第 36 卷 第 3 期
1987 年 3 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 36, No. 3
Mar., 1987

关于铁磁链方程的反散射解法的严格证明和验证*

帅志刚　陈宗蕴　　黄念宁

（暨南大学）　（武汉大学华中工学院）

1986 年 5 月 9 日收到

提　　要

本文对于通常证明中引入的造成困难的因子 λ^{-1}，证明不仅应当略去，而且在略去后，同样可以得到与 Takhtajan 方程等价的结果，只在 $\lambda=0$ 处有预料到的修正. 同时，给出了反散射解法的解满足铁磁链方程的普遍验证.

铁磁链方程的反散射解法由 Takhtajan[1] 于 1977 年给出后，Fogedby[2] 和蒲富恪等人[3]又作了详细的推证和改进，然而，仍存在一些问题[4].

1979 年 Zakharov 和 Takhtajan[5] 证明了铁磁链方程与非线性 Schrödinger 方程是规范等价的，即存在一个独立于谱参数 λ 的规范变换 $g(x)$，它将此二方程之 Jost 解联系起来，即

$$\begin{aligned} F^s(x\lambda) &= g(x)F^h(x\lambda), \\ G^s(x\lambda) &= g(x)G^h(x\lambda). \end{aligned} \tag{1}$$

上标 s 和 h 分别表示属于非线性 Schrödinger 方程和铁磁链方程的量，其余记号如文献[2]. 由于(1)式，显然，对此二方程，变换矩阵 $T(\lambda)$ 是相同的，即

$$\begin{aligned} G^s(x\lambda) &= F^s(x\lambda)T(\lambda), \\ G^h(x\lambda) &= F^h(x\lambda)T(\lambda). \end{aligned} \tag{2}$$

因而 $T(\lambda)$ 的元 $a(\lambda)$，$b(\lambda)$ 及 $r(\lambda)$ 对此二方程也是相同的.

对于非线性 Schrödinger 方程，$a(\lambda)$ 的渐近行为

$$a(\lambda)\to 1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{当 } |\lambda|\to\infty,\ \mathrm{Im}\ \lambda>0 \tag{3}$$

是被严格证明了的. 因此由规范等价性，对铁磁链方程此式也成立. 而在铁磁链方程的反散射解法的原证明中，这点未能严格导出[4]. (3) 式是 Takhtajan 方程的推证的出发点.

但是，在 Takhtajan 方程的推证中仍有一个令人不解的问题[2,3].

在非线性 Schrödinger 方程的反散射解法的基本方程——G-L-M 方程的推导时，我

* 中国科学院科学基金资助的课题.

们从下式出发[6]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda(a(\lambda)^{-1}-1)G^t_1(x\lambda)e^{i\lambda z}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda[F^t_1(x\lambda)-G^t_1(x\lambda)]e^{i\lambda z}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda r(\lambda)F^t_2(x\lambda)e^{i\lambda z}, \tag{4}$$

式中 $G^t_1=\begin{pmatrix}G^t_{11}\\G^t_{21}\end{pmatrix}$,但是,在 Takhtajan 方程的推导时,出发的式子与(4)式相比,各项均多一个因子 λ^{-1}. 此一因子引入一个位于 $\lambda=0$ 处的极点,它造成对 λ 积分上的问题.

本文的目的之一是: 利用改进了的推导方法,证明此因子 λ^{-1} 不仅应当去掉,而且可以去掉,去掉后仍可以得到与 Takhtajan 方程一致的结果,但在 $\lambda=0$ 处有预期的修改.

在铁磁链方程的反散射解法中,由于

$$\boldsymbol{S}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_3-iK^h(xx)]^{-1}\sigma_3[\sigma_3-iK^h(xx)]. \tag{5}$$

式中 $K^h(xy)$ 为 Jost 核,所以需求出式中的逆矩阵. 这点甚为复杂,特别如要直接代入铁磁链方程作验证,需计算逆矩阵的二次微商.

在单孤子解时,经过计算可得

$$\det\ [\sigma_3-iK^h(xx)]=-1. \tag{6}$$

由此使逆矩阵的计算化为对厄米共轭矩阵的计算. 但在一般情况下(6)式并无证明,从而造成计算上和验证上的困难.

不久以前,文献[6,7]给出了利用规范变换作为求解铁磁链方程的方法,并得到了铁磁链方程的多孤子渐近解用非线性 Schrödinger 方程相应解的表达式.

本文的另一目的是: 给出求解铁磁链方程的规范变化法[6,7]与 Takhtajan 方法间的明确关系,同时证明(6)式一般成立,并对 Takhtajan 方法作出验证.

铁磁链方程的反散射解法的基本方程应当从与(4)式完全相同的式子出发,即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda(a(\lambda)^{-1}-1)G^h_1(x\lambda)e^{i\lambda z}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\{F^h_1(x\lambda)-G^h_1(x\lambda)\}e^{i\lambda z}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda r(\lambda)F^h_2(x\lambda)e^{i\lambda z}. \tag{7}$$

在导出 G-L-M 方程时,我们将(4)式左方加上严格证明了为零的下式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R_+} d\lambda(a(\lambda)^{-1}-1)G^t_1(x\lambda)e^{i\lambda z}=0 \quad z>x. \tag{8}$$

式中 R_+ 为 λ 复上半平面的充分大的圆弧,从而换算为求 λ 复上半平面极点的留数.

