

研究简报

赝标介子的唯象模型 (I)

吴自玉 兰慧彬 汪克林 刘耀阳

(中国科学技术大学基础物理中心)

章正刚 先鼎昌

(成都地质学院) (中国科学院高能物理研究所)

1986 年 3 月 24 日收到; 1987 年 1 月 13 日收到修改稿

提 要

本文基于场论中的旋量-旋量 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程),提出了一种满足相对论协变性要求的强子间的唯象平底势,并计算得到了在动量中的 0^- 介子波函数。

一、引 言

60 年代以来,许多高能物理实验表明,基本粒子不再是点粒子,而很可能是由更基本的物质单位^[1]——夸克组成的束缚态。从理论上探讨这类粒子与反粒子组成的束缚态,对于了解基本粒子结构具有很大的意义。

研究束缚态的一个重要途径是利用现有场论中的旋量-旋量 B-S 方程^[2,3]。而其关键确在于如何给出相互作用势,例如:汤川势,但它在零点的奇异性导致介子太“瘦”^[4];引入规则化项的两个汤川势之差(为了克服零点奇异性)^[5],但这样给出的介子半径仍然太小;把汤川势对 μ^2 作 ν 次微商而得到的 ν 势^[6-8],仍给不出大的介子半径;近平底势^[9-11]但势的底部不够平,且“尾巴”拖得太长,由此给出的波函数在动量较大时出现振荡;等等。

由电子在核子上的深度非弹性散射实验的结果表明^[12],在核子内部存在点状结构,而这些点状结构在核子内部的性质有如自由粒子。因此从物理上考虑,夸克应是处在一个深的平底位阱中。

根据夸克模型的分析^[4,13],我们假定夸克与反夸克之间只有标量耦合的相互作用,这些相互作用为相对论协变的唯象势所描述。在本文中,我们以拟合的方法,给出了较为理想的平底势,然后将介子结构波函数按 $O(4)$ 群的本征函数展开,并只保留低次分波进行数值计算,得到了在动量空间中的束缚态数值解。

在严格的计算中我们发现,在以前的几篇文献中^[8-11],文中所给出的核函数 \mathcal{N}_{nn}^{ij} 可能是度规张量的误用而使得其中的很多项不正确。因此那里所给出的结果就不十分可靠。本文作了适当的修正。

在本文中,我们首先求出平底位势,然后推导在平底位势下的 B-S 方程。其次利用高斯求积公式,求出了在最低分波近似下方程的数值解,从而得到了在动量空间中的束缚态数值解。最后给予简短的讨论。

二、平底势下的 B-S 方程

对于标量耦合的相互作用,夸克-反夸克组成的 0^- 介子束缚态,其波函数 χ 所满足的 B-S 方程,在动量空间中可以写为^[9-11]

$$\chi(P, Q) = - \frac{i(\hat{P} + \hat{Q}) - M}{(P + Q)^2 + M^2} \int d^4K U(P - K) \chi(K, Q) \frac{i(\hat{P} - \hat{Q}) - M}{(P - Q)^2 + M^2}, \quad (1)$$

其中 $2Q$ 是介子的质心动量, P 是介子内部运动的相对动量, M 是夸克质量, U 是势函数。符号“ \wedge ”表示与 γ 矩阵的内积,例如 $\hat{P} = P_\mu \gamma_\mu$ 。

从相对论的协变性要求以及势是由变换多种粒子而产生的考虑,引进一种协势^[10,11]

$$U(K) = - \frac{iG^2}{(2\pi)^4} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{K^2 + (N + i\rho)^2}, \quad (2)$$

式中 N 是交换粒子的最低质量, ρ 是不同粒子的质量差。与 (2) 式相应的三维势为

$$V(r) = - G^2 \sum_{i=0}^n a_i \frac{e^{-(N+i\rho)r}}{r}, \quad (3)$$

其中 $(n+1)$ 个 a_i 由下述唯象方法确定。首先我们为了避免势函数在零点的奇异性,要求

$$V(0) = \text{const}, \quad \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

