

磁化不均匀等离子体中的两种模式转换

余 玮 徐至展 陈泽尊

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

1986年4月8日收到

提 要

本文研究了磁化不均匀等离子体共振点以上的过密区的场分布。由于异常模电磁波与等离子体纵波间的相互转换,电磁波在过密区将再次被激发。

异常模电磁波在磁化不均匀等离子体中的场分布已为许多人^[1-4]所研究,其重点都在等离子体共振点以下的低密度冕区。我们知道,在到达共振点以前,入射电磁波的传播即被等效介电常数 ϵ_1 的第一个零点所截止;由电磁波的模式转换而造成的静电性纵向电场将深入到共振点,在那里激发“上混杂共振”(upper-hybrid resonance)。然而,迄今的研究很少涉及共振点以上的过密等离子体中的场分布,尤其是位于过密区的等效介电常数 ϵ_1 的第二个零点一直被忽视。本文通过解析和数值计算重新研究了这一问题,重点是共振点以上区域的场分布及相应的物理机制。结果表明:由于洛伦兹力的作用,磁化不均匀等离子体中存在两种类型的模式转换,即不仅有电磁横波到等离子体纵波的转换,还有其逆过程——由等离子体纵波到电磁横波的转换。由于后一过程,电磁波在过密区将再次被激发并向等离子体密度更高的区域传播,直至为 ϵ_1 的第二个零点所截止。

考虑垂直入射磁化不均匀等离子体的异常模电磁波,如令 x 为等离子体不均匀方向,稳定磁场 B_0 沿 x 方向作用,则电磁波电矢量位于 x - y 平面。由于电磁场量 $\alpha \exp(-i\omega t)$,由麦克斯韦方程组导出

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_y = -\frac{\omega_p^2}{c^3} v_x B_0, \quad (1)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_x = \frac{\omega_p^2}{c^3} v_y B_0, \quad (2)$$

其中 E_x , E_y , v_x , v_y 分别为电场强度及电子振荡速度在 x , y 方向的分量,

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$$

为等离子体频率, $\epsilon = 1 - n_0/n_{cr}$ 为等离子体介电常数, n_0 为等离子体密度, n_{cr} 为临界密度。方程(1),(2)可以写成更为熟悉的形式^[1-4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E_y = 0, \quad (3)$$

$$E_x = -iE_y/\epsilon_2, \quad (4)$$

其中

$$\epsilon_1 = [(1 - N)^2 - \beta^2]/(1 - N - \beta^2), \quad \epsilon_2 = (1 - N - \beta^2)/\beta N,$$

$N = n_0/n_{cr}$, $\beta = \omega_c/\omega$, ω_c 为电子迴旋频率, 通常 $\beta \ll 1$. 方程(3)表明, 异常模电磁波在介电常数为 ϵ 的磁化等离子体中的行为与电磁波在介电常数为 ϵ_1 的非磁化等离子体中的情况完全相同. 问题在于, 等效介电常数 ϵ_1 的分布很特殊: $N = 0$ 时 $\epsilon_1 = 1$, $N \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_1 \rightarrow -\infty$; 而在 $N = 1 \mp \beta$ 处 ϵ_1 有两处零点, 在 $N = 1 - \beta^2$ 有一处奇点, 这三个点把等离子体分成四个区域 (见图 1). 前人的工作大都集中在区域 I, II, 区域 III, IV 则基本上未被触及. 人们早就知道, 位于 $N = 1 - \beta$ 处的 ϵ_1 的第一个零点系入射电磁波的反射点, 位于 $N = 1 - \beta^2$ 处的奇点即等离子体共振点, 然而, 位于过密等离子体 ($N = 1 + \beta$ 处) 的 ϵ_1 的第二个零点却被忽视了. 为了避开过密问题, 某些文献[1]专门选用了形如 $N = \tanh(x/L)$ 的密度轮廓, 这样在接近临界密度时, 等离子体将趋于均匀. 然而, 这种特殊的密度轮廓不大可能在实际问题中出现.

