

# LINE-TYING 效应对热电子交换模的影响

黄朝松 任兆杏 邱励俭

(中国科学院等离子体物理研究所)

1986 年 9 月 9 日收到

## 提 要

本文分析了冷等离子体和导电端板的 line-tying 效应对有限长度热电子等离子体交换模的影响,导出了包含 line-tying 效应的色散关系,得到了新的稳定性判据. 强 line-tying 效应的存在,使稳定性所要求的冷电子同热电子的密度比大大减少. line-tying 效应对低模数的长波扰动具有更好的稳定作用.

## 一、引 言

热电子等离子体交换模的稳定性问题,在磁镜位形中是非常重要的. 热电子等离子体包含热电子、冷电子和冷离子三种成份. 高  $\beta$  的热电子环产生的局部磁阱,能稳定背景冷等离子体的低频交换模<sup>[1-5]</sup>. 热电子本身受坏曲率驱动,发生角向漂移,导致较高频的交换不稳定性. 理论上,稳定热电子交换模的条件是冷电子同热电子的密度比必须大于临界值. 以前的理论导出的临界密度比约为 1 的量级<sup>[4,6,7]</sup>. 但是 EBT 的实验表明<sup>[8]</sup>,即使在密度比远小于 1 的情况下,热电子也能克服交换模稳定地存在,并且观察不到低模数的扰动.

我们在 HER 磁镜装置中,也研究了用微波产生和加热的热电子等离子体的不稳定性<sup>[9]</sup>. 加上微波时,冷电子的密度能满足稳定性阈值,热电子是稳定的. 在波源关断以后,冷电子密度迅速下降(衰减时间约几十微秒). 热电子由于碰撞频率非常低,其密度下降非常缓慢,此时冷电子密度比热电子密度小得多. 以前的理论预示,当冷电子密度不能满足稳定要求时,热电子交换不稳定性会在微秒量级内增长起来. 但在我们的实验中,硬 X 射线和 ECE 信号表明波断开后热电子仍然能稳定地存在达几十毫秒. 显然,这种稳定性不能用以前的理论来解释,还有其它稳定机制起着重要的作用.

在简单磁镜中,热电子的长度是有限的,热电子和导电端板之间存在冷等离子体. 交换扰动会引起电荷分离,但这些分离电荷将通过导电端板中和,从而抑制了交换模. Guest 等人曾用波动理论讨论过热电子温度不很高的有限长度热等离子体的交换不稳定性<sup>[10]</sup>,所得的结果不同于以 EBT 位形为基础的理论. 最近,导电端板的 line-tying 效应被用来解释 Tara 装置中的稳定性<sup>[11]</sup>. 因此,在热电子等离子体的实验参数范围,综合考虑冷电子和导电端板的 line-tying 效应对磁镜位形中热电子交换模的影响,以完善现有的理论,是很必要的.

我们把 line-tying 效应引入到有限长度热电子等离子体的色散关系中。对几何模型作局部近似,用等效重力来模拟磁场曲率效应。本文分析的是由热电子驱动的交流不稳定模,热电子的行为用动力论描述,冷等离子体则用磁流体近似。在我们的结果中,若假设热电子温度不很高,就自然得到 Guest 的结果。改变 line-tying 条件,稳定热电子交换模所要求的冷电子同热电子密度比相应变化。本文导出色散关系,讨论不同 line-tying 条件下的稳定性判据。

## 二、色散关系

我们使用局部近似的平板模型,如图 1 所示。中间热电子区包含热电子、冷电子和冷离子,它们的密度分别为  $N_h = \alpha N(x)$ ,  $N_c = (1 - \alpha)N(x)$ ,  $N_i = N(x)$ 。平衡磁场  $\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{e}_z$ , 磁场梯度和密度梯度在  $x$  方向。热电子两侧冷等离子体的密度为  $(1 - \alpha)N(x)$ 。