然后选取拟合函数为

$$I(R) = I_0 \tanh \left[\frac{1}{2} (R - R_0) \right] - I_0, \quad (5)$$

其中取 $I_0 = \frac{V(0)}{G^2 E M} = \frac{1}{2}$, $R = Mr$ 是无量纲化后的坐标, R_0 取值为 10, E 的定义由下面给出。

由此拟合出的三维势函数形状如图 1 所示。这里我们在国际单位制下 ($\hbar = c = 1$), 已将变量进行了无量纲化处理

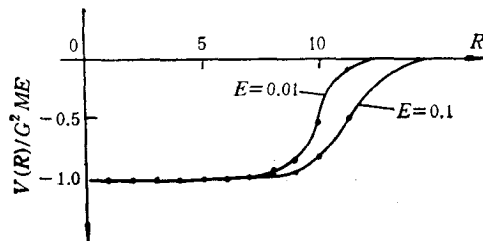


图 1 对应于 $\beta = 2, n = 9$ 的三维势函数图形

$$E = \frac{N}{M}, \quad \beta = \frac{\rho}{M}. \quad (6)$$

再回到(1)式,对 K 进行 Wick 转动^[14],并将 P, Q 延拓到欧氏空间,则在质心系中有

$$\chi(P, Q) = i \int d^4K F(P, Q) S_-(P, Q) U(Q, P - K) \chi(K, Q) S_+(P, Q), \quad (7)$$

其中各个量的定义与文献[10]相同.

对于 0^- 介子,波函数可以展开为^[15]

$$\chi(P, Q) = \sum_{i=1}^4 \chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) M^{(i)}(P, Q), \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \gamma_5, & M^{(2)} &= \hat{Q} \gamma_5, \\ M^{(3)} &= \hat{P} \gamma_5, & M^{(4)} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Q_\mu P_\nu \sigma_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (9)$$

对应的逆矩阵为

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(1)} &= \frac{1}{4} \gamma_5, & \tilde{M}^{(2)} &= \frac{D}{4} [(P \cdot Q) \hat{P} - P^2 \hat{Q}] \gamma_5, \\ \tilde{M}^{(3)} &= \frac{D}{4} [(P \cdot Q) \hat{Q} - Q^2 \hat{P}] \gamma_5, & \tilde{M}^{(4)} &= \frac{D}{16} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} Q_\mu P_\nu \sigma_{\lambda\sigma}, \\ D &= [P^2 Q^2 - (P \cdot Q)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

不难验证,它们在 Pauli 度规下^[15],满足正交归一条件

$$\text{Tr}[M^{(i)}(P, Q) \tilde{M}^{(j)}(P, Q)] = \delta_{ij}. \quad (11)$$

将(8)式代入到(7)式,并利用(11)式便可得到 $\chi^{(i)}$ 所满足的方程

$$\chi^{(i)} = i \sum_{j=1}^4 F(P, Q) \int d^4K U(Q, P - K) H^{ij}(P, Q, K) \chi^{(j)}(K^2, K \cdot Q), \quad (12)$$

式中我们已定义了

$$H^{ij}(P, Q, K) = \text{Tr}[\tilde{M}^{(i)}(P, Q) S_-(P, Q) M^{(j)}(K, Q) S_+(P, Q)], \quad (13)$$

其各个分量由表1给出.

表 1 H^{ij}

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	$P^2 + Q^2 + M^2$	$2M$	0	1
2	$2MQ^2$	$Q^2 - P^2 + M^2$	$2(P \cdot Q)$	M
3	$2M(K \cdot Q)$	$2(Q \cdot K) + D(M^2 - P^2 - Q^2) \cdot [P^2(Q \cdot K) - (Q \cdot P)(K \cdot P)]$	$2(P \cdot K) + D(M^2 - P^2 - Q^2) \cdot [Q^2(P \cdot K) - (P \cdot Q)(K \cdot Q)]$	$M \cdot D[P^2(K \cdot Q) - (K \cdot P)(P \cdot Q)]$
4	$4[(Q \cdot K)(Q \cdot P) - Q^2(P \cdot K)]$	$4DMP^2[(Q \cdot K)(P \cdot K) - Q^2(P \cdot K)]$	$4MD(P \cdot Q)[Q^2(P \cdot K) - (P \cdot Q)(K \cdot Q)]$	$D(P^2 + Q^2 - M^2) \cdot [(P \cdot Q)(K \cdot Q) - Q^2(P \cdot K)]$

