电流密度方程为

$$j_s(x, t) = j_c \sin(\omega t + kx + \varphi_0), \quad (1)$$

式中 $\omega = 2eV_0/\hbar$, $k = 2e\Lambda H/\hbar c$ Λ 为磁场穿透深度, $\Lambda = 2\lambda + d$, λ 为穿透深度, d 为绝缘层厚度, φ_0 为初位相. 用 l_x 和 l_y 分别表示隧道结的长和宽, 则流过结的电流为

$$\begin{aligned} I_s &= \int_{-l_x/2}^{l_x/2} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} dy j_s(x, t) \\ &= I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $I_c = j_c l_x l_y$, $\Phi_J = \Lambda l_x H$.

(2) 式的电流平均值

$$\bar{I}_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt I_s(t). \quad (3)$$

对长时间平均结果显然等于零. 这就是说通常的 I - H Fraunhofer 衍射型关系只能对零电压电流得到, 而当结上出现电压时, I - H 稳定的衍射图形消失.

1. 微波辐照

如果用一个

$$v = v_0 \cos(\omega' t + \theta) \quad (4)$$

的微波辐照结, 则(2)式要改写为

$$I_s = I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \sin \left[\omega t + \frac{2ev_0}{\hbar\omega'} \sin(\omega' t + \theta) \right]. \quad (5)$$

应用公式

$$\sin(z \sin \varphi + \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \sin(\alpha + m\varphi),$$

则(5)式可写成

$$\dot{I}_s = I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \left(\frac{2ev_0}{\hbar\omega'} \right) \sin[(\omega + m\omega')t + \varphi_0 + m\theta]. \quad (6)$$

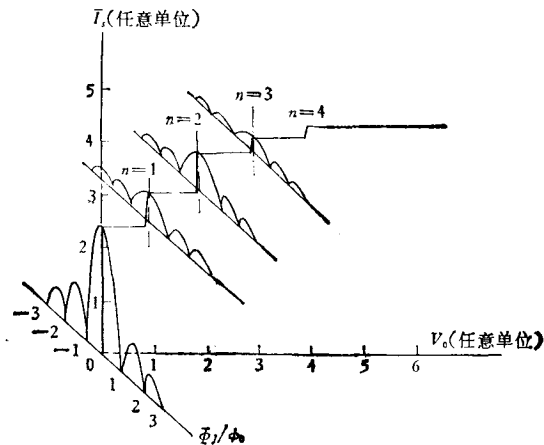


图1 各个标号的台阶高度随磁场的 Fraunhofer 衍射关系示意图

当 $\omega = n\omega' = -m\omega'$ 时, I_s 长时间平均值不为零, 即有直流分量为

$$\bar{I}_s = I_c (-1)^n \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} J_n\left(\frac{2e\nu_0}{\hbar\omega'}\right) \sin(\varphi_0 - n\theta). \quad (7)$$

取 $\varphi_0 - n\theta = \pm\pi/2$, 则得到第 n 个标号的电流阶跃高度为

$$\Delta\bar{I}_s = I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} J_n\left(\frac{2e\nu_0}{\hbar\omega'}\right) \right| \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

如不加外磁场, 则 $\Delta\bar{I}_s = I_c \left| J_n\left(\frac{2e\nu_0}{\hbar\omega'}\right) \right|$ 即为第 n 个台阶的高度. 当加外磁场时, 磁场对这个阶跃高度还要作 Fraunhofer 衍射型调制, 见图 1.

2. 反馈辐射

如果把 Josephson 结放置于谐振腔中, 当在结上加电压 V_0 时, 则结辐射出频率为 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 的电磁波, 当 ω 与腔的第 r 个本征频率 ω_r 相等时, 则激发起腔的本征振荡, 这个振荡将反馈作用到结上. 设腔的本征振荡为

$$V_r = V_{r0}\xi_z(r_0)\cos(\omega_r t + \theta), \quad (9)$$

V_{r0} 为感应电压幅值, ω_r 为腔的第 r 个本征模式的频率, $\xi_z(r_0)$ 为频率等于 ω_r 的电场本征模的空间部分 $\xi_r(r_0)$ 的 z 分量. 将(8)式中 ν_0 换成 $V_{r0}\xi_z(r_0)$, 则(8)式变成

$$\Delta\bar{I}_s = I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} J_n\left(\frac{2eV_{r0}\xi_z(r_0)}{\hbar\omega_r}\right) \right| \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

