第 38 卷 第 12 期
1989 年 12 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 38, No. 12
Dec., 1989

Krichever-Novikov 弦的 BRST 量子化及拟自由弦场论*

徐 开 文
浙江大学物理系

郭 汉 英[1)]
中国科学院理论物理研究所

1989 年 2 月 1 日收到

在 Krichever-Novikov (简称 KN) 弦的 BRST 量子化的基础上，采用 Siegel 的方法构造了任意给定亏格的 KN 弦的拟自由场论，并提出了一种非微扰拟自由弦场论的尝试。

一、引 言

最近，Krichever 与 Novikov 指出[1,2]，在任意亏格紧 Riemann 面 Σ_g 上，存在可整体定义的除分离两点 ($P_\pm$) 外处处全纯的亚纯 λ-微分，对于亚纯向量场 ($\lambda=-1$)，存在着 Virasoro 型的无限维代数，此外，利用其中第三类阿贝耳微分可以在 Σ_g 上整体定义(欧氏)时间 τ，使得 $\tau(P_\pm)=\mp\infty$. 这样，等 τ 曲线簇 $\{C_\tau\}$ 自然描述了闭弦在 Σ_g 上由 P_+ 到 P_- 的传播，其分叉与结合表明有相互作用，分叉(或结合)数与亏格数 g 相同. 显然，这一闭弦的传播图象是自由闭弦在 Riemann 球上传播图象的自然推广，KN 代数也是 Virasoro 代数在有相互作用情形下的某种推广. 为方便起见，并与 Polyakov 弦[3] 有所区别，我们称之为 KN 弦.

利用 KN 基构造 KN 弦的算子形式，研究其性质，正引起不少作者的注意[4-6]. 我们将在 KN 弦的 BRST 量子化的基础上，探讨 KN 弦场论的构造. 由于 KN 代数是 Virasoro 代数在高亏格情形下的自然推广，因而不难想像，以 Virasoro 代数的 BRST 上同调为基础的自由闭弦场论可以推广为以 KN 代数的 BRST 上同调为基础的闭弦场论，而且在形式上与前者完全一致. 不同的是后者包含了表现闭弦的分叉再结合的相互作用. 然而，应该指出的是，这种与自由闭弦场论形式上一致的 KN 弦场论并不能对闭弦的相互作用给予完整的描述. 例如，不能描述分叉数与结合数不同的情形，即不能描述 KN 弦之间的相互作用. 为此，称这种场论为拟自由场论. 本文将给出 KN 弦的这种拟自由场论的形式，并考查一种可能的非微扰形式. 有理由相信 KN 弦相互作用完整的场论描述，应是这种拟自由场论的拓广，关于这一点，将留待进一步的研究.

* 国家自然科学基金资助的课题.
1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心.

本文中将首先给出 KN 弦的标架描述[2,6]，以给出必要的概念和记号.其次利用BRST方法对 KN 弦进行 BRST 量子化，给出 KN 弦的约束方程，导出了弦及鬼的真空态定义[5]. 然后，仿照 Siegel[7] 的方法，利用 KN 弦的 BRST 荷及其鬼的零模，构造 BRST 不变的拟自由闭弦场论. 最后，利用 KN 基提出一个非微扰拟自由弦场论的尝试，并提出一些需要进一步探讨的问题.

二、KN 弦的标架表述

考虑玻色闭弦在 D 维闵氏空间中的传播，弦的作用量与通常一样取为

$$S[x^\mu, h_{ij}] = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h}\, h^{jk}\partial_j x^\mu \partial_k x^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{1}$$

这里 Σ 为弦的(欧氏)世界面，即亏格为 g 的 Riemann 面，$\sigma^i(i=1,2)$ 为 Σ 上的局部坐标，h_{ik} 为 Σ 上的度量，$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$ 为 D 维背景空间的度量，$x^\mu(\mu=0,\cdots,D-1)$ 为 σ^i 的函数. 对于 KN 弦，要求所有的物理量都由 Σ 上具有两个分离极点的亚纯微分描述. 例如，$x^\mu(\sigma)$ 为 Σ 上的双极点亚纯函数，度量 $ds^2=h_{ij}d\sigma^i d\sigma^j$ 为 Σ 上的双极点亚纯二次微分，能量动量张量

$$T_{ik} = \frac{2\pi}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{ik}} = \partial_i x^\mu \partial_k x_\mu - \frac{1}{2}h_{ik}h^{lm}\partial_l x^\mu \partial_m x_\mu \tag{2}$$