为了进行数值计算,我们将 $\chi^{(i)}$ 和势函数按 $O(4)$ 群的本征函数——Gegenbauer 函数^[10,16]展开

$$\chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) = \sum_n \chi_n^{(i)}(P, Q) C_n^1(\cos \theta), \quad (14)$$

$$U(P - K) = -\frac{iG^2}{(2\pi)^4} \sum_{m=0}^{\infty} L_m(P, Q) C_m^1(\cos \delta), \quad (15)$$

其中 δ 为 P 和 K 之间的夹角,展开系数为

$$L_m = \frac{1}{PK} (z - \sqrt{z^2 - 1})^{m+1}, \quad z = \frac{1}{2PK} (P^2 + K^2 + N^2). \quad (16)$$

将 (14) 和 (15) 式代入到 (12) 式中,并利用 $C_n^1(\cos \theta)$ 的带权正交关系

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta C_n^1(\cos \theta) C_m^1(\cos \theta) d\theta = \delta_{n,m}, \quad (17)$$

便可得到

$$\chi_n^{(i)}(P, Q) = G^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{n'} \int_0^\infty dK \mathcal{K}_{nn'}^{ii} \chi_n^{(i)}(K, Q), \quad (18)$$

式中已定义了核函数

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{nn'}^{ii} = & \frac{2}{\pi} \frac{K^3}{(2\pi)^4} \sum_m \int_0^\pi C_n^1(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta F(P, Q) \\ & \cdot \int dQ^4 L_m(P, K) C_m^1(\cos \delta) H^{ij} C_{n'}^1(\cos \theta), \end{aligned} \quad (19)$$

式中 dQ^4 是四维立体角,其定义为

$$dQ^4 = \sin^2 \phi d\phi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (20)$$

且有

$$\int dQ^4 = 4\pi \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi = 2\pi^2. \quad (21)$$

在进行了比较冗长的计算后,得到了与文献 [9—11] 中给出的有所不同的所有低次分波近似下的核函数 $\mathcal{K}_{nn'}^{ii}$ 各个分量,如表 2 所示。

在计算核函数的过程中,我们用到了下面的几个公式:

$$\begin{aligned} C_n^1(\cos \delta) = & \sum_{k=0}^n \frac{2^{2k} (n-k)! [\Gamma(K+1)]^2}{\Gamma(n+K+2)} (2K+1) \sin^k \theta \sin^k \theta' \\ & \cdot C_{n-k}^{K+\frac{1}{2}}(\cos \theta) C_{n-k}^{K-\frac{1}{2}}(\cos \theta') P_K(\cos \omega), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} P_K(\cos \omega) = & P_K(\cos \phi) P_K(\cos \phi') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(K-m)!}{(K+m)!} \\ & \cdot P_K^m(\cos \phi) P_K^m(\cos \phi') \cos m(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (23)$$