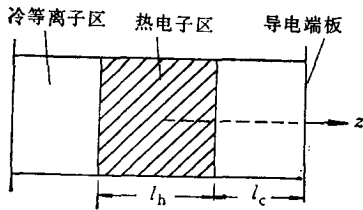


图 1 有限长度热电子等离子体模型

我们只讨论静电交换模。热电子受曲率驱动产生角向漂移,漂移速度为

$$\mathbf{V}_d = \frac{V_h^2}{\Omega_e R_b} \mathbf{e}_y,$$

其中  $V_h$  为热速度,  $R_b$  为曲率半径,  $\Omega_e = eB_0/M_e$ 。

设扰动形式为  $\exp(iky - i\omega t)$ 。当热电子区发生电位扰动  $\varphi$  时,从线性化的 Vlasov 方程,得到热电子的密度扰动为<sup>[6]</sup>

$$\rho_h = \frac{\alpha \epsilon_0 k^2 \delta \omega_{pi}^2}{\Omega_i (\omega - kV_d)} \varphi, \quad (1)$$

式中

$$\omega_{pi}^2 = \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 M_i}, \quad \frac{1}{R_p} = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dx}, \quad \delta = \frac{1}{KR_p}.$$

背景冷电子和冷离子对扰动的响应用磁流体方程描述。导电端板的存在,使扰动区的分离电荷能通过两侧冷等离子体和导电端板中和,从而为扰动电荷提供了一个泄漏源。我们先求出这个源项的表达式。

导电端板的 line-tying 效应,通过考虑沿磁场方向的电流引入<sup>[12]</sup>。根据运动方程,这个沿磁力线的电流扰动为

$$j_s = \frac{N_s e^2}{i\omega l_c M_s} \varphi,$$

下标  $s$  表示冷电子和冷离子。电流  $j_s$  引起的电荷变化,从连续性方程求出。在一个磁通管上平均,  $\nabla \cdot \mathbf{j}_s = j_s / l_h$ 。由  $j_s$  导致的电荷泄漏为

$$\rho_{ls} = -\frac{\epsilon_0 \omega_{ps}^2}{\omega^2 l_h l_c} \varphi. \quad (2)$$

我们只讨论热电子交换模,对冷电子和冷离子,只考虑  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  漂移,而不考虑曲率漂移。由于  $\mathbf{E}_0 = 0$ , 若再忽略背景等离子体的压力,冷电子和冷离子就没有平衡漂移

速度,只有受扰动后引起的速度

$$V_e = -\frac{ck\delta}{Q_e M_e} \varphi, \quad (3)$$

$$V_i = \frac{ck\omega}{M_i(\omega^2 - Q_i^2)} \left(1 + \frac{Q_i}{\omega} \delta\right) \varphi. \quad (4)$$

在求  $V_e$  时,已假设  $\omega \ll Q_e$ .

冷电子和冷离子遵守有源的连续性方程

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s) = S_s. \quad (5)$$

源项  $S$  来自于 line-tying 效应. 将  $V_e$  和  $V_i$  代入方程(5),求出冷电子和冷离子的密度扰动

$$\rho_e = \frac{\epsilon_0(1-\alpha)k^2\delta\omega_{pi}^2}{\omega Q_i} \varphi - \frac{\epsilon_0\omega_{pe}^2}{\omega^2 l_h l_c} \varphi, \quad (6)$$

$$\rho_i = \frac{\epsilon_0 k^2 \omega_{pi}^2}{\omega^2 - Q_i^2} \left(1 + \frac{Q_i}{\omega} \delta\right) \varphi - \frac{\epsilon_0 \omega_{pi}^2}{\omega^2 l_h l_c} \varphi. \quad (7)$$

将方程(1)和(6)对比,容易看出,若在  $\rho_e$  中去掉源项,用  $\alpha$  代换  $(1-\alpha)$ ,用包含曲率漂移的  $(\omega - kV_d)$  代换  $\omega$ ,就得到  $\rho_h$  的表达式. 这说明在一定条件下, Vlasov 理论就过渡到磁流体理论.