比较(8)式和(10)式, 对于 $n = 0$, 则(8)式中 $J_n\left(\frac{2e\nu_0}{\hbar\omega'}\right) = J_n\left(\frac{2ne\nu_0}{\hbar\omega}\right) = J_0(0)$, (10)

式中 $J_n\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right) = J_0(0)^{[1]}$, 共属于零压情况, 两者没有区别. 对于 $n \neq 0$, 它们形式上完全相同, 但(8)式中的 ν_0 是常量, 而(10)式中的 V_{r0} 则受到磁场 H 的调制, 由文献 [1] 很容易得到

$$\begin{aligned} V_{r0}\xi_z(r_0) = & \pm \frac{nQM\hbar I_c}{c\epsilon N} \cdot \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot [\xi_r(r_0) \cdot \mathbf{A}] \\ & \cdot J_n\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(r_0)\right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{A}$ 垂直于结面, Q 为腔的品质因素, ϵ 为介电常数, $\int_V \xi_r \cdot \xi_z dV = N\delta_{rr}$, $M_r = \int_l \xi_r \cdot dl$.

如果腔是矩形的, 设 x, y, z 的边长分别为 a, b, w , 取 $E_{k'l'}$ 本征模, 则

$$\xi_r = (0, 0, \xi_z)$$

$$\xi_z = \sin \frac{k'\pi}{a} x \sin \frac{l'\pi}{b} y \quad k', l' = 1, 2, 3, \dots$$

取最佳匹配条件 $\sin \frac{k'\pi}{a} x_0 = 1$, $\sin \frac{l'\pi}{b} y_0 = 1$, 则 $M_r = w$, $\xi_r(r_0) \cdot \mathbf{A} = \xi_z(r_0)\mathbf{A} =$

$\Lambda, N = \frac{1}{4} ab\omega$, 则 (11) 式变成

$$V_{r0}^2 = \pm \frac{4nQ\Lambda\hbar I_c}{e\epsilon ab} \cdot \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot J_n\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right). \quad (12)$$

由 (10) 和 (12) 式得

$$\Delta\bar{I}_s = \frac{e\epsilon ab}{4nQ\Lambda\hbar} V_{r0}^2. \quad (13)$$

由 (13) 式我们看到阶跃电流 $\Delta\bar{I}_s$ 决定于反馈场的振幅 V_{r0} , 而 V_{r0} 是由 (12) 式给出的, 显然它受到 H 的调制. 由于 (12) 式中的 V_{r0} 是多值解, 而我们要求的是最大的电流阶跃, 所以要求 (12) 式中最大的一个 V_{r0} , 因此 (12) 式变成

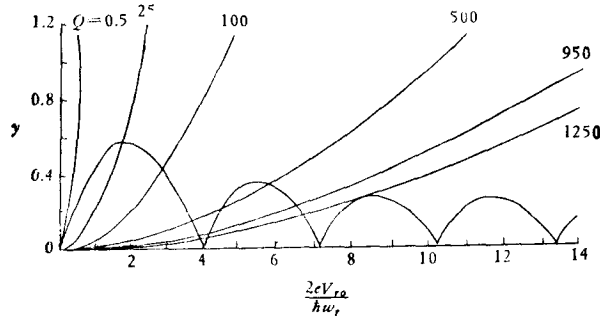
$$V_{r0}^2 = \frac{4nQ\Lambda\hbar I_c}{e\epsilon ab} \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot J_n\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right) \right|. \quad (12a)$$