$$E_{ab} = \int_0^\pi \sin^a \theta \cos^b \theta F(P, Q) d\theta. \quad (24)$$

表 2

$in \backslash jn'$	1,0	1,2	2,0
1,0	$\frac{K^3}{4\pi^3} (P^2 + Q^2 + M^2) L_0 E_{20}$	$\frac{K^3}{4\pi^3} (P^2 + Q^2 + M^2) \cdot (4E_{22} - E_{20}) L_2$	$\frac{K^4}{2\pi^2} M Q^2 L_0 E_{20}$
1,2	$\frac{K^3}{4\pi^3} (P^2 + Q^2 + M^2) \times L_0 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^3}{4\pi^3} (P^2 + Q^2 + M^2) L^2 \cdot (16E_{24} - 8E_{22} + E_{20})$	$\frac{K^3}{2\pi^3} M Q^2 L_0 (4E_{22} - E_{20})$
2,0	$\frac{K^3}{2\pi^2} M L_0 E_{20}$	$\frac{K^3}{2\pi^2} M L_2 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^3}{4\pi^2} (Q^2 - P^2 + M^2) L_0 E_{20}$
2,2	$\frac{K^3}{2\pi^3} M L_0 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^3}{2\pi^2} M L_2 (16E_{24} - 8E_{22} + E_{20})$	$\frac{K^3}{4\pi^3} (Q^2 - P^2 + M^2) \cdot L_0 (4E_{22} - E_{20})$
3,1	0	0	$\frac{K^3}{\pi^3} P Q L_0 E_{22}$
4,0	$\frac{K^3}{4\pi^3} L_0 E_{20}$	$\frac{K^3}{4\pi^3} L_2 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^3}{4\pi^3} M L_0 E_{20}$

三、波函数的数值解

我们已得到了能够进行数值计算的 B-S 方程 (18)。根据文献 [9, 10], 取最低次方近似, 于是 (14) 式变为

$$\chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) = \chi_0^{(i)}(P, Q) \quad i = 1, 2, 4, \quad (25)$$

$$\chi^{(3)}(P^2, P \cdot Q) = C_1^1(\cos\theta) \chi_1^{(3)}(P, Q). \quad (26)$$

对上面二式进行无量纲化处理, 在此以夸克质量 M 作为单位。令

$$F_0^{(1)} = \chi_0^{(1)}, \quad F_0^{(2)} = M \chi_0^{(2)}, \quad F_1^{(3)} = M \chi_1^{(3)}, \quad F_0^{(4)} = M^2 \chi_0^{(4)} \quad (27)$$

这样所有的 F 都具有相同的量纲。于是 0^- 介子波函数可以写为

$$\chi = F_0^{(1)} \gamma_5 + F_0^{(2)} B \gamma_4 \gamma_5 + F_1^{(3)} C_1^1(\cos\theta) \hat{P} \gamma_5 + F_0^{(4)} B \epsilon_{4\nu\lambda\sigma} P_\nu \sigma_{\lambda\sigma}, \quad (28)$$

其中已令一个新的参量

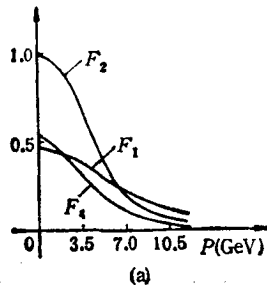
$$B = \frac{m}{2M} = Q/M, \quad (29)$$

式中 m 是介子的质量。 B 值的大小表示束缚态束缚的松紧程度, 也就是说, 当 $B \sim 1$ 时, 表示束缚松散; 而当 $B \ll 1$ 时, 则表示紧束缚。