也应为 Σ 上双极点亚纯二次微分的系数等等. 另一方面，对于 KN 弦存在在 Σ 上整体定义的(欧氏)时间 τ，以任一给定点 p_0 的参照点，点 p 的时间 $\tau(p)$ 由下式给出：

$$\tau(p) = \mathrm{Re}\int_{p_0}^{p} dk. \tag{3}$$

这里 dk 记 Σ 上第三类阿贝耳微分，$P_\pm$ 为其简单极点，留数分别为 ± 1，这样给出的 τ 是在 Σ 上很好定义的调和函数，其等值线是 Σ 上的闭迴路簇

$$c_\tau = \{Q\in\Sigma,\ \tau(Q)=\tau,\ \tau\in R\}. \tag{4}$$

$C_{\pm\infty}$ 为环绕 $P_\mp$ 的小迴路. 显然，这些迴路可看作是闭弦在 Σ 上的传播，其分叉与汇合描述弦的相互作用(若 $g>0$).

令 e_k 与 $e_{\bar k}$ 为与 dk, $d\bar k$ 对偶的亚纯向量场，则可定义正交基及其对偶标架 1 形式

$$e_\tau = e_k + e_{\bar k},\quad e_\sigma = i(e_{\bar k} - e_k),$$
$$\theta^a(e_b) = \delta^a_b,\quad (a, b = \tau, \sigma). \tag{5}$$

于是 Σ 上的度量应表为

$$ds^2 = (\theta^\tau)^2 + (\theta^\sigma)^2 = dk d\bar k, \tag{6}$$

弦的作用量可表为

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \partial x^\mu \bar\partial x^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{7}$$

式中

$$\partial = dk e_k,\quad \bar\partial = d\bar k e_{\bar k},\quad \partial + \bar\partial = d. \tag{8}$$

运动方程及约束条件则化为

$$\partial\bar{\partial}x^{\mu}=0, \tag{9}$$

$$T=2\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}\eta_{\mu\nu}=0,\quad \bar{T}=2\bar{\partial}x^{\mu}\bar{\partial}x^{\nu}\eta_{\mu\nu}=0. \tag{10}$$

这里T与$\bar{T}$分别为能量动量二次微分除$p_{\pm}$两点外的解析与反解析部分。

$$t=T_{ik}d\sigma^{i}d\sigma^{k}=T+\bar{T},$$

$$T=t_{kk}dkdk,\quad \bar{T}=t_{\bar{k}\bar{k}}d\bar{k}d\bar{k}. \tag{11}$$

弦x^{μ}的共轭动量为

$$\tilde{P}^{\mu}=\frac{1}{\pi}e_{\tau}x^{\mu}. \tag{12}$$

它的1形式P^{μ}定义为

$$\tilde{P}^{\mu}=-iP^{\mu}(e_{\sigma}). \tag{13}$$

所以P^{μ}为

$$P^{\mu}=\frac{1}{\pi}(\partial x^{\mu}-\bar{\partial}x^{\mu}). \tag{14}$$

能量动量T, $\bar{T}$又可表示为

$$T=\frac{1}{2}(dx+\pi P)^{2},\quad \bar{T}=\frac{1}{2}(dx-\pi P)^{2}. \tag{15}$$

KN基在$p_{\pm}$附近表示为[2]

$$\begin{aligned}
A_{i}(z_{\pm})&=a_{i}^{\pm}z_{\pm}^{\pm i-\frac{g}{2}}(1+O(z_{\pm})),\\
W_{i}(z_{\pm})&=b_{i}^{\pm}z_{\pm}^{\mp i+\frac{g}{2}-1}(1+O(z_{\pm}))dz_{\pm},\\
e_{i}(z_{\pm})&=c_{i}^{\pm}z_{\pm}^{\pm i-g_{0}+1}(1+O(z_{\pm}))\frac{\partial}{\partial z_{\pm}}\qquad \left(g_{0}=\frac{3}{2}g\right),\\
Q_{i}(z_{\pm})&=d_{i}^{\pm}z_{\pm}^{\mp i+g_{0}-2}(1+O(z_{\pm}))(dz_{\pm})^{2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

dk, $d\bar{k}$及其对偶的亚纯向量场e_{k}, $e_{\bar{k}}$与KN基的关系为

$$dk=W_{-\frac{g}{2}}(Q),\qquad d\bar{k}=\bar{W}_{-\frac{g}{2}}(Q),$$

$$e_{k}=e_{g_{0}}(Q)+\sum_{i>g_{0}}c_{i}e_{i}(Q),\quad e_{\bar{k}}=\bar{e}_{g_{0}}(Q)+\sum_{i>g_{0}}\bar{c}_{i}\bar{e}_{i}(Q), \tag{17}$$

