第36卷 第7期 物理学报 Vol. 36, No. 7
1987年7月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1987

强磁场中二维电子的量子运动*

熊小明 周世勋
（复旦大学物理系）

1986年3月10日收到

提 要

在对称规范势下，给出了二维电子在强磁场中运动的波函数的一般解析形式. 通过对两个无相互作用电子体系的讨论，推出了两种不同表象中波函数的变换关系. 这一变换关系对考虑电子间的相互作用很有帮助.

一、引 言

近几年来，由于实验上发现量子 Hall 效应[1]和分数量子 Hall 效应[2]，吸引了很多理论工作者对二维电子气进行理论研究[3-5]. Landau 早在30年代就已经对 Hall 效应作了量子力学的讨论. 在 Landau 规范下，指出强磁场中二维电子的能量是象谐振子那样分立的，并且能级具有高度的简并. 近几年的理论工作大多采用对称规范，并且仅限于 Landau 最低能级的讨论. 本文将在对称规范下，推导电子波函数的一般解析形式. 根据所得表达式，可以很容易地把讨论的范围延拓到较高能级. 在一般的情况下，电子之间的相互作用只依赖于相对距离的大小而与方向无关，例如库仑势. 本文对两个无相互作用电子的讨论，将有利于今后考虑具有 $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ 型的相互作用.

二、电子的波函数

强磁场中，单电子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2.$$

取对称规范

$$Ax = -\frac{1}{2}By, \quad Ay = \frac{1}{2}Bx,$$

则

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \left(p_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left[\left(-ia_0\partial_x - \frac{y}{2a_0}\right)^2 + \left(-ia_0\partial_y + \frac{x}{2a_0}\right)^2\right], \end{aligned}$$

* 中国科学院科学基金资助的课题.

其中 ∂_x 表示对 x 的偏微分，$a_0=(\hbar c/eB)^{1/2}$ 为磁长度，以下我们取 $a_0=1$.

$$\omega_0=\frac{\hbar}{ma_0^2}=\frac{eB}{mc}. \tag{1}$$

引入产生湮灭算子

$$a=\alpha+\beta,\ a^+=\alpha^++\beta^+, \tag{2}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-iy),\ \alpha^+=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+iy),\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x-i\partial_y),$$

$$\beta^+=\frac{-1}{\sqrt{2}}(\partial_x+i\partial_y). \tag{3}$$

并且 α,β 有下列对易关系:

$$[\alpha,\beta^+]=[\beta,\alpha^+]=\frac{1}{2},$$

$$[\alpha,\alpha^+]=[\beta,\beta^+]=[\alpha,\beta]=[\alpha^+,\beta^+]=0. \tag{4}$$

我们有意识地引进 α 和 β 算子，是为了把微分算符分离出来，以后的讨论将尽量迴避 β 算符.

利用产生湮灭算符，我们得到一个简单的哈密顿量

$$H=\hbar\omega_0\left(a^+a+\frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

取

$$\phi_0=e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}, \tag{6}$$

有

$$\beta\phi_0=-\alpha\phi_0,\ \beta^+\phi_0=\alpha^+\phi_0. \tag{7}$$

并且由此我们可以得到哈密顿量的本征值和本征矢，

$$E=\hbar\omega_0\left(K+\frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

$$\phi_K=a^{+(K)}\phi_0=2^K\alpha^{+(K)}\phi_0, \tag{9}$$

其中 $K=0,1,2,\cdots$，代表 Landau 能级.

如果我们另外再引进一对算子，

$$b=\alpha^+-\beta^+,\ b^+=\alpha-\beta. \tag{10}$$

不难证明，a^+ 与 b^+ 对易，由下式定义的波函数仍然是哈密顿量 (5) 式的本征矢，

$$\Psi_{KL}=a^{+(K)}b^{+(L)}\phi_0, \tag{11}$$

$$H\Psi_{KL}=\hbar\omega_0\left(K+\frac{1}{2}\right)\Psi_{KL}. \tag{12}$$

本征值与 L 无关，说明 Landau 能级是简并的.