令 (12a) 式中

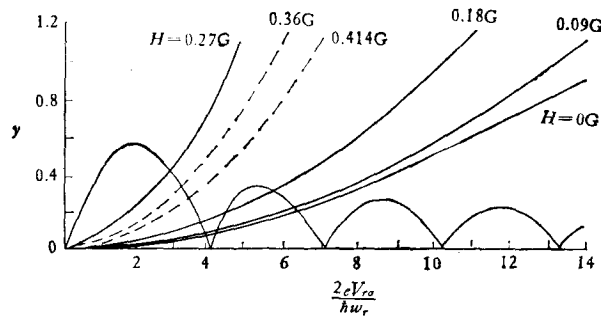
$$y = \left| J_n\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right) \right| = |J_n(\alpha V_{r0})| \quad \alpha \equiv \frac{2e}{\hbar\omega_r}, \quad (12b)$$

$$y = \frac{e\epsilon ab}{4nQ\Lambda\hbar I_c} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right|} \cdot V_{r0}^2 = \beta V_{r0}^2,$$

$$\beta \equiv \frac{e\epsilon ab}{4n \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \Lambda\hbar I_c Q}. \quad (12c)$$



(a) $H = 0$, 不同 Q



(b) $Q = 950$, 变 H

图 2 对 (12a) 式作图求解 V_{r0} 作图参数: $n = 1$, $a = b = 1\text{cm}$, $\Lambda = 1.38 \times 10^{-2}\text{cm}$, $I_c = 1\text{mA}$, $\omega_r = 130\text{GHz}$, $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coulomb/N} \cdot \text{m}^2$

对于给定标号的 n 和 Q 值,在不同的磁场下,我们可以作 $y-V_{r0}$ 关系图,见图 2. 二次曲线和 Bessel 函数曲线有很多交点,最后一个交点相应的 V_{r0} 即为 (12a) 式的解. 一般地说在能和二次曲线相交的任一个周期的 Bessel 函数曲线上都有两个交点,当 H 增大(或减小)到某一确定值时, $y = \beta V_{r0}^2$ 和 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 相切,则出现一个交点, H 再增大(或减小),则 $y = \beta V_{r0}^2$ 从与 Bessel 函数相切的周期跳到相邻的一个周期与 Bessel 函数相交,因此在这个 H 下 V_{r0} 有一个跃变值,由 (13) 式我们则得到 $\Delta \bar{I}_s$ 在一个量子周期内随 H 的多次阶跃. 图 3 给出在各次超流电流台阶上,台阶高度受到磁场 H 调制的结果.

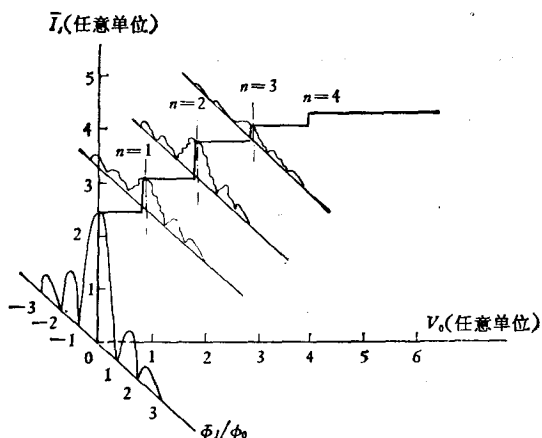


图 3 反馈场作用得到的各个标号的台阶高度随磁场变化示意图

从上面的讨论可以看到,当放置于腔中的 Josephson 结的交流电流频率 ω 与腔的本征频率 ω_r 共振时,随 V_{r0} 的增高在 $V_{r0}/(\frac{\hbar\omega_r}{2e}) = 0, 1, 2, 3, \dots$ 处,出现各次阶的恒压直流电流,也就是出现一系列的阶跃电流,从 (10) 式得到阶跃高度 $\Delta \bar{I}_{s0}$ 为

$$\Delta \bar{I}_{s0} = I_c \left| J_n \left(\frac{2e V_{r0}}{\hbar\omega_r} \right) \right|. \quad (14)$$

$\Delta \bar{I}_{s0}$ 即为 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 各次阶梯的高度. 但它和外加微波辐照不一样, 外加微波 $v = v_0 \cos(\omega' t + \theta)$ 中的振幅 v_0 是常数; 而反馈辐照的 $V_r = V_{r0} \cos(\omega_r t + \theta)$ 中的 V_{r0} 是外加磁场的函数, $V_{r0} = V_{r0}(H)$. 显然在 n 为某一确定值的台阶上外加磁场后, 阶跃电流不仅受到 H 的调制作 $\frac{\sin(\pi\Phi_J/\Phi_0)}{(\pi\Phi_J/\Phi_0)}$ 的 Fraunhofer 型变化, 而且由于 $V_{r0} = V_{r0}(H)$, H 对 V_{r0} 的调制还要使 V_{r0} 在确定的 H 下出现阶跃, 见图 4(a); 由 (13) 式得到阶跃电流在随磁场变化的 Fraunhofer 型衍射图上还要出现一系列新的阶梯, 见图 4(b).