扰动电荷必须满足 Poisson 方程

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -(\rho_h + \rho_i + \rho_e). \quad (8)$$

结合方程(1),(6)–(8),就得到热电子交换模的色散关系

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - Q_i^2} \left(1 + \frac{Q_i}{\omega} \delta\right) + \frac{(1-\alpha)\delta\omega_{pi}^2}{\omega Q_i} + \frac{\alpha\delta\omega_{pi}^2}{Q_i(\omega - kV_d)} \\ & - \frac{\omega_{pi}^2/Q_i^2}{\omega^2/\omega_L^2} + 1 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\omega_L^2 = \frac{(1-\alpha)Q_e Q_i}{l_h l_c k^2}.$$

在热电子实验参数范围,一般  $\omega_{pi}^2/Q_i^2 \gg 1$ , 常数项可以忽略不计. 记  $q = -kV_d/Q_i = \omega_{ge}/Q_i$ , (对于  $R_b/R_p > 0$ ,  $q > 0$ ),  $x = \omega/Q_i$ , 色散关系变为

$$\frac{1}{x^2 - 1} \left(1 + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{(1-\alpha)\delta}{x} + \frac{\alpha\delta}{x+q} - \frac{\omega_L^2/Q_i^2}{x^2} = 0, \quad (10)$$

式中等号左端最后一项和 line-tying 效应相联系.

### 三、稳定性分析

如果不存在 line-tying 效应,色散方程(10)等号左端最后一项为零. 取  $\delta = 1$ , 对  $x$  求解得

$$x = -\frac{(1-\alpha)q}{2} \pm \left[ \frac{(1-\alpha)^2 q^2}{4} - \alpha q \right]^{1/2}. \quad (11)$$

稳定条件为

$$\frac{N_c}{N_h} \geq 2 \left[ \frac{1}{q} + \left( \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \right)^{1/2} \right]. \quad (12)$$

这就是 Berk 的结果<sup>[6]</sup>.

我们要重点分析的是存在 line-tying 效应时的稳定条件. 把方程(10)写成  $x$  的四次形式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (13)$$

其中,  $a = \delta$ ,  $b = 1 + \delta q - \alpha \delta q - \omega_L^2/Q_i^2$ ,  $c = q(1 - \omega_L^2/Q_i^2)$ ,  $d = \alpha \delta q + \omega_L^2/Q_i^2$ ,  $e = q\omega_L^2/Q_i^2$ . 为了便于分析,我们在低频近似下求解. 设  $x \ll 1$ , 忽略  $x$  的高次项, 得到一个二次方程

$$cx^2 + dx + e = 0. \quad (14)$$

首先,讨论强 line-tying 效应. 在这种情况下,系数  $d$  中的第一项远小于第二项,稳定性要求  $d^2 - 4ce \geq 0$ , 即

$$\frac{\omega_L^2}{Q_i^2} - 4q^2 \left( 1 - \frac{\omega_L^2}{Q_i^2} \right) \geq 0. \quad (15)$$

显然,一个稳定的充分条件为

$$\frac{\omega_L^2}{Q_i^2} \geq 1, \quad (16)$$

稳定的必要条件为

$$\frac{\omega_L^2}{Q_i^2} \geq \frac{4q^2}{1+4q^2}. \quad (17)$$

对于较大的  $q$ , 条件(17)和(16)式没有什么区别,而(16)式更简洁. 在 EBT 的参数范围和我们的热电子等离子体实验中,  $q$  比较大,所以我们用(16)式作为稳定性的充分必要条件.