式中c_{i}, $\bar{c}_{i}$可由 $dk(e_{k})=1$, $d\bar{k}(e_{\bar{k}})=1$ 确定。

由运动方程(9)及(14),可得x^{μ}, P^{μ}的模展开为

$$x^{\mu}=x^{\mu}+P^{\mu}\tau+\sum_{n\neq-\frac{g}{2}}x_{n}^{\mu}A_{n}(Q)+\bar{x}_{n}^{\mu}\bar{A}_{n}(Q),$$

$$P^{\mu}=\frac{P^{\mu}}{2\pi}(W_{-\frac{g}{2}}(Q)-\bar{W}_{-\frac{g}{2}}(Q))+\sum_{n\neq-\frac{g}{2}}P_{n}^{\mu}W_{n}(Q)-\bar{P}_{n}^{\mu}\bar{W}_{n}(Q). \tag{18}$$

x^{μ}与P^{ν}的对易关系为

$$[x^{\mu}(Q),P^{\nu}(Q')]=-i\eta^{\mu\nu}\Delta_{\tau}(Q,Q')\qquad Q,Q'\in c_{\tau}, \tag{19}$$

式中 $\Delta_{\tau}(Q,Q')$ 为KN基下的δ函数[1,2]

$$\Delta_{\tau}(Q,Q')=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n}A_{n}(Q)W_{n}(Q'),$$

$$f_{(Q)} = \oint_{c_\tau} f_{(Q')}\Delta_\tau(Q,Q'),\qquad df_{(Q)} = \oint_{c_\tau} df_{(Q')}\Delta_\tau(Q',Q). \tag{20}$$

由(18)—(20)式，可知

$$[x^\mu, P^\nu] = -i\eta^{\mu\nu},$$

$$[x_n^\mu, P_m^\nu] = \frac{1}{2\pi}\eta^{\mu\nu}\delta_{n,m},\quad [\bar{x}_n^\mu, \bar{P}_m^\nu] = \frac{1}{2\pi}\eta^{\mu\nu}\delta_{n,m}$$

$$(\text{注意归一化 } A_{-\frac{g}{2}}(Q) = i,\quad \bar{A}_{-\frac{g}{2}}(Q) = -i). \tag{21}$$

定义 α_n^μ, $\bar{\alpha}_n^\mu$ 为

$$dx^\mu + \pi P^\mu = \sum_n \alpha_n^\mu W_n(Q),\qquad dx^\mu - \pi P^\mu = \sum_n \bar{\alpha}_n^\mu \bar{W}_n(Q). \tag{22}$$

由(20)式，可知

$$dA_n(Q) = \sum_m r_{nm}W_m(Q),\qquad d\bar{A}_n(Q) = \sum_m \bar{r}_{nm}\bar{W}_m(Q), \tag{23}$$

式中

$$r_{nm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\tau}(dA_n)A_m,\quad \bar{r}_{nm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\tau'}}(d\bar{A}_n)\bar{A}_m. \tag{24}$$

注意，这里 $c_{\tau'}$ 的定向与 c_τ 的相反．由(18)，(22)和(23)式，有

$$\alpha_n^\mu = \pi P_n^\mu + \sum_m r_{mn}x_m^\mu,\quad \bar{\alpha}_n^\mu = \pi\bar{P}_n^\mu + \sum_m \bar{r}_{mn}\bar{x}_m^\mu. \tag{25}$$

由 P_n^μ, x_m^ν 的对易关系，可得 α_n^μ, $\bar{\alpha}_n^\mu$ 的对易子

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = \eta^{\mu\nu}R_{nm},\quad [\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = \eta^{\mu\nu}\bar{R}_{nm}. \tag{26}$$

式中

$$R_{nm} = \frac{1}{2}(r_{nm} - r_{mn}),\quad \bar{R}_{nm} = \frac{1}{2}(\bar{r}_{nm} - \bar{r}_{mn}). \tag{27}$$

由于 $T(\bar{T})$ 分别为 Σ 上除 $p_\pm$ 外全纯(反全纯)的亚纯二次微分，因此它总可以用相应的 KN 基展开为

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\Omega_n(Q),\quad \bar{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{L}_n\bar{\Omega}_n(Q). \tag{28}$$

又由(15)，(22)式，T 与 $\bar{T}$ 可表示为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\alpha_n\alpha_m W_n W_m,\quad \bar{T} = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_m\bar{W}_n\bar{W}_m. \tag{29}$$

所以 T, $\bar{T}$ 用 KN 基展开，其前面的系数 L_k, $\bar{L}_k$ 为

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{n,m} l_{nm}^k\alpha_n\alpha_m,\quad \bar{L}_k = \frac{1}{2}\sum_{nm}\bar{l}_{nm}^k\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_m, \tag{30}$$

式中

$$l_{nm}^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\tau} e_k(Q)W_n(Q)W_m(Q),\quad \bar{l}_{nm}^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\tau'}}\bar{e}_k(Q)\bar{W}_n(Q)\bar{W}_m(Q). \tag{31}$$

KN 证明[2]，利用(25)式及 Riemann-Roch 定理，可得

$$[L_i, L_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{ij}^s L_{i+j-s}, \quad [\bar{L}_i, \bar{L}_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} \bar{c}_{ij}^s \bar{L}_{i+j-s}. \tag{32}$$

由(10)式知 $T = 0$, $\bar{T} = 0$ 为 KN 弦的约束条件. 现在从(32)式知道该约束成 KN 代数,因此 KN 弦是带第一类约束的系统,它的量子化可由 BRST 程序进行.