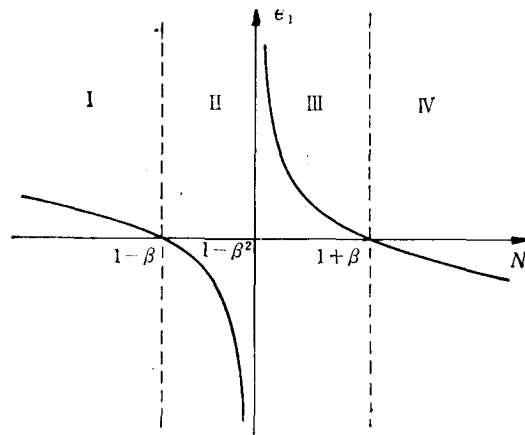


图 1 等效介电常数 ϵ_1

本文将讨论实际问题中最为普遍的线性密度轮廓, 令 $N = x/L$, L 为等离子体定标长度, $\rho = \frac{\omega}{c} L$, $\xi = \sqrt{|s|}$, $s = 1 - \beta^2 - x/L$, 方程(3)可以写为

$$\frac{1}{4\xi^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4\xi^3} \frac{\partial E_y}{\partial \xi} + \rho^2 \epsilon_1 E_y = 0, \quad (5)$$

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 2\beta^2 + \xi^2 + \beta^2(\beta^2 - 1)/\xi^2 & (s > 0); \\ 2\beta^2 - \xi^2 - \beta^2(\beta^2 - 1)/\xi^2 & (s < 0). \end{cases}$$

ϵ_1 的奇点位于 $s = \xi = 0$, 两个零点则分别位于 $s_a = \xi^2 = \beta(1 - \beta)$ 和 $s_b = -\xi_b^2 = -\beta(1 + \beta)$. 先考虑区域 II 和区域 III, 那里的等效介电常数 ϵ_1 可近似地表示为

$$\epsilon_1 = \begin{cases} \beta^2(\beta^2 - 1)/\xi^2 & (s_a > s \geq 0); \\ -\beta^2(\beta^2 - 1)/\xi^2 & (0 \geq s > s_b). \end{cases}$$

以此代入方程(5), 令 $W = E_y/\xi$, $g = \rho\beta\sqrt{1 - \beta^2}$, 则方程(15)的解可以由贝塞耳函数

和改性贝塞耳函数描述,在区域 II,

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} - (4g^2 \xi^2 + 1)W &= 0, \\ E_y = \xi W &= \xi [a_1 I_1(2g\xi) + a_2 K_1(2g\xi)]. \end{aligned} \quad (6)$$

在区域 III,

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + (4g^2 \xi^2 - 1)W &= 0, \\ E_y = \xi W &= \xi [a'_1 J_1(2g\xi) + a'_2 Y_1(2g\xi)]. \end{aligned} \quad (7)$$

利用贝塞耳函数和改性贝塞耳函数在 $\xi \rightarrow 0$ 时的渐近表达式,得到

$$E_y \sim \begin{cases} a_1 g \xi^2 + a_2/2g \rightarrow a_2/2g & (s \rightarrow 0^+); \\ a'_1 g \xi^2 - a'_2/\pi g \rightarrow -a'_2/\pi g & (s \rightarrow 0^-). \end{cases} \quad (8)$$

可见,在 ε_1 的奇点, E_y 为有限值,且 $a_2 = -2a'_2/\pi$. 在区域 I 和区域 IV,

$$\varepsilon_1 \sim \begin{cases} 2\beta^2 + \xi^2 & (s > s_a); \\ -\xi^2 & (s < s_b). \end{cases}$$

方程(5)的解可以由艾里函数描述,在区域 I,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} E_y + \rho^2(s + 2\beta^2)E_y &= 0, \\ E_y = c_1 A_i[-\rho^{\frac{2}{3}}(2\beta^2 + \xi^2)] + c_2 B_i[-\rho^{\frac{2}{3}}(2\beta^2 + \xi^2)]. \end{aligned} \quad (9)$$

在区域 IV,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} E_y + \rho^2 s E_y &= 0, \\ E_y = c'_1 A_i(\rho^{\frac{2}{3}} \xi^2) + c'_2 B_i(\rho^{\frac{2}{3}} \xi^2). \end{aligned} \quad (10)$$

利用艾里函数在 ξ 足够大时的渐近表达式,得到

$$E_y = \begin{cases} \pi^{-\frac{1}{2}} [\rho^{\frac{2}{3}}(\xi^2 + 2\beta^2)]^{-\frac{1}{2}} A \sin \left[\frac{2}{3} \rho(\xi^2 + 2\beta^2)^{\frac{3}{2}} + \phi_0 \right] & (s \gg s_a); \\ \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{6}} \xi^{-\frac{1}{2}} (c'_1 e^{-\frac{2}{3} \rho \xi^3} + c'_2 e^{\frac{2}{3} \rho \xi^3}) & (s \ll s_b). \end{cases} \quad (11)$$