利用对易关系 (4) 式和关系式 (7) 以及 (11) 式对波函数的定义，得到波函数的解析表达形式为

$$\Psi_{KL}(\boldsymbol{r})=A_{KL}P_{KL}(r)e^{-r^2/4}e^{i(K-L)\theta}, \tag{13}$$

其中 A_{KL} 为归一化常数.

$$A_{KL}=\sqrt{\frac{K!\,L!}{2\pi}},\quad P_{KL}(r)=\sum_{s}\frac{(-1)^{s}}{(K-S)!(L-S)!S!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{K+L-2S},\tag{14}$$

求和从 $S=0$ 到 $S=\min(K,L)$. 对于最低 Landau 能级，$K=0$，很快得到我们熟悉的波函数[6]

$$\Psi_{0L}=(2^{L+1}\pi L!)^{-1/2}e^{-r^{2}/4}r^{L}e^{-iL\theta}.\tag{15}$$

(13) 式的波函数是正交归一化的，即

$$\langle\Psi_{KL}|\Psi_{K'L'}\rangle=\delta_{KK'}\delta_{LL'}.\tag{16}$$

三、正电子波函数与电子波函数的关系

如果我们考虑一个带正电电荷的粒子，其哈密顿量为

$$H'=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^{2}.$$

它与电子哈密顿量的差别，仅仅在于电荷的代数符号. 但是，我们很快得到

$$H'=\hbar\omega_{0}\left(b^{+}b+\frac{1}{2}\right).\tag{17}$$

波函数 (11) 式仍然是 H' 的本征矢，不过这时对应的能级为 L，

$$H'\Psi_{KL}=\hbar\omega_{0}\left(L+\frac{1}{2}\right)\Psi_{KL}.\tag{18}$$

注意到 $\Psi^{*}_{KL}=\Psi_{LK}$，有

$$H'\Psi^{*}_{KL}=\hbar\omega_{0}\left(K+\frac{1}{2}\right)\Psi^{*}_{KL}.\tag{19}$$

上式说明，如果 Ψ_{KL} 表示电子对应于能级 K 的波函数，那么 Ψ^{*}_{KL} 则表示一个正电子对应于同一能级的波函数.

四、角 动 量

由量子力学的一般定义，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$，可得二维电子的角动量为

$$L_{z}=xp_{y}-yp_{x}=2\hbar(\alpha\beta^{+}+\alpha^{+}\beta).\tag{20}$$

利用对易关系和 (11) 式，可得

$$L_{z}\Psi_{KL}=(K-L)\hbar\Psi_{KL}.\tag{21}$$

所以，电子的角动量为 $(K-L)\hbar$，当 $K=0$ 时，$L_{z}=-L\hbar$，与 Girvin 的论述一致[7]，此时角动量不允许取正值. 但是，如果 $K\neq 0$，从能量的角度看，有时角动量取正值更有利. 在极坐标中，$L_{z}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\theta}$，直接作用于 (13) 式，可以很方便地得到 (21) 式.

五、无相互作用的两个电子体系

两个无相互作用电子体系的哈密顿量为

$$H_0=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_1+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_1\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_2+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_2\right)^2. \tag{22}$$

其本征值和本征矢分别为

$$E=(K_1+K_2+1)\hbar\omega_0, \tag{23}$$

$$\Psi_{\substack{K_1L_1\\K_2L_2}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\Psi_{K_1L_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi_{K_2L_2}(\boldsymbol{r}_2). \tag{24}$$

作下列坐标变换[6]:

$$x_c=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),\quad y_c=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1+y_2),$$

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2),\quad y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1-y_2). \tag{25}$$

在新表象中，

$$H_0=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_c+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_c\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_0+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_0\right)^2. \tag{26}$$

对应的能量及波函数为

$$E=(K_c+K_0+1)\hbar\omega_0, \tag{27}$$

$$\Psi_{\substack{K_cL_c\\K_0L_0}}(\boldsymbol{r}_c,\boldsymbol{r}_0)=\Psi_{K_cL_c}(\boldsymbol{r}_c)\Psi_{K_0L_0}(\boldsymbol{r}_0). \tag{28}$$

对于一个给定的能级 E，可以把 (24) 式用新表象的基矢 (28) 式展开，

$$\Psi_{K_1L_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi_{K_2L_2}(\boldsymbol{r}_2)=\sum_{K_0=0}^{K_1+K_2}\sum_{L_0=0}^{L_1+L_2}\beta_{K_0L_0}(K_1L_1K_2L_2)$$

$$\cdot\Psi_{K_1+K_2-K_0,L_1+L_2-L_0}(\boldsymbol{r}_c)\Psi_{K_0L_0}(\boldsymbol{r}_0), \tag{29}$$