由于规范等价性(1)式,从(8)式即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R_+} d\lambda(a(\lambda)^{-1}-1)G^h_1(x\lambda)e^{i\lambda z}=0 \quad z>x. \tag{9}$$

将(7)式左方加上(9)式换为求留数后得

$$-\sum_n c_n F^s_{\cdot 1}(x\lambda_n)e^{i\lambda_n z} \tag{10}$$

在 G-L-M 方程导出时，计算(4)式右方第一项积分时，通常利用 Jost 积分表示

$$F^s(x\lambda) = e^{-i\lambda\sigma_3 x} + \int_x^\infty K^s(xy)e^{-i\lambda\sigma_3 y}dy \tag{11}$$

等和 δ 函数的性质．但是，也可以用下列方法．

对于非线性 Schrödinger 方程，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R_+} d\lambda\{F^s_{\cdot 1}(x\lambda) - G^s_{\cdot 1}(x\lambda)\}e^{i\lambda z} = 0 \quad z > x. \tag{12}$$

将(4)式右方第一项加上(12)式，即可换为求 λ 复上半平面的留数．注意，由 (11) 式可得下列谱表示：

$$F^s_{\cdot 1}(x\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x} + \sum_n K^s_{\cdot 1}(xn)\frac{e^{i(\lambda_n-\lambda)x}}{-i(\lambda_n-\lambda)} + \int d\lambda' K^s_{\cdot 1}(x\lambda')\frac{e^{i(\lambda'-\lambda)x}}{-i(\lambda'-\lambda+i\varepsilon)}. \tag{13}$$

$$F^s_{\cdot 2}(x\lambda) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x} + \sum_n K^s_{\cdot 2}(xn)\frac{e^{-i(\lambda_n^*-\lambda)x}}{i(\lambda_n^*-\lambda)} + \int d\lambda' K^s_{\cdot 2}(x\lambda')\frac{e^{-i(\lambda'-\lambda)x}}{i(\lambda'-\lambda-i\varepsilon)}. \tag{14}$$

这里我们注意，$F^s_{\cdot 1}(x\lambda)$，在 λ 为实数时，应由 λ 的复下半平面趋于实轴，$F^s_{\cdot 2}(x\lambda)$ 则由上半平面趋于实轴．由此可见，$F^s_{\cdot 1}(x\lambda)$ 在 λ 的上半平面 λ_n 和 $\lambda' + i\varepsilon$ 处有极点，相应地，$G^s_{\cdot 1}(x\lambda)$ 的极点在 λ 的下半平面．因此，(4)式右方第一项化为

$$\sum_n K^s_{\cdot 1}(xn)e^{i\lambda_n z} + \int_{-\infty}^{\infty} K^s_{\cdot 1}(x\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda, \tag{15}$$

它正是通常的表示式 $K^s_{\cdot 1}(xz)$．

从(12)式立得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R_+}\{F^h_{\cdot 1}(x\lambda) - G^h_{\cdot 1}(x\lambda)\}e^{i\lambda z} = 0 \quad \text{当 } z > x. \tag{16}$$

而铁磁链方程的 Jost 积分表示为

$$F^h(x\lambda) = e^{-i\lambda\sigma_3 x} + \lambda\int_x^\infty K^h(xy)e^{-i\lambda\sigma_3 y}dy. \tag{17}$$

由此，$F^h(x\lambda)$ 的谱表示为

$$F^h_{\cdot 1}(x\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x} + \lambda\sum_n K^h_{\cdot 1}(xn)\frac{e^{i(\lambda_n-\lambda)x}}{-i(\lambda_n-\lambda)} + \lambda\int d\lambda' K^h_{\cdot 1}(x\lambda')\frac{e^{i(\lambda'-\lambda)x}}{-i(\lambda'-\lambda+is)}. \tag{18}$$

$$F^h_{\cdot 2}(x\lambda) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x} + \lambda\sum_n K^h_{\cdot 2}(xn)\frac{e^{-i(\lambda_n^*-\lambda)x}}{i(\lambda_n^*-\lambda)}$$

$$+\lambda\int d\lambda' K_2^h(x\lambda')\frac{e^{-i(\lambda'-\lambda)x}}{i(\lambda'-\lambda-i\varepsilon)} \tag{19}$$

等. 这样, (7)式右方第一项加上(16)式后换为求 λ 复上半平面的留数, (18) 式在 λ_n 与 $\lambda'+i\varepsilon$ 处有极点,所以得

$$\sum_n \lambda_n K_1^h(xn)e^{i\lambda_n z}+\int d\lambda'\lambda' K_1^h(x\lambda')e^{i\lambda' z}. \tag{20}$$

