第 36 卷 第 7 期 物 理 学 报 Vol. 36, No. 7
1987 年 7 月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1987

研究简报

一种产生 Einstein 约化场方程解的方法*

侯伯宇 李 卫
(西北大学现代物理研究所)

1986 年 5 月 16 日收到

提 要

本文给出了在 Ernst 场方程的解空间上的一种新变换，并且研究了这种变换与 Ernst 场方程解之间的关系. 证明了在这种变换下，Ernst 场方程是不变的，即由我们的这种变换可产生 Ernst 场方程的新解. 最后还讨论了这种变换与 Virasoro 代数的关系.

Geroch, Kinnersley 等人[1-3]已经证明了在变换

$$\gamma(s)H = -\frac{1}{s}[F(s)TF^{-1}(s) - T]i\varepsilon \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Ernst 场方程具有不变性. 这里 $T \in SL(2, R)$，$F(s)$ 满足 Hauser-Ernst 线性方程组[4]，s 为参数. 现在，我们给出一种新的变换关系

$$\delta(s)H = \dot{F}(s)F^{-1}(s)i\varepsilon, \tag{2}$$

其中 $\dot{F}(s) = \frac{d}{ds}F(s)$. 同样可以证明，该变换也可以产生 Ernst 场方程的新解. 为了讨论的方便，本文只讨论在柱对称的 Einstein 空间里的情况，不难将此情况推广到静轴对称的 Einstein 空间里.

一、Hauser-Ernst 线性方程组

首先给出 Hauser-Ernst 线性方程组，同时说明我们采用的符号.

在柱对称的 Einstein 空间里，其时空度规可写为

$$ds^2 = -f(t, z)(-dt^2 + dz^2) - g_{ab}(t, z)dx^a dx^b. \tag{3}$$

这里 $a, b = 1, 2$，而 $(x^1, x^2) = (x, y)$. 在真空里，Einstein 场方程可约化为

$$\partial_\xi(\alpha g^{-1}\partial_\eta g) + \partial_\eta(\alpha g^{-1}\partial_\xi g) = 0, \tag{4}$$

其中 $g = (g_{ab})$ 为 2×2 对称矩阵，$\alpha^2 = \det g$，而 $\xi = \frac{1}{2}(t + z)$，$\eta = \frac{1}{2}(t - z)$. 至于 $f(t, z)$ 所满足的方程与本文问题无关，且 $f(t, z)$ 可由 g 所确定，因此不在此写出该方程.

根据关系式

$$A\,\varepsilon\,A^T = \det A\,\varepsilon, \tag{5}$$

* 中国科学院科学基金资助的课题.

其中 A 为任意 2×2 矩阵，A^T 表示 A 的转置矩阵．于是，方程 (4) 可改写为

$$\partial_\xi(\alpha^{-1}g\varepsilon\partial_\eta g) + \partial_\eta(\alpha^{-1}g\varepsilon\partial_\xi g) = 0. \tag{6}$$

从方程 (6) 可以定义 twist 势 ψ

$$\partial_\xi\psi = \alpha^{-1}g\varepsilon\partial_\xi g,\quad \partial_\eta\psi = -\alpha^{-1}g\varepsilon\partial_\eta g. \tag{7}$$

然后定义复势 H

$$H = g + i\,\psi, \tag{8}$$

它满足的方程为

$$\partial_\xi H = i\alpha^{-1}g\varepsilon\partial_\xi H,\quad \partial_\eta H = -i\alpha^{-1}g\,\epsilon\,\partial_\eta H. \tag{9}$$

令

$$\psi - \psi^T = -i(H - H^T) = 2\beta\varepsilon. \tag{10}$$

从方程 (7) 可以得到一对共轭方程

$$\partial_\xi\beta = \partial_\xi\alpha,\quad \partial_\eta\beta = -\partial_\eta\alpha. \tag{11}$$

所以 β 和 α 是二维波动方程的共轭解，$\partial_\xi\partial_\eta\beta = \partial_\xi\partial_\eta\alpha = 0$．

由于 $\frac{1}{2}(H + H^+) = g + i\,\beta\varepsilon$（上角＋表示 Hermitian 共轭），于是方程 (9) 又可写成 Ernst 场方程

$$\begin{aligned} 2(\beta+\alpha)\partial_\xi H &= (H + H^+)i\varepsilon\partial_\xi H, \\ 2(\beta-\alpha)\partial_\eta H &= (H + H^+)i\varepsilon\partial_\eta H. \end{aligned} \tag{12}$$