3. 关于 $V_{r0}(H)$ 的阶跃原因

既然已经得到在一个磁通量子内超流电流的一系列阶梯是由于反馈场的振幅 V_{r0} 受到磁场 H 的调制而致, 那么很自然地要问磁场的调制是怎样引起反馈场振幅阶跃的.

我们知道 (2) 式中的 I_s 随时间的振荡部分是来自于频率 ω 的贡献, 而只有当 $\omega = \omega_r$ 时才激励腔而产生 (9) 式给出的反馈电压. 这个反馈作用使 (2) 式中 I_s 对时间的长时间平均值 $\bar{I}_s$ 不等于零, 即得 (10) 式, 因此反馈场的频率作用使 I_s 出现一系列感应台阶, 这些感应台阶与磁场的存在与否无关. 磁场只是调制 I_s 的振幅, 由 (1) 式看到磁场使结产生空间相差 $kx = \frac{2e\Lambda H}{\hbar c} x$, I_s 辐射频率为 ω_r 的电磁波时其空间部分是由 kx 决定的.

但必须注意到 (9) 式虽然是被 I_s 中的 I_{s0} 激励的, 但被激发起的腔的本征振荡, 其空间部分 $\xi_r(x, y, z)$ 是只由腔的性质决定的. 当腔的形状和尺寸给定后 $\xi_r(x, y, z)$ 的

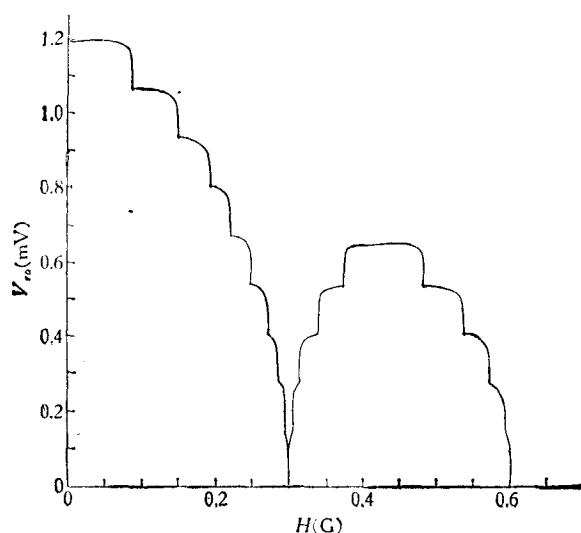
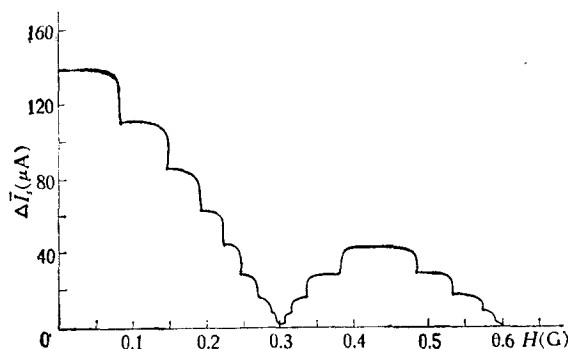
(a) 受到磁场调制的 V_{r0} 随磁场 H 的阶跃(b) 反馈场的作用使 ΔI_c 随 H 在一个磁通量子 ϕ_0 内的多次阶跃

图4 $n=1$, $Q=2.5 \times 10^4$, $l_x = l_y = 0.5 \text{ mm}$, $I_c \sim 1 \text{ mA}$, $a = b = 1 \text{ cm}$, $\Lambda = 1.38 \times 10^{-8} \text{ cm}$,
 $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coulomb/N} \cdot \text{m}^2$

