

分数量子 Hall 效应的有限集团研究

熊小明 周世勋

(复旦大学物理系)
1986年11月2日收到

提 要

本文在均匀正电背景下,利用哈密顿量数值对角化方法讨论了强磁场中二维有限电子体系.对库仑相互作用的三电子体系给出了详细的讨论.计算了 $1/3$ 填充因子的基态能和波函数,并且与不可压缩流体模型的结果作了比较.

自从量子 Hall 效应^[1]和分数量子 Hall 效应^[2]发现以来,理论上做了大量的工作.在整数量子 Hall 效应方面,理论比较令人满意^[3-6].但是,分数量子 Hall 效应的机制还不很清楚. Laughlin 在三电子能量本征值的基础上^[7],对一般多体体系提出了填充因子 $\nu = 1/m$ (m 为奇数)的基态变分波函数和激发态波函数^[7,8],基本上解释了分数量子 Hall 效应的实验. Laughlin 理论中激发态准粒子的电荷为 e/m . 尽管 Laughlin 的理论已被广泛接受,但是,仍然有些评论认为 Laughlin 的基态并不是真正的基态. Chui 等人^[9]提出了另一个尝试波函数,得到了比 Laughlin 更低的基态能.

分数量子 Hall 效应的另一方面工作是对少数电子的体系进行数值计算. 这方面已有许多论文发表^[10-15]. Girvin 和 Jach 用数值对角化的方法讨论了电子数 $N = 3, 4, 5$ 个电子的体系. Yoshioka 等人的讨论计入了均匀正电背景的贡献. Haldane 和 Rezayi 在一个球面上计算了有限电子体系的基态能. Lai 等人考虑了局域电中性的体系. 由于计算的复杂性,只有有限粒子数的体系才能数值求解. 人们希望在热力学极限下能够得到真实物理体系的信息.

本文报道对少体问题的研究. 通过对无相互作用二体问题的讨论,我们找到了一个求相互作用积分的简单方法. 用电子的波函数构造了描述均匀正电背景的密度分布函数,简化了正电部分的相互作用积分. 利用哈密顿量数值对角化的方法,对不同电子数 N 计算了体系的基态能. 对二电子和三电子体系,给出了波函数的数值结果,并与 Laughlin 的波函数相符合. 从我们的结果中发现,通常用的关于填充因子 ν 与总角动量的关系并非总是正确的.

在二次量子化表象中,体系的哈密顿量为

$$H = \sum_{ij} V_b(i, j) c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2} \sum_{ikn} V(i, j, k, n) c_i^\dagger c_j^\dagger c_n c_k + \frac{1}{2} V_{bb}, \quad (1)$$

其中 c_i^\dagger, c_i 分别为电子的产生,湮灭算符; $V(i, j, k, n)$ 为电子之间相互作用积分; V_b 和 V_{bb} 分别为背景电荷与电子的相互作用以及背景间的相互作用.

$$\begin{aligned}
 V(i, j, k, n) &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi_k(\mathbf{r}_1) \phi_n(\mathbf{r}_2), \\
 V_b(i, j) &= - \int d\mathbf{r} d\mathbf{x} n(\mathbf{x}) \phi_i^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}), \\
 V_{bb} &= \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{2}
 \end{aligned}$$

式中 $n(\mathbf{x})$ 为正电背景的分布函数, $\phi_i(\mathbf{r})$ 为单电子的状态波函数. 本文限于讨论最低 Landau 能级以及库仑相互作用. 这时, 单电子波函数为

$$\phi_m(\mathbf{r}) = (2\pi m!)^{-1/2} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^m e^{-r^2/4} e^{-im\theta}, \tag{3}$$

其中 m 为单电子的角动量量子数.

通过对两个无相互作用电子体系的讨论, (2) 式中第一个积分可以变换为相对位置 $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$ 和质心坐标 $\mathbf{r}_c = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$ 的积分. 在库仑势的情况可以解析表达为

$$V(i, j, k, n) = \frac{1}{2} \sum_l b_l(i, j) b_l(k, n) \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \delta_{i+j, k+n}, \tag{4}$$

其中 $b_l(i, j)$ 满足下列递推关系和归一条件:

$$\begin{aligned}
 b_0(i, j) &= c, \quad b_l(i, j) = (i-j)/\sqrt{i+j} b_0(i, j), \\
 b_l(i, j) &= \frac{i-j}{\sqrt{(i+j-l+1)l}} b_{l-1}(i, j) - \frac{\sqrt{(i+j-l+2) \cdot (l-1)}}{\sqrt{(i+j-l+1)l}} b_{l-2}(i, j) \\
 &\quad (l = 2, 3, \dots, i+j), \\
 \sum_{l=0}^{i+j} |b_l(i, j)|^2 &= 1. \tag{5}
 \end{aligned}$$