从方程 (12)，不难得到 Hauser-Ernst 线性方程组

$$\begin{aligned} \partial_\xi F(s) &= \frac{s}{1 - 2s(\beta+\alpha)}\,\partial_\xi Hi\varepsilon F(s), \\ \partial_\eta F(s) &= \frac{s}{1 - 2s(\beta-\alpha)}\,\partial_\eta Hi\varepsilon F(s), \end{aligned} \tag{13}$$

其中 s 为参数． Hauser-Ernst 线性方程组的可积性条件是 Ernst 场方程．

为了讨论的方便，我们采用微分形式重写方程 (12) 和 (13)． 定义对偶变换

$$^*d\xi = d\xi,\quad ^*d\eta = -d\eta.$$

以及

$$\begin{aligned} A(s) &= 1 - s(H + H^+)i\varepsilon, \\ \Gamma(s) &= s[1 - 2s(\beta + \alpha^*)]^{-1}dE, \end{aligned} \tag{14}$$

则方程 (12) 和 (13) 可分别写为

$$2(\beta + \alpha^*)dE = (E + E^+)i\varepsilon dE \tag{15a}$$

或者

$$sdE = A(s)\Gamma(s), \tag{15b}$$

以及

$$dF(s) = \Gamma(s)i\varepsilon\Gamma(s). \tag{16}$$

在文献 [4] 中，给出了下列关系式:

$$F(s)|_{s=0} = 1,\quad \dot F(s)|_{s=0} = Hi\varepsilon, \tag{17a, b}$$

$$\det F(s) = \lambda(s) = [(1 - 2\beta s)^2 - (2\alpha s)^2]^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

$$F^\times(s)i\varepsilon A(s)F(s) = i\varepsilon, \tag{19}$$

其中 $F^{\times}(s)=F^{+}(\bar{s})$ ($\bar{s}$ 表示 s 的复数共轭). 关系式 (14)—(19) 对下面的证明非常有用.

二、产生 Ernst 场方程解的变换

前面已给出变换

$$\delta(s)H=\dot{F}(s)F^{-1}(s)i\varepsilon,$$

其中 H 满足 Ernst 场方程, $F(s)$ 满足 Hauser-Ernst 线性方程组. 现在, 我们需要证明 $H+\delta H$ 也满足 Ernst 场方程 (12), 即

$$2(\beta+\alpha^*)d\delta H+2(\delta\beta+\delta\alpha^*)dH=(H+H^+)d\delta H+(\delta H+\delta H^+)dH. \tag{20}$$

在证明上式之前, 先要给出 β 和 α 在变换 (2) 式下的形式. 在 Geroch 群的无穷小变换 (1) 式下, $\delta\beta=\delta\alpha=0$. 然而在变换 (2) 式下, $\delta\beta$ 和 $\delta\alpha$ 却不为零, 它们的变换形式与 Maison[9] 变换下的形式一致. 证明如下:

从 (10) 式出发

$$\begin{aligned}2i\varepsilon\delta\beta&=\delta H-\delta H^T=\dot{F}(s)F^{-1}(s)i\varepsilon+i\varepsilon[\dot{F}(s)F^{-1}(s)]^T\\&=\mathrm{Tr}(\dot{F}(s)F^{-1}(s))i\varepsilon=-\lambda(s)\mathrm{Tr}(\dot{F}(s)\varepsilon F^T(s)\varepsilon)i\varepsilon\\&=\lambda^{-1}\frac{\partial\lambda}{\partial s}i\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\delta\beta=\frac{\beta(1-2s\beta)+2s\alpha^2}{(1-2s\beta)^2-(2s\alpha)^2}. \tag{21}$$

上面我们利用了关系式 $\varepsilon A+A^T\varepsilon=\mathrm{Tr}A\varepsilon$ (这里 A 为任意 2×2 矩阵), $\mathrm{Tr}\,A^T=\mathrm{Tr}\,A$ 以及 (5) 式.

然后将 (21) 式代入 (11) 式, 不难得到

$$\delta\alpha=\frac{\alpha}{(1-2s\beta)^2-(2s\alpha)^2}. \tag{22}$$

因此我们得到了 β 和 α 在变换 (2) 式下的变换形式.