形式和大小就定了。

显然 $\xi_r(x, y, z)$ 与结的辐射场的空间部分不一定匹配, 或者说反馈场

$$V_r = V_{r0} \xi_z(x, y, z) \cos(\omega_r t + \theta)$$

虽然与 I_{ω_r} 的辐射场频率相同, 但振幅却不一定同步, 而辐射场是受到磁场 H 调制的, 所以在某一些场值下可以使两者同步, 发生共振致使反馈场的振幅加强。方程(12a)正给出了这种匹配关系, 在某些给定的 H 下, (12a) 得到 V_{r0} 的跃变值正是这种空间匹配的结果。

4. 影响 $V_{r0}(H)$ 阶跃的因素

从前讨论我们已经看到, H 对 V_{r0} 的调制是使 V_{r0} 产生阶跃的充分条件, 但并不是所有情况下都能使反馈场阶跃, 还必需满足一些必要条件。例如, 如果腔的 Q 值低, 从结中辐射出的电磁波损失大, 则反馈到结上的能量低, 也就是 V_{r0} 小, 以致

$$\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \ll 1,$$

那么

$$J_1\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right) \simeq \frac{eV_{r0}}{\hbar\omega_r}. \quad (15)$$

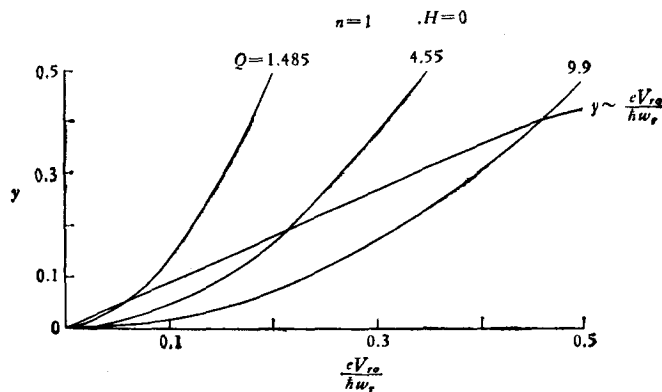
将(15)式代入(12a)式,在最好的匹配条件下,得到

$$V_{r0} = \frac{4nQ\Lambda I_c}{ab8\omega_r} \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)}. \quad (16)$$

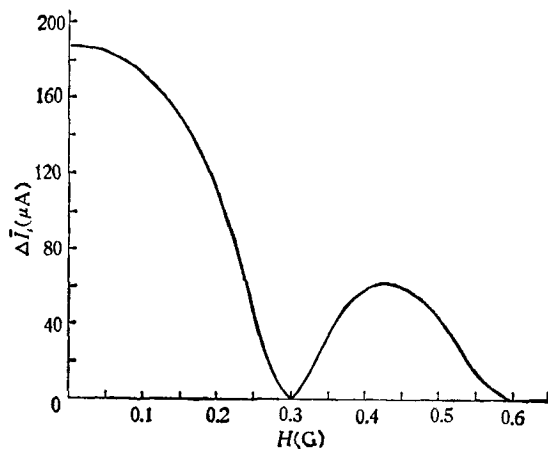
则 V_{r0} 单值地决定于 H , 也就是反馈场的振幅随 H 的变化只是 Fraunhofer 型的。如果还用前面形式的图解法求 V_{r0} , 则(12b)式相应于

$$y = \left| J_1\left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r}\right) \right| \simeq \frac{1}{2} \left| \frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \right| = \alpha_0 V_{r0} \quad \alpha_0 \equiv \frac{e}{\hbar\omega_r}. \quad (17)$$

由(17)和(12c)式作图,可得 V_{r0} 单值地随 H 变化,见图 5(a)。 H 对 V_{r0} 的调制周期就是 $\frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)}$ 的周期,不出现阶跃。图 5(b) 是 $Q = 100$ 的情况。



(a) 由(17)和(12c)式给出



(b) $Q = 100$, 其余参数同图 4

图 5 Q 值低时, H 对 V_{r0} 的调制, V_{r0} 的周期正是 ϕ_0

为此我们必须研究影响 V_{r0} 阶跃的必要因素。从(12a)式与图 2 看到 V_{r0} 的解是 $y = \beta V_{r0}^2$ 与 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 的交点, 而 $\alpha \equiv 2e/\hbar\omega_r$, 当腔给定后 ω_r 就定了。如我们