对于较小的  $q$ , 可以求出另一个稳定条件. 忽略  $d$  中的第一项,  $d^2 - 4ce \geq 0$  可写成

$$\left( \frac{\omega_L^2}{Q_i^2} - 2q \right) \left( \frac{\omega_L^2}{Q_i^2} + 2q \right) + 4q^2 \left[ \left( \frac{\omega_L^2}{Q_i^2} \right)^2 - \frac{\omega_L^2}{Q_i^2} + 1 \right] \geq 0.$$

显然,正比于  $4q^2$  的项是大于零的,因而总是起稳定贡献的. 当  $q$  较小时,将这项忽略,就得到低  $q$  条件下的稳定条件

$$\frac{\omega_L^2}{Q_i^2} \geq 2q. \quad (18)$$

稳定条件(16)和(18)式能用冷电子同热电子的密度比来表示为

$$\frac{N_c}{N_h} \geq \frac{m^2 l_h l_c R^{-2} M_c / M_i}{1 - m^2 l_h l_c R^{-2} M_c / M_i} \quad (19)$$

和

$$\frac{N_c}{N_h} \geq \frac{2qm^2 l_h l_c R^{-2} M_c / M_i}{1 - 2qm^2 l_h l_c R^{-2} M_c / M_i} \quad (20)$$

式中  $m$  为角向模数,  $R$  为等离子体径向特征长度,  $k = m/R$ . 当  $q$  较小时, (例如, Guest 取  $q \sim 10^{-3}$ ), (20) 式等号右边分母中正比于  $q$  的项可以忽略. 代入  $q = \omega_{gc}/\Omega_i$ , 条件 (20) 式变为

$$\frac{N_c}{N_h} \geq 2m^2 \frac{\omega_{gc} l_h l_c M_c}{\Omega_i R^2 M_i}. \quad (21)$$

这就是 Guest 等人用波动理论在低  $q$  条件下导出的结果<sup>[10]</sup>. 在我们的分析中, 作为一种特别情形, 很自然地得到了.

在目前的热电子等离子体实验参数范围,  $q$  比较大, 所以我们采用稳定条件 (19) 式. 磁镜中交换模的角向模数一般不大, (19) 式等号右边约为 0.1%. 以前的以 EBT 位形为基础的稳定性理论, 没有考虑 line-tying 效应的作用, 稳定条件要求冷电子同热电子的密度比约为 1 的量级.

从稳定条件 (19) 式, 我们可以得到另一个重要结果: 低模数的长波模更容易被 line-tying 效应稳定. 稳定所容许的模数必须满足

$$m < R \left( \frac{M_i}{l_h l_c M_c} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

相应地, 对波长的要求为

$$\lambda > \left( \frac{l_h l_c M_c}{M_i} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

热电子交换模的短波扰动可以被有限 Larmor 半径效应稳定<sup>[13]</sup>.

现在, 改变 line-tying 条件, 讨论阈值密度比的变化. 色散方程 (14) 的临界稳定条件为  $d^2 - 4ce = 0$ , 即

$$\left( \alpha \delta q + \frac{\omega_L^2}{\Omega_i^2} \right)^2 - 4q^2 \frac{\omega_L^2}{\Omega_i^2} \left( 1 - \frac{\omega_i^2}{\Omega_i^2} \right) = 0. \quad (24)$$

在表示 line-tying 效应的项  $\omega_L^2/\Omega_i^2$  中, 引入新的参数  $y$ , 定义

$$\frac{\omega_L^2}{\Omega_i^2} = (1 - \alpha) \frac{\Omega_c}{\Omega_i l_h l_c k^2} = (1 - \alpha) y.$$

参数  $y$  从小到大变化, 表示 line-tying 效应从弱到强. 在简单磁镜位形中,  $y$  可达  $10^3$  量级. 方程 (24) 中, 正比于  $\alpha$  的项远小于  $\omega_L^2/\Omega_i^2$ , 可以忽略, 临界稳定条件变为

$$\frac{N_c}{N_h} = \frac{4q^2}{y(1 + 4q^2) - 4q^2}. \quad (25)$$

图 2 给出了不同 line-tying 条件下, 稳定性阈值密度比的变化. 图中虚线是根据不包含 line-tying 效应的结果 (12) 式画出的. 曲线上部区域是稳定的. 从图 2 中可以清楚地看出, line-tying 效应能大大减少稳定热电子交换模所需要的冷电子成份.