现在证明 (20) 式, 由于

$$\begin{aligned}d\delta H&=d(\dot{F}(s)F^{-1}(s))i\varepsilon\\&=\left\{\frac{d}{ds}[\Gamma(s)i\varepsilon\Gamma(s)]F^{-1}(s)-\frac{d}{ds}F(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)i\varepsilon\right\}i\varepsilon\\&=[\Gamma(s)i\varepsilon,\dot{F}(s)F^{-1}(s)]i\varepsilon+\dot{\Gamma}(s)\\&=s[1-2s(\beta+\alpha^*)]^{-1}[dHi\varepsilon,\dot{F}(s)F^{-1}(s)]i\varepsilon+\dot{\Gamma}(s).\end{aligned} \tag{23}$$

这里利用了关系式 (14) 和 (16) 式. 将 $2(\beta+\alpha^*)$ 作用在 (23) 式等号两边, 利用 (15a) 式, 以及 $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$, 于是

$$\begin{aligned}2(\beta+\alpha^*)d\delta H&=s[1-2s(\beta+\alpha^*)]^{-1}[(H+H^+)i\varepsilon dHi\varepsilon,\dot{F}(s)F^{-1}(s)]i\varepsilon\\&\quad+2(\beta+\alpha^*)\dot{\Gamma}(s)=(H+H^+)i\varepsilon d\delta H+[(H+H^+)i\varepsilon,\dot{F}(s)F^{-1}(s)]\Gamma(s).\end{aligned} \tag{24}$$

在最后一步里, 用到了关系式 $(H+H^+)i\varepsilon\Gamma(s)=2(\beta+\alpha^*)\dot{\Gamma}(s)$, 以及 (23) 式.

另外还有

$$(\delta H+\delta H^{+})i\varepsilon dH=\{\dot F(s)F^{-1}(s)i\varepsilon+i\varepsilon F^{\times-1}(s)\dot F^{\times}(s)\}i\varepsilon dH$$
$$=\{\dot F(s)F^{-1}(s)+i\varepsilon F^{\times-1}(s)\dot F^{\times}(s)i\varepsilon\}\frac{1}{s}A(s)\Gamma(s)$$
$$=\frac{1}{s}\left\{\dot F(s)F^{-1}(s)A(s)-i\varepsilon\frac{d}{ds}(i\varepsilon A(s)F(s))F^{-1}(s)\right\}\Gamma(s)$$
$$=\frac{1}{s}[\dot F(s)F^{-1}(s),A(s)]\Gamma(s)-\frac{1}{s}\dot A(s)\Gamma(s)$$
$$=[(H+H^{+})i\varepsilon,\dot F(s)F^{-1}(s)]i\varepsilon+\frac{1}{s}(H+H^{+})i\varepsilon\Gamma(s). \tag{25}$$

上边用到 (15b) 和 (19) 式，以及 $A(s)$ 的定义式。

上式可进一步化简为

$$(\delta H+\delta H^{+})i\varepsilon dH-\frac{1}{s}(H+H^{+})i\varepsilon\Gamma(s)=[(H+H^{+})i\varepsilon,\dot F(s)F^{-1}(s)]i\varepsilon. \tag{26}$$

从 (21) 和 (22) 式可知

$$2(\delta\beta+\delta\alpha^{*})dH$$
$$=\frac{2(\beta+\alpha)}{1-2s(\beta+\alpha)}\partial_\xi Hd\xi+\frac{2(\beta-\alpha)}{1-2s(\beta-\alpha)}\partial_\eta Hd_\eta$$
$$=\frac{1}{1-2s(\beta+\alpha)}(H+H^{+})i\varepsilon\partial_\xi Hd\xi+\frac{1}{1-2s(\beta-\alpha)}(H+H^{+})i\varepsilon\partial_\eta Hd\eta$$
$$=\frac{1}{s}(H+H^{+})i\varepsilon\Gamma(s). \tag{27}$$