取 $a = b = 1\text{cm}$, $k' = l' = 1$, 则 $\omega_r = 130\text{GHz}$, 因此 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 只是 V_{r0} 的函数, 两条曲线的交点取决于 $y = \beta V_{r0}^2$ 中的 β , 显然 β 越小交点越多, 则出现 V_{r0} 的阶梯数越多. β 中 $\left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \leq 1$, 所以阶梯数的多少主要决定于 $\epsilon ab/Q\Lambda I_c$, 记它为符号 θ , 当 $\theta = \theta_c$ 时, 使 $y = \beta V_{r0}^2$ 与 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 只在 Bessel 函数的第一个周期中相交, 那么不论 H 如何变, V_{r0} 除了零点以外都是单值的, 而没有跳跃; 当 $\theta < \theta_c$ 时, 使 $y = \beta V_{r0}^2$ 与 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 可以在 Bessel 函数第二个周期中相交, 则 H 的变化使 V_{r0} 在某一个 H 下出现复值, 这时 $y = \beta V_{r0}^2$ 与 Bessel 函数的第二个周期相切与第一个周期相交(除了零点以外), 因此 V_{r0} 出现一次跳跃, 这正是文献[2]中 $Q = 1000$ 的单结的情况. θ 小(12a)式得到的 V_{r0} 就大, 也就是反馈场的功率大, H 对 V_{r0} 的调制使 V_{r0} 的阶跃就多.

现在分别研究 θ 中诸物理量对阶跃的影响.

1) I_c 是由结的性质决定的, I_c 大, 由(6)式给出的 I_s 大, 则 I_s 中频率为 ω_r 的 I_ω 辐射功率强, 它激发起谐振腔谐振的功率也就强, 那么 V_{r0} 就大.

2) Λ 是磁场在结中的穿透深度, 它反应了 Josephson 结吸收反馈回来的电磁波的能力, Λ 大表明吸收能力强.

3) ϵ 是腔的介电常数, 它的大小反应了谐振腔对电磁波的衰减能力. ϵ 大衰减强, 则反馈到结上的功率小.

4) a, b 和 ω 是腔的尺寸, 我们知道, 当腔内辐射源的功率一定时, 腔的尺寸越大, 腔表面接收到辐射的能量密度就越小, 因此激励起反馈场的能量也就小.

5) Q 值是腔体的品质因素, 它是衡量腔体电磁能损失的物理量. 它对反馈场的振幅起着决定性作用. 从(12a)式我们看到, 如果 $Q \rightarrow \infty$, 则 $V_{r0} \rightarrow \infty$. 这是可以理解的, 因为 $Q \rightarrow \infty$ 表明腔不损失电磁能, 在腔内能源 $j_s = j_c \sin\left(\frac{2eV_0}{\hbar}t + \varphi_0\right)$ 要不断辐射出频率为 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 的电磁波, 而当 $\omega = \omega_r$ 时, 这些电磁波在腔内形成驻波场, 只

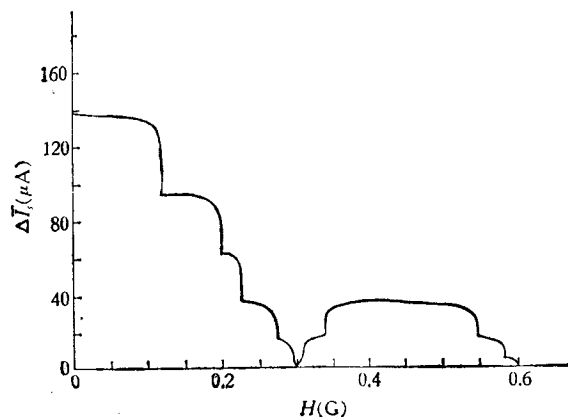


图6 在某一个确定的 Q 值下, 反馈场使 ΔI 在零场中产生阶跃的情况

$$n = 1, Q = 1.1524 \times 10^4, I_x = I_y = 0.5\text{mA}, I_c \sim 1\text{mA}, a = b = 1\text{cm}, \Lambda = 1.38 \times 10^{-3}\text{cm}, \\ \epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coulomb/N} \cdot \text{m}^2$$

要结继续不断地辐射出频率为 ω_r 的电磁波, 相干的结果则使驻波振幅 V_{r0} 不断加强, 以致趋向 ∞ ; 而当 Q 为有限值时, 结辐射的能量和腔损耗的能量平衡, 致使 V_{r0} 达到一个确定值.