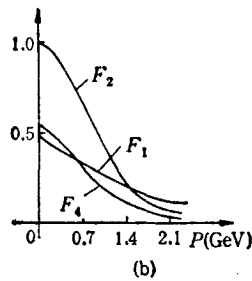
在这样近似下, 方程 (18) 可以重新写成分量形式

$\mathcal{H}_{\pi\pi}^{ii}$

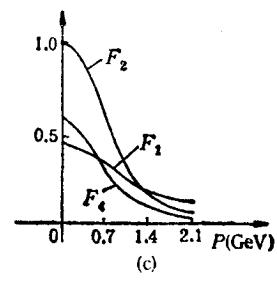
2,2	3,1	4,0
$\frac{K^3}{2\pi^3} MQ^2 L_2 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^4}{4\pi^3} MQ [L_0 E_{20} + L_2 (4E_{22} - E_{20})]$	$\frac{K^4 Q^2 P}{\pi^3} L_1 (E_{22} - E_{20})$
$\frac{K^3}{2\pi^3} MQ^2 L_2 (16E_{24} - 8E_{22} + E_{20})$	$\frac{K^4}{4\pi^3} MQ [L_0 (4E_{22} - E_{20}) + L_2 (16E_{24} - 8E_{22} + E_{20})]$	$\frac{K^4 Q^2 P}{\pi^3} L_1 (4E_{24} - 5E_{22} + E_{20})$
$\frac{K^3}{4\pi^3} (Q^2 - P^2 + M^2) \cdot L_2 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^4}{\pi^3} \left\{ \frac{M^2 - P^2 + Q^2}{8Q} E_{20} \cdot (L_0 - L_2) + QL_1 E_{22} \right\}$	$-\frac{MK^4 P}{\pi^3} L_1 E_{20}$
$\frac{K^3}{4\pi^3} (Q^2 - P^2 + M^2) L_2 \cdot (16E_{24} - 8E_{22} + E_{20})$	$\frac{K^4}{\pi^3} \left\{ \frac{M^2 - P^2 + Q^2}{8Q} (L_0 - L_2) (4E_{22} - E_{20}) + QL_2 (4E_{24} - E_{22}) \right\}$	$\frac{MK^4 P}{\pi^3} (E_{20} - 4E_{22})$
$\frac{K^3}{\pi^3} PQL_2 (4E_{24} - E_{22})$	$\frac{K^4}{\pi^3} E_{22} \left\{ \frac{M^2 + P^2 - Q^2}{P} L_2 + \frac{P}{2} (L_0 - L_2) \right\}$	$\frac{2MK^4 Q}{\pi^3} L_1 E_{22}$
$\frac{K^3}{4\pi^3} ML_2 (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{MK^4}{8Q\pi^3} (L_0 - L_2) E_{20}$	$\frac{K^4 (M^2 - P^2 - Q^2)}{4\pi^3 P} L_1 E_{20}$



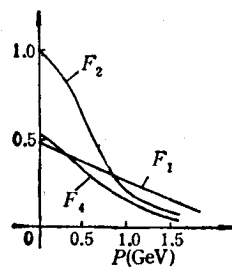
(a) 0.01/0.1



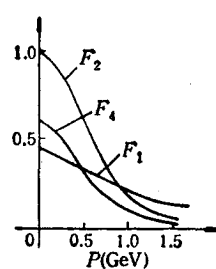
(b) 0.05/0.1



(c) 0.05/0.01



(d) 0.065/0.1



(e) 0.065/0.01

图 2 不同参数下的波函数曲线

$$\begin{aligned}
 F_0^{(1)} &= G^2 \int_0^\infty dK (\mathcal{K}_{00}^{11} F_0^{(1)} + \mathcal{K}_{00}^{12} F_0^{(2)} + \mathcal{K}_{01}^{13} F_1^{(3)} + \mathcal{K}_{00}^{14} F_0^{(4)}), \\
 F_0^{(2)} &= G^2 \int_0^\infty dK (\mathcal{K}_{00}^{21} F_0^{(1)} + \mathcal{K}_{00}^{22} F_0^{(2)} + \mathcal{K}_{01}^{23} F_1^{(3)} + \mathcal{K}_{00}^{24} F_0^{(4)}), \\
 F_1^{(3)} &= G^2 \int_0^\infty dK (\mathcal{K}_{10}^{31} F_0^{(1)} + \mathcal{K}_{10}^{32} F_0^{(2)} + \mathcal{K}_{11}^{33} F_1^{(3)} + \mathcal{K}_{10}^{34} F_0^{(4)}), \\
 F_0^{(4)} &= G^2 \int_0^\infty dK (\mathcal{K}_{00}^{41} F_0^{(1)} + \mathcal{K}_{00}^{42} F_0^{(2)} + \mathcal{K}_{01}^{43} F_1^{(3)} + \mathcal{K}_{00}^{44} F_0^{(4)}).
 \end{aligned}$$

在上式中,无量纲的耦合常数 G^2 可以在迭代求积中定出。数值计算是在 GCOS8 电子计算机上完成,通过适当地选取参数,求得了几组 0^- 介子在动量空间中的波函数,如图 2 所示。图中的参数值 0.01/0.1 等表示 $B = 0.01$, $E = 0.1$; $F_3 \sim 0$ 。