数值计算结果表明, 均匀正电背景的密度分布可以近似用 Landau 第一能级上的单电子波函数构成.

$$n(\mathbf{x}) = \nu \sum_{m=0}^{G-1} \phi_m^*(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}), \tag{6}$$

式中 G 为 Landau 能级简并度, $\nu = N/G$ 为体系的填充因子. 图中给出由 (6) 式计算的密度分布. 同时图中还指出简并度 G 对应的样品有效半径 r_0 . 从图中可以看到, 当 G 不是太小时, 样品内的分布基本上是一条水平线, 与严格的均匀背景模型 $\theta(r_0 - r)$ 很相近.

将 (6) 式代入 (2) 式, 得到

$$V_b(i, j) = -\nu \sum_{m=0}^{G-1} V(i, m, j, m),$$

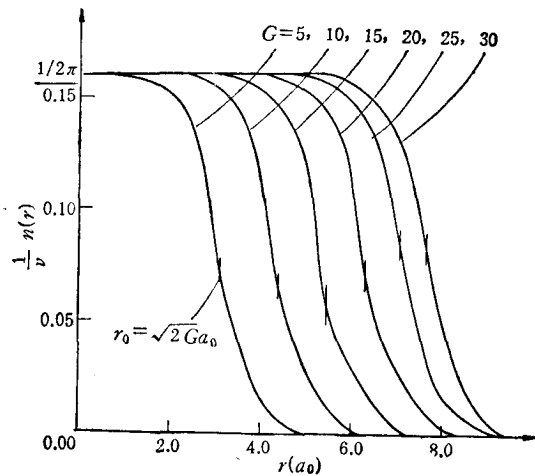


图 1

$$V_{bb} = \nu^2 \sum_{m, m'=0}^{G-1} V(m, m', m, m'). \quad (7)$$

当电子数 N 和填充因子 ν 给定时, $G = N/\nu$. 单电子的角动量 l 受简并度 G 的限制 ($l \leq G - 1$).

按照一般的数值对角化方法, 给定角动量 L , 我们计算了“均匀”背景下 $N = 2, 3, 4, 5$ 的电子体系在不同的填充因子下的基态能和第一激发能隙. 由于我们的计算基本上是属于较小的 G 的范围. 这里我们对均匀二字加了引号. 在 N 取较大值时, G 也相应增大, 本文与严格意义下的均匀背景模型一致.

图 2 画出三电子体系在 $\nu = 1/3$ 时基态能和第一激发能隙随总角动量的变化. 从图 2 可看到总角动量在某些值时基态能出现向下的尖角, 并且每一个尖角对应于一个能隙的极大值. 最低的尖角, 也就是体系的基态满足下列关系:

$$L = N(N - 1)/2\nu. \quad (8)$$

图 3 给出基态能相对于填充因子的数值结果. 由于计算机的限制, 计算的数据不多. 目前还看不出奇异性. 在 $\nu = 1/3$ 处, 可看到当 N 增加时基态能趋于某一极限值. 这个极限值与 Laughlin 的结果很靠近.