由 (12a) 式可以得到当 Q 为某一确定值时, 在零场下 $y = \beta V_{r0}^2$ 与 $y = |J_n(\alpha V_{r0})|$ 就出现一个切点, 因而在零场下 $\Delta \bar{I}$, 首先出现一个阶跃, 如 $Q = 1.1524 \times 10^4$ 时的情况, 见图 6.

影响阶梯的量 $\theta = \epsilon ab / Q \Delta I_c$ 中, 除了 Q 以外, 其它量都只是变化很小的量. 只有 Q 值是出现阶梯的决定性因素.

综合上述, 可以得到结论: 放置于谐振腔中的 Josephson 结或双结 SQUID 在其 I - H 上一个量子周期内可以出现多次阶梯效应是磁场对反馈场振幅调制的结果, 而腔的 Q 值控制了反馈场振幅的大小, 因而它决定了阶梯的数目.

三、在 ϕ_0 内产生小周期的物理本质

在文献[3]中, 我们得到当对单结超导环面外加一个随时间变化的磁通 $\Phi_e = \phi_0 \nu t$ 时, 则在环中感应起一个超流电流 I , 当 I 小于结的临界电流 I_c 时, 环中没有磁通, 而当 $I > I_c$ 时, 由于超导宏观量子化效应, 进入环的磁通 Φ 只能是 $\Phi_e = k\phi_0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. 在 $I \geq \phi_0 / 2L_R$ 时, 设开始超导环处于某一个量子态 $\Phi_e = k\phi_0$, 当 Φ_e 在正方向上连续变化时, I 反向增大, 当 I 达到 $-I_c$ 时, 系统向 $k+1$ 态跃迁, 在从 k 态向 $k+1$ 态跃迁过程中, 系统自由能减少, 这种跃迁过程是自发量子跃迁, 所以当外磁通 Φ_e 随时间 t 线性变化时, 单结超导环中形成锯齿形超导电流, 锯齿波周期为 ϕ_0 .

假如我们向环外加的磁通 Φ_e 不是 $\Phi_e = \phi_0 \nu t$, 而是 $\Phi_e = \phi_0 \nu t + \sin(2\pi n \nu t)$, 显然在从 k 态向 $k+1$ 态自发量子跃迁之间的电流变化要受到正弦波 $\sin(2\pi n \nu t)$ 的调制, 则在 I 上要加上一个正弦型 $\sin(2\pi n \nu t)$ 的调制电流.

放置于谐振腔中的单结超导环, 当由 k 态向 $k+1$ 态自发跃迁时, 跃迁过程伴随着各次谐波:

$$\frac{\phi_0}{L_R} \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin(2\pi n \nu t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

的辐射, 而当 $2\pi n \nu$ 等于空腔的第 r 个本征模的频率 ω_r 时, 即

$$2\pi n \nu = n\omega = \omega_r \quad (19)$$

时将激起谐振腔的谐振, 这个振荡的反馈作用使原来的锯齿波电流上再迭加上一个

$$I_n(t) = \frac{\mathcal{J}}{1 - \mathcal{J}} I_n^{(0)}(t) \quad (20)$$

的正弦电流^[3], (20)式中 $\mathcal{J} = i \frac{QM_r^2 \mu}{L_R}$, μ 为导磁率, L_R 为环的电感, $I_n^{(0)}(t) = I_{\omega_r} = (-1)^{n+1} \frac{\phi_0}{\pi n L_R} \sin(n\omega t)$. 当 Q 值低时, 例如 $Q = 1$, 则 $|\mathcal{J}| \sim 10^{-2}$, 取 $n = 5$, 则 $I_n^{(0)}(t)$ 的幅值为 $1.3 \times 10^{-2} \mu A$, 这个效应实验上完全观测不到; 对于高 Q 值, 例如 $Q > 1000$,