注意 $G_1^h(x\lambda)$ 的极点在 λ 的下半平面. 将(10)和(20)式代入(7)式,由于 z 任意($z>x$),比较两端 $e^{i\lambda_n z}$ 和 $e^{i\lambda' z}$ 之项,得

$$\lambda_n K_1^h(xn)+c_n F_2^h(x\lambda_n)=0, \tag{21}$$

$$\lambda' K_1^h(x\lambda')+\frac{1}{2\pi}r(\lambda')F_2^h(x\lambda')=0. \tag{22}$$

将 (18), (19) 式代入 (21), (22) 式, 并分别除以 λ_n 和 λ' (当 $\lambda'\neq 0$ 时),即得到通常 Takhtajan 方程的等价方程. 当 $\lambda'=0$ 时, 由于对铁磁链方程有 $r(\lambda')=0$ (当 $\lambda'=0$), 所以(22)式成立. 但是这时不能用 λ' 来除此式. 这是预料到的修改.

现在讨论本文的第二方面. 由于 Jost 解具有下列性质:

$$F^+(x\lambda)=F^{-1}(x\lambda), \tag{23}$$

所以由(1)式得

$$g^+(x)=F^h(x\lambda)F^{s+}(x\lambda). \tag{24}$$

由于左方独立于 λ, 右方取不同的 λ 值将给出 $g(x)$ 的不同表示式, 取 $\lambda=0$ 和 $\lambda\to\infty$, 注意(11),(17)式得

$$g^+(x)=F^{s+}(xo)=I+\int_x^\infty K^{s+}(xy)dy, \tag{25}$$

$$g^+(x)=I-iK^h(xx)\sigma_3. \tag{26}$$

(25)式即用规范变换求解铁磁链方程的方法[6,7],(26)式即通常 Takhtajan 方法[1].

由于 $\det F^s(x\lambda)=1$, 所以从(25),(26)式得

$$\det[I-iK^h(xx)\sigma_3]=1, \tag{27}$$

即

$$\det[\sigma_3-iK^h(xx)]=-1. \tag{28}$$

它对任何 N, 包括有反射时均成立. 由此又有

$$[I-iK^h(xx)\sigma_3]^{-1}=I+i\sigma_3K^{h+}(xx), \tag{29}$$

即

$$[\sigma_3-iK^h(xx)]^{-1}=\sigma_3+iK^{h+}(xx). \tag{30}$$

这样,由于(28)式成立,(30)式就消去了逆矩阵的运算.

再由(25)式中 $F^s(xo)$ 满足的 Lax 方程,即可得到 $I-iK^h(xx)\sigma_3$ 或 $\sigma_3-iK^h(xx)$ 对 x 和对 t 的微商所满足的方程

$$\partial_x[I-iK^h(xx)\sigma_3]=-[I-iK^h(xx)\sigma_3]U(xo), \tag{31}$$

$$\partial_t[I-iK^h(xx)\sigma_3]=-[I-iK^h(xx)\sigma_3]V(xo). \tag{32}$$

式中 $U(xo)$, $V(xo)$ 为 $\lambda=0$ 时的非线性 Schrödinger 方程的 Lax 偶. 由 $U(xo)$ 和 $V(xo)$ 的形式,将(30)式代入(5)式后,即可证明由(5)式定出的 $S(x)$ 满足铁磁链方程.

这就完成了本文的第二方面.

感谢蔡建华教授有益的讨论.

参　考　文　献

[1] L. A. Takhtajan, *Phys. Lett.*, **64A**(1977), 235.
[2] H. C. Fogedby, *J. Phys. A*, **13**(1980), 1467.
[3] PU Fu-cho, Zhon Xin and Li Bo-zang *Commun. Theor Phys.* (Beijing), **2**(1983), 797.
[4] 蒲富恪，载《统计物理与凝聚态理论新进展》，华中工学院出版社，(1983).
[5] V. E. Zakharov and L. A. Takhtajan, *Theor. Math. Phys.* (Moskow), **33** (1977), 17.
[6] HUANG Nianning, *Chinese Phys. Lett.*, **3** (1986), 221.
[7] Chen Zongyun, Huang Nianning and Zhou Yichang, 载《1986年中日统计物理与凝聚态理论会议文集》，新加坡世界科学出版社，(1986).

ON THE EXACT PROOF OF THE METHOD OF INVERSE SCATTERING FOR SOLVING THE EQUATION OF A FERROMAGNETIC CHAIN AND ITS VERIFICATION

SHUAI ZHI-GANG　CHEN ZONG-YUN

(Jinan University, Guangzhou)

HUANG NIAN-NING

(Wuhan University, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

ABSTRACT

In current deductions of the inverse scattering method for solving the equation of a ferromagnetic chain, the factor λ^{-1} brings about difficulties. In this note, we show that this factor should be dropped and an equivalent result to the Takhtajan's equation can be obtained, except for some expected corrections at point $\lambda=0$. It is also verified that the solutions given by the ISM satisfy the equation of a ferromagnetic chain.