当 $s \rightarrow -\infty$ 时 E_y 应保持有限,故(11)式中的 $c'_2 = 0$; 令真空中的 E_y 场振幅为 1, 则 $A = \pi^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{6}} (1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$. 根据有关特殊函数的性质, E_y 在 $\varepsilon_1 > 0$ 的区域 I, III 是振幅逐渐增大的振荡函数,在 $\varepsilon_1 < 0$ 的区域 II, IV 则呈指数型衰减. 应当指出,由于推导中所作的近似,我们的解析结果在 ε_1 的两个零点 s_a 和 s_b 附近是不够准确的. 为了弥补这一点,我们在解析的基础上计算了方程(5)的数值解. 由图 2 可以看到 $\rho = 100, \beta = 0.1$ 时的 E_y 场分布. 我们知道,入射电磁波被 s_a 截止后形成驻波,图 2 的左侧即反映了这种情况;然而在其右侧,本已大大衰减的 E_y 场又重新增长,并以 s_b 为中心形成新的驻波结构.

将 E_y 代入方程(5)可求出磁化不均匀等离子体中的静电性纵向场 E_x . 在共振点 ($s = 0$) 附近, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $|E_x|$ 将趋于无穷大,这就是所谓上混杂共振. 然而,电子-离子碰撞以及其他阻尼效应尽管对 E_y 的影响不大^[1], 却足以限制共振点附近的纵向场 E_x . 引入阻尼系数 ν 后, ε_2 可以写成

$$\varepsilon_2 = \left[1 - N - \beta^2 + i \frac{\gamma}{\omega} (2 - N) \right] / \beta N. \quad (12)$$

以此代入方程(5), 所得到的纵向场分布如图 2 所示.

由方程(1),(2)不难看出, 由于洛伦兹力的参与, 磁化不均匀等离子体中出现了两种类型的模式转换. 电磁

场作用下的 y 方向的电子振荡与磁场 $B_0 \hat{z}$ 一起造成了洛伦兹力分量 $-\frac{e}{c} v_y B_0 \hat{x}$, 它驱动电子沿等离子体不均匀的 x 方向振荡并导致静电性纵向电场 E_x . 这就是人们熟知的由电磁横波到等离子体纵波的模式转换, 它突出地表现为共振点附近的上混杂共振. 与此同时, 电子的纵向振荡与磁场 $B_0 \hat{z}$ 还造成了另一洛伦兹力分量 $\frac{e}{c} v_x B_0 \hat{y}$, 在关于 E_y 的波动方程(1)式中, 这个横向力构成了电磁横波的波源. 这样就出现了上述过程的逆过程: 由等离子体纵波到电磁横波的转换. 磁化等离子体中的场分布正是这两种模式转换共同作用的结果. 由于后一过程, 上混杂共振在共振点附近造成的强大的纵向电子振荡将导致电磁波的再次激发. 再次激发的电磁波在等效介电常数 $\varepsilon_1 > 0$ 的区域 III 传播, 直至为 s_b 所截止并形成图 2 右侧所示的驻波结构.

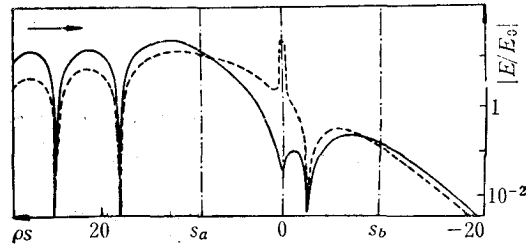


图 2 磁化等离子体中的场分布

— 为 $|E_y/E_0|$; ... 为 $|E_x/E_0|$

参 考 文 献

- [1] R. B. White and F. F. Chen, *Plasma Phys.*, 16(1974), 565.
- [2] W. L. Kruer and K. Estabrook, *Phys. Fluids*, 20(1977), 1688.
- [3] F. David and R. Pellat, *Phys. Fluids*, 23(1980), 1682.
- [4] H. C. Barr *et al.*, *Phys. Fluids*, 28(1985), 16.

THE TWO MODE CONVERSION IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIZED PLASMA

YU WEI XU ZHI-ZHAN CHEN ZE-ZUN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The field structures in the overdense region above the resonant point of an inhomogeneous magnetized plasma are studied. Our work indicates that owing to the mutual conversion between the extraordinary electromagnetic wave and the longitudinal plasma wave, the electromagnetic wave will grow again in the overdense plasma.