则 $\mathcal{J} \sim 12.6i$, 就有 $|\mathcal{J}| \gg 1$, 则(20)式中

$$I_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{\phi_0}{\pi n L_R} \sin(n\omega t). \quad (21)$$

因此被激发的谐振腔的反馈作用于单结超导环使原有锯齿波上附加一个周期为 ϕ_0/n , 振幅为锯齿波振幅 $2/n\pi$ 倍的小周期正弦振荡。

由此我们看到 Q 的作用, 当 Q 值高时, 腔的频率为 ω_r 的谐振具有足够的能量, 它和外加辐照一样强迫环中的电流产生频率为 $\omega_r = n\omega$ 的振荡。因此可以得到结论: 放置于高 Q 腔中的单结超导环, 电流随磁通的锯齿波关系是单结超导环吸收场能发生自发量子跃迁的结果, 而锯齿波上出现的小周期振荡是被激发的腔的本征振荡反馈辐照单结超导环而致的强迫振荡。

四、结 论

对于放置于高 Q 值谐振腔中的 Josephson 结或双结 SQUID, 当其 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 的电磁波激发起腔的第 r 个本征模振荡时, 腔就辐射

$$V_r = V_{r0} \xi_r(r_0) \cos(\omega_r t + \theta)$$

的场反作用到 Josephson 结或 SQUID 上, 由于 $\omega = \omega_r$, 所以 $\cos(\omega_r t + \theta)$ 项的作用使 Josephson 电流 I_J 出现一系列长时间平均值不为零的电流感应台阶; 外加磁场 H 调制了 I_J 辐射场的空间模式, 当这个空间模式与 V_r 的空间部分 $V_{r0} \xi_r(r_0)$ 匹配时, 则使 V_{r0} 出现阶跃, 以致第 n 个电流感应台阶的高度随磁场的 Fraunhofer 衍射图上出现一系列新的阶跃。

对于放置于高 Q 值谐振腔中的单结超导环, 当对环加一个随时间 t 线性变化的磁通 $\Phi_c = \phi_0 \nu t$ 时, 单结超导环的宏观量子效应使环中的感应电流产生自发的量子跃迁, 出现电流 I 随 Φ 的锯齿波形; 而当量子跃迁过程产生的各次倍频波中的 $2\pi n\nu = n\omega$ 谐波激发腔的第 r 个本征振荡 ($n\omega = \omega_r$) 时, 腔的本征振荡辐照单结超导环使锯齿波上产生一个周期小于 ϕ_0 的强迫振荡。

参 考 文 献

- [1] 张裕恒、陈贻华, 物理学报, **31** (1982), 749.
- [2] 张裕恒、李玉芝、郑捷飞, 物理学报, **33** (1984), 第一期上.
- [3] 陈贻华、张裕恒, 物理学报, **31** (1982), 932.
- [4] S. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963), 80.
- [5] T. F. Finnegan *et al.*, *Phys. Rev. B*, **4** (1971), 1487.

THE PHYSICAL ESSENCE FOR THE STEP STRUCTURES
OR OSCILLATING EFFECT OF DC JOSEPHSON
CURRENT WITHIN ONE FLUX
QUANTUM PERIOD ϕ_0

ZHANG YU-HENG

(*Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei*)

ABSTRACT

In this paper, we analyzed the physical essence for producing a series of step structures or oscillating effect of dc Josephson current within one flux quantum period ϕ_0 by placing Josephson junction, two-junction SQUID and the superconducting ring containing a single junction in a cavity, when one of the eigen-frequencies ω_r of which is equal to Josephson frequency and the Q -Value is sufficiently high. We point out that the frequency effect of the feedback field would produce a series of induced steps for Josephson junction or two-junction SQUID, as $\omega = \omega_r$, the oscillating electric-magnetic field excited by the junction current reacts on the junctions themselves. Furthermore, a series of new step structures should occur within the ϕ_0 since the amplitude of the feedback field is modulated by applied magnetic field as the modulation of the amplitude of the feedback field is coupled with that of the radiation. For the superconducting ring containing a single junction, as $n\omega = \omega_r$, the feedback radiation of stationary electric-magnetic wave will give rise constrained oscillation of the supercurrent with a smaller period than the ϕ_0 .