上面的讨论是在低频近似下进行的. 如果对色散方程 (13) 作高频近似, 忽略  $\alpha$  的低次项, 也能导出类似的结果.

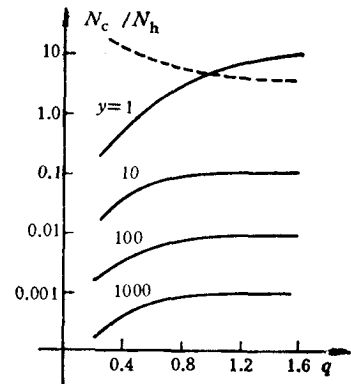


图 2 不同 line-tying 条件下的阈值密度比

## 四、小 结

我们讨论了热电子等离子体中,热电子驱动的交流不稳定性,得到了如下结论:

热电子两侧的冷等离子体和导电端板的 line-tying 效应,对热电子交换模有着重要的影响。冷等离子体密度必须大于临界值,以保证热电子和导电端板之间有良好的电的连接, line-tying 效应为扰动区的分离电荷提供了一个电荷泄漏源。在强 line-tying 效应的条件下,稳定热电子交换模所要求的冷、热电子密度比大大降低,只要达到 0.1% 即可满足稳定性要求,这比以前不包含 line-tying 的理论导出的结果要低三个量级。我们的实验装置中,由于存在很强的 line-tying 效应,即使冷电子同热电子的密度比很小,热电子仍然能克服交换模稳定地存在。本文的分析很好地解释了我们的实验结果。

导电端板的 line-tying 效应对低模数的长波扰动有更好的稳定作用。稳定性所要求的冷电子同热电子的密度比基本上正比于模数的平方,稳定性所容许的最大模数约为 10—15。在 EBT<sup>[9]</sup> 和 TARA<sup>[11]</sup> 的实验中,没有观察到低模数的交换扰动,这和我们的理论预示相符。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] D. B. Nelson *et al.*, *Nucl. Fusion* 19(1979), 283.
- [ 2 ] J. W. Van Dam and Y. C. Lee, Proceedings of the EBT Ring Physics Workshop, ORNL, Oak Ridge, (1979), p. 471.
- [ 3 ] D. B. Nelson, *Phys. Fluids*, 23(1980), 1850.
- [ 4 ] H. L. Berk *et al.*, *Phys. Fluids*, 26(1983), 201.
- [ 5 ] A. Komori, *Nucl. Fusion*, 24(1984), 1173.
- [ 6 ] H. L. Berk, *Phys. Fluids*, 19(1976), 1255.
- [ 7 ] R. R. Dominguez *et al.*, *Phys. Fluids*, 21(1978), 827.
- [ 8 ] S. Hiroe *et al.*, *Phys. Fluids*, 27(1984), 1019.
- [ 9 ] 王正民等, 核聚变与等离子体物理, 5(1985), 318.
- [ 10 ] G. E. Gustaf *et al.*, *Phys. Fluids*, 9(1966), 1798.
- [ 11 ] M. J. Gerver *et al.*, MIT Report. PFC/JA-85-19, Oct. (1985).
- [ 12 ] M. A. Lieberman *et al.*, *Plasma Phys.*, 19(1977), 745.
- [ 13 ] N. A. Krall, *Phys. Fluids*, 9(1966), 820.

## EFFECTS OF LINE-TYING ON HOT ELECTRON INTERCHANGE MODE

HUANG CHAO-SONG    REN ZHAO-XING    QIU LI-JIAN

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

### ABSTRACT

The effects of cold plasma and conducting end plates on interchange instability of finite-length hot electron plasma are studied. A dispersion relation including line-tying is derived, and new stability criteria are found. Strong line-tying effect can greatly reduce the threshold of density ratio needed for stabilizing interchange mode of hot electrons. The modes with low  $m$  and long wavelength may be stabilized more easily.