其中 $\beta_{K_0L_0}(K_1L_1K_2L_2)$ 是展开系数．为了求出系数 β，我们在新表象中考查某个电子的角动量和哈密顿量，例如 L_{1_z} 和 H_1

$$L_{1_z}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{2}(L_{z_c}+L_{z_0}+\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{p}_0+\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{p}_c). \tag{30}$$

$$H_1=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_1+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_1\right)^2=\frac{1}{2}(H_c+H_0)+\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_c+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_c\right)\left(\boldsymbol{p}_0+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_0\right).$$

把等式 (30) 的左右两边分别作用到 (29) 式的两边，利用对易关系 (4) 式，得到

$$\beta_{K_0L_0}(K_1L_1K_2L_2)=b_{K_0}(K_1K_2)b_{L_0}(L_1L_2)$$

并且，b 满足下列递推关系:

$$b_0(m,n)=c,$$

$$b_1(m,n)=(m-n)/\sqrt{m+n}\cdot b_0(m,n), \tag{31}$$

$$b_k(m,n)=\frac{(m-n)b_{K-1}(m,n)-\sqrt{(m+n-k+2)(k-1)}\,b_{k-2}(m,n)}{\sqrt{(m+n-k+1)k}}.$$

其中 b 的下标可取 $k=0,1,\cdots,m+n$．常数 c 由归一化条件决定

$$\sum_{k=0}^{m+n}|b_k(m,n)|^2=1.$$

六、关系式 (31) 的应用提示

在计算有限个相互作用电子体系的基态能时，例如，Girvin 对库仑势

$$V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)=\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

所作的计算[7]，首先要计算积分

$$M=\langle\Psi_{K_1L_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi_{K_2L_2}(\boldsymbol{r}_2)|V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)|\Psi_{K_3L_3}(\boldsymbol{r}_1)\Psi_{K_4L_4}(\boldsymbol{r}_2)\rangle.$$

利用 (31) 式，

$$\begin{aligned}M=\sum_{\substack{K_0L_0\\K_0'L_0'}}&\beta^+_{K_0L_0}(K_1L_1K_2L_2)\beta_{K_0'L_0'}(K_3L_3K_4L_4)\\&\cdot\langle\Psi_{K_1+K_2-K_0,L_1+L_2-L_0}(\boldsymbol{r}_c)|\Psi_{K_3+K_4-K_0',L_3+L_4-L_0'}(\boldsymbol{r}_c)\rangle\\&\cdot\langle\Psi_{K_0L_0}(\boldsymbol{r}_0)|V(\sqrt{2}\,r_0)|\Psi_{K_0'L_0'}(\boldsymbol{r}_0)\rangle.\end{aligned}\tag{32}$$

可见二重积分简化为单重积分．并且对 $\boldsymbol{r}_c$ 的积分结果是 δ 函数．势能的积分有很大一类可以解析求出．

由 (32) 式，我们已经重复了 Girvin[7] 的结果，并且对较高能级作了讨论．我们还将讨论幂函数势 $V(r)\sim r^n$ 的情况，其中包含 Girvin 提出的谐振子相互作用的模型[7]．

感谢陈灏博士、朱耘和张珉同志与作者的有益的讨论．

参 考 文 献

[1] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 494.
[2] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1559; H. L. Stormer, A. Chang, D. C. Tsui, J. C. M. Hwang, A. C. Gossard, W. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1953.
[3] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B23**(1981), 5632; B. I. Halperin, *Phys. Rev.*, **B25**(1982), 2185.
[4] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1395; D. Levesque, J. J. Weis, A. H. MacDonald, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 1056.
[5] D. Yoshioka, B. I. Halperin, P. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1219.
[6] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 3383.
[7] S. M. Girvin, Terrence Jach, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 4506.

QUANTIZED MOTION OF TWO-DIMENSIONAL ELECTRONS IN A STRONG MAGNETIC FIELD

XIONG XIAO-MING ZHOU SHI-XUN

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

In the symmetric gauge with vector potential, the one-body wave functions of two-dimensional electron in a strong magnetic field have been obtained analytically. Based on the discussing of two non-interacting electrons, we get a relation of the wave functions in two representations. This relation is useful in considering the interactions between the electrons.