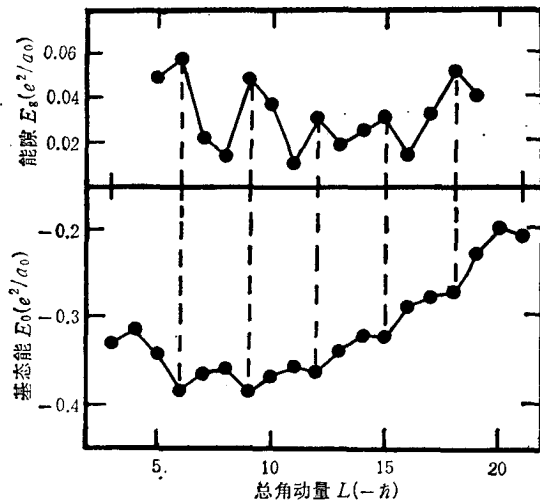


图 2

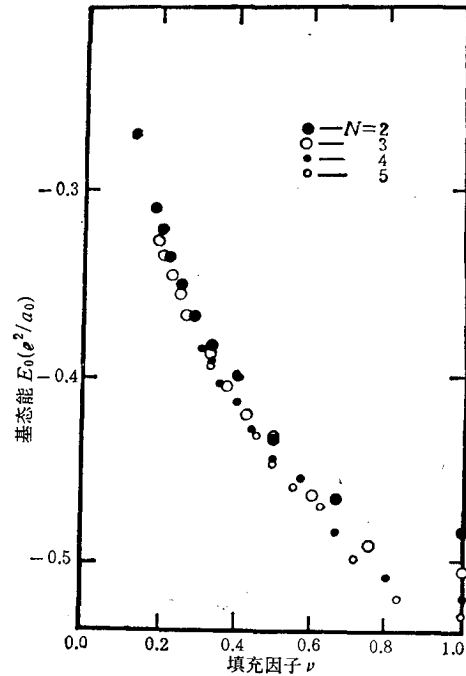


图 3

为了与 Laughlin 的一般波函数比较, 给出 $\nu = 1/3$ 时, 二电子和三电子体系的基态波函数为

$$\varphi_2 = -0.4863|0,3\rangle + 0.8738|1,2\rangle,$$

$$\varphi_3 = 0.0212|0,1,8\rangle - 0.0461|0,2,7\rangle - 0.0943|0,3,6\rangle$$

$$+ 0.3281|0,4,5\rangle + 0.3085|1,2,6\rangle - 0.4542|1,3,5\rangle \\ + 0.7612|2,3,4\rangle.$$

对应于 Laughlin 的波函数为

$$\phi_2 = -0.3162|0,3\rangle + 0.9487|1,2\rangle, \\ \phi_3 = -0.0598|0,3,6\rangle + 0.1793|0,4,5\rangle + 0.1793|1,2,6\rangle \\ - 0.3586|1,3,5\rangle + 0.8964|2,3,4\rangle.$$

当把它们点乘后, 我们看到二者符合得很好. Laughlin 的尝试波函数是一个很好的近似波函数.

$$\langle\phi_2|\phi_2\rangle = 0.9827, \langle\phi_3|\phi_3\rangle = 0.9650.$$

不过应该看到, Laughlin 波函数虽然在少数电子体系中是很好的近似. 但是, 随着 N 的增加, 近似将变坏. Tao^[46] 对 Laughlin 波函数作了详细的评论. 指出修正 Laughlin 波函数是必要的.

从我们的结果中发现通常用的总角动量与填充因子的关系式 (8) 并不总是正确的. 例如, $\nu = 1/5$ 时, 二电子和三电子体系的基态对应于总角动量为 3 和 12, 而不是 (8) 式给出的 5 和 15. 因此, 至少对少体问题 Laughlin 的一般波函数在 $\nu = 1/5$ 的情况不适用.

本文的计算方法不难推广到较高 Landau 能级以及其它相互作用势. 还可以考虑给定正电分布的体系, 例如, 电荷背景的分布为

$$n(\mathbf{x}) = \sum_i \rho(\mathbf{x} - \mathbf{R}_i),$$

其中 \mathbf{R}_i 为正电背景的格点位置. 可将 $n(\mathbf{x})$ 展开为

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{KL} c_{KL} \phi_{KL}(\mathbf{x})$$

式中 K 表示 Landau 能级; L 为角动量; c_{KL} 为展开系数,

$$c_{KL} = \int d\mathbf{x} n(\mathbf{x}) \phi_{KL}^*(\mathbf{x}).$$

我们将另文报道这方面的结果.

本工作得到高校基金准字 (85)2 的资助.

参 考 文 献

- [1] K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 494.
- [2] D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1569.
- [3] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B23**(1981), 5632.
- [4] R. E. Prange, *Phys. Rev.*, **B23**(1981), 4802.
- [5] D. J. Thouless, *J. Phys. C.*, **14**(1981), 3475.
- [6] B. I. Halperin, *Phys. Rev.*, **B25**(1982), 2185.
- [7] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1395.
- [8] R. B. Laughlin, *Surface Science*, **142**(1984), 163.
- [9] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **27**(1983), 3383.
- [10] S. T. Chui, T. M. Hakim and K. B. Ma, *Phys. Rev.*, **B33**(1986), 7110.
- [11] S. M. Girvin and T. Jach, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 4506.
- [12] D. Yoshioka, B. I. Halperin and P. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1219.
- [13] W. Lai, K. Yu, Z. Su and L. Yu, *Solid State Commun.*, **52**(1984), 339.

- [14] W. P. Su, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 1069.
[15] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 237.
[16] R. Tao, *J. Phys. C.*, **17**(1984), L53.

FINITE CLUSTER STUDIES OF THE FQHE

XIONG XIAO-MING ZHOU SHI-XUN

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

Finite cluster system of two dimensional electron gas under a high magnetic field are investigated by numerical diagonalization of the Hamiltonian. Especially for the three Coulomb interacting electron system, the detailed study is presented. The contribution from the uniform neutralizing background is included. Method used in this paper is very simple. The numerical result of the ground state energy at $1/3$ filling factor gives good approach to that of the incompressible fluid.