将 (26) 和 (27) 式代入 (25) 式，则可得到关系式 (20)。这样就证明了在变换 (2) 式下，Ernst 场方程的形式是不变的。

三、讨　论

上面已经证明了在变换 (2) 式下 Ernst 场方程的不变性，现考虑这种变换的代数结构和性质。

1. Kinnersley 和 Chitre 根据复势 H 引进双势 $\overset{(m,n)}{N}$[2]，Geroch 群作用在其上的变换形式

$$\overset{(k)}{\gamma}_a\overset{(m,n)}{N}=-T_a\overset{(m+k,n)}{N}+\overset{(m,n+k)}{N}T_a+\sum_{t=1}^{k}\overset{(m,t)}{N}T_a\overset{(k-t,n)}{N}\quad(m\geqslant1,\ n>0,\ k\geqslant0), \tag{28}$$

其中 $\gamma(s)=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\overset{(k)}{\gamma}s^k$，$T_a$ 是李代数 $SL(2,R)$ 的生成元。算符 $\{\overset{k}{\gamma}\}$ 构成的代数是 Kac-Moody 代数[2,6,7]。而我们给出的变换作用在 $\overset{(m,n)}{N}$ 上的形式为[8]

$$\delta^{(k)}\overset{(m,n)}{N}=-\frac{1}{2}\left\{(2m+k)\overset{(m+k,n)}{N}+(2n+k)\overset{(m,n+k)}{N}+\sum_{t=1}^{k}(2t-k)\overset{(m,t)}{N}\overset{(k-t,n)}{N}\right\}. \tag{29}$$

不难证明如下对易关系：

$$[\delta^{(k)},\delta^{(l)}]\overset{(m,n)}{N}=(k-l)\delta^{(k+l)}\overset{(m,n)}{N}, \tag{30}$$

$$[\delta^{(k)}, \gamma^{(l)}] \overset{(m,n)}{N} = -l\gamma^{(k+l)} \overset{(m,n)}{N}. \tag{31}$$

显然,我们得到了 Ernst 方程的解空间的 Virasoro 代数[9].

2. 现在来分析变换 (1) 与 (2) 式之间的联系,发现它们之间有相似之处. 如果做替换 $T \to s\frac{d}{ds}$, 那么就可以从 Geroch 群的变换得到我们的关系. 根据无穷维代数的性质[10], Kac-Moody 代数是一种由复平面上的圆环 S^1 上的李群 G 的 loop 群的 loop 代数; 而 Virasoro 代数则可看做由 $S^1 \to S^1$ 上映射构成的群的 loop 代数. 因此,变换 (1) 式和 (2) 式反映的都是参数空间上的对称性质.

3. 变换 (2) 式构成的 Virasoro 代数与量子场论中的 Virasoro 代数有本质上的不同. 前者代表的是参数空间的保形不变性,它的表示不是么正的;而后者反映的是坐标空间的保形不变性,它的表示是么正表示并且具有最高权表示, 它的生成元由能量-动量张量构成.

4. 由 (21) 和 (22) 式,可以知道 β 和 α 变换形式与 Maison 群的变换形式是一致的. 但是,注意到 Maison 群是参数空间里 $S^1 \to U(1)$ 映射的群,它是 Abel 的; 我们找到的群是非 Abel 的. 当然,我们的一级变换恰好与 Maison 变换的无穷小变换一致,因此我们的变换比 Maison 变换更广泛一些,并包括了 Maison 变换.

参 考 文 献

[1] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **12**(1971), 918; *ibid.*, **13**(1972), 394.
[2] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 1538; *ibid.*, **19**(1978), 1921.
[3] C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 2417.
[4] I. Hauser and F. J. Ernst, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1126; 1418.
[5] D. Maison, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 871.
[6] 侯伯宇、李卫,高能物理与核物理,待发表.
[7] V. G. Kac, *Mat. USSR-Izv.*, **2**(1968), 1271.
[8] R. V. Moody, *J. Algebra*, **10**(1968), 211.
[9] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.*, **D1**(1970), 2933.
[10] P. Goddard, preprint DAMTP 85/7, (1985).

A NEW METHOD TO GENERATE THE SOLUTIONS OF THE REDUCED EINSTEIN EQUATIONS

Hou Bo-yu Li Wei

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

Abstract

In this paper, we present a new transformation in the solution space of the Ernst equation and investigat the relationship between the solutions of the Ernst equation and our transformation. We show that the Ernst equation is invariant under such a transformation, i.e., our transformation can be used to generate the new solutions of the Ernst equation from the old ones. Finally, we discuss the relationship between the Virasoro algebra and this transformation.