从所得到的结果来看:

(1) 波函数 χ 的协变展开式 (8) 中 $M^{(i)}$ 以及逆矩阵 $\tilde{M}^{(i)}$, 只有在 Pauli 度规下才满足正交归一化关系式 (11)。若取 Bjorken 度规, γ 代数关系以及求迹公式都要作相应的改动^[11], 从而 $\tilde{M}^{(i)}$ 也就不同于文中所给出的表达式。文献 [9,10] 混用了这些代数关系,导致了核函数 $\mathcal{K}_{nn'}$ 中一些项不对。因此原来的结果就不十分可靠了。本文纠正了这些不妥之处,重新计算了结构波函数,使得我们的理论严格一些。

(2) 我们以拟合的方法,给出了较为理想的唯象平底势,而且在求波函数时参量的选择与求位势时参量的选择一致。

(3) 从所得到的各个不变函数的理论曲线可以看出,波函数的数值结果与参量 E 的选择并不敏感;而对于不同的 B 值,波函数的宽度有明显的改变,即随着 B 值的增大,波函数在动量空间中的分布越来越“瘦”。

由于我们已得到了在动量空间中的束缚态数值解,因此可以用它们来计算 0^- 介子的电磁形状因子,以便能直接和实验相比较。

感谢和顾一鸣同志的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.*, 8(1964), 214; G. Zweig, CERN preprints TH401, 412, (1964), unpublished.
- [2] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, 82(1951), 1232.
- [3] N. Nakanishi, *Suppl. Progr. Theor. Phys.*, 43(1969), 1.
- [4] Elementary Particle Theory Group of Theoretical Physics Division, Peking University and the Theoretical Physics Division of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, *Acta Scientia Naturalis Universitatis Pekinensis*, (1966), p. 103, 209, 213; *Atomic Energy*, (1966), 507.
- [5] A. Guth, *Ann. Phys. (N. Y.)* 82(1974), 407.
- [6] M. Bohm, H. Joos and M. Kramer, *Nuovo Cimento*, 7A(1972), 21.
- [7] C. W. Wu, T. C. Hsien, L. Gao and S. Ji, *Scientia Sinica*, (1977), 431.
- [8] T. C. Hsien, H. T. Cheng, M. C. Wang, K. L. Wang and C. K. Chang *Acta Physica Sinica*, 27(1978), 94.
- [9] M. C. Wang, H. T. Cheng, T. C. Hsien, K. L. Wang and C. K. Chang, *Acta Physica Energetica Foris et Physica Nuclearis*, 1(1977), 7.
- [10] M. C. Wang, H. T. Cheng, T. C. Hsien, K. L. Wang and C. K. Chang, *ibid.*, 2(1978), 109.
- [11] M. C. Wang, H. T. Cheng, T. C. Hsien, K. L. Wang and C. K. Chang, *ibid.*, 3(1979), 572.
- [12] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, *Phys. Rev.*, 185(1969), 1975.
- [13] Elementary Particle Theory Group of the Institute of Atomic Energy, *Atomic Energy*, (1966), 137; 514

(erratum).

- [14] G. C. Wick, *Phys. Rev.* **96**(1954), 1124.
- [15] Y. Tahahashi, Introduction to field Quantization, Pergamon Press Ltd., Hungary, (1969), p. 261.
- [16] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhil, Table of Integral, Series and Products, Academic, New York, (1965), p. 1029.
- [17] Z. Y. Wu and K. L. Wang, *Acta Physica Sinica*, **34**(1985), 588.

A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR 0^- MESON (I)

WU ZI-YU LAN HUI-BIU WANG KE-LIN LIU YAO-YANG

(Center for Fundamental Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ZHANG ZHENG-GANG

(Chengdu Institute of Geology)

XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

By use of the spinor-spinor Bethe-Salpeter equation of field theory, we assumed a phenomenological "flat bottom" hadronic potential which is relativistically covariant. And the meson wave functions was obtained in the momentum space.