三、KN 弦的 BRST 量子化

由 KN 弦的能量动量 2 形式整体表达式(15),按照 Fradkin 等人[8]给出的规则,T 与 $\bar{T}$ 的 BRST 鬼伙伴 T^g 与 $\bar{T}^g$ 应为

$$T^g = c\partial b + 2(\partial c)b, \quad \bar{T}^g = \bar{c}\bar{\partial}\bar{b} + 2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b}, \tag{33}$$

式中 $b(\bar{b})$ 为亚纯(反亚纯)二次微分,$c(\bar{c})$ 为亚纯(反亚纯)负一次微分(或称矢量场). 且 $b(\bar{b})$ 与 $c(\bar{c})$ 的反对易关系为

$$\{c_{(Q)}, b_{(Q')}\} = 2\pi i D_\tau(Q, Q'), \quad \{\bar{c}_{(Q)}, \bar{b}_{(Q')}\} = 2\pi i D_\tau(Q, Q'), \tag{34}$$

式中

$$D_\tau(Q, Q') = \frac{1}{2\pi i}\sum_n e_n(Q)\Omega_n(Q'), \quad \bar{D}_\tau(Q, Q') = \frac{1}{2\pi i}\sum_n \bar{e}_{n(Q)}\bar{\Omega}_{n(Q')}. \tag{35}$$

与此相应的 KN 弦 BRST 不变的作用量应为

$$S = \int_\Sigma (\partial x\bar{\partial} x + b\bar{\partial} c + \bar{b}\partial\bar{c}). \tag{36}$$

鬼的运动方程为

$$\bar{\partial} c = 0, \quad \bar{\partial} b = 0, \quad \partial\bar{c} = 0, \quad \partial\bar{b} = 0. \tag{37}$$

该方程的一般解为

$$c_{(Q)} = \sum_n c_n e_{n(Q)}, \quad b_{(Q)} = \sum_n b_n \Omega_{n(Q)},$$
$$\bar{c}_{(Q)} = \sum_n \bar{c}_n \bar{e}_{n(Q)}, \quad \bar{b}_{(Q)} = \sum_n \bar{b}_n \bar{\Omega}_{n(Q)}. \tag{38}$$

由(34)式,可得 $b_n(\bar{b}_n)$ 与 $c_n(\bar{c}_n)$ 的反对易关系为

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{nm}, \quad \{\bar{c}_n, \bar{b}_m\} = \delta_{nm}. \tag{39}$$

由文献[8],可以构造 KN 代数(32)式的经典幂零的 BRST 荷 Q 与 $\bar{Q}$ 为

$$Q = \sum_n L_n c_n - \frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{nm}^s b_{n+m-s} c_n c_m,$$
$$\bar{Q} = \sum_n \bar{L}_n \bar{c}_n - \frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_{s=-g_0}^{g_0} \bar{c}_{nm}^s \bar{b}_{n+m-s} \bar{c}_n \bar{c}_m. \tag{40}$$

取(30)式中的 α_n, $\alpha_m(\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_m)$ 为正规排列,量子化后的 KN 代数生成元及代数关系为[2]

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{nm} l_{nm}^k :\alpha_n\alpha_m:, \quad \bar{L}_k = \frac{1}{2}\sum_{nm} \bar{l}_{nm}^k :\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_m:,$$

$$
\begin{aligned}
&[L_n, L_m] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} c_{nm}^s L_{n+m-s} + DtK_{nm},\\
&[t, L_n] = 0,\\
&[\bar{L}_n, \bar{L}_m] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} \bar{c}_{nm}^s \bar{L}_{n+m-s} + D\bar{t}k_{nm},\\
&[\bar{t}, \bar{L}_n] = 0,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

式中 D 为时空维数(及 KN 弦的维数), $t(\bar{t})$ 为中心荷.

定义 KN 弦的真空态如下:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n^\mu|\hat{0}\rangle = \bar{\alpha}_n^\mu|\hat{0}\rangle = 0 \qquad n > \frac{g}{2},\\
&\langle\hat{0}|\alpha_n^\mu = \langle\hat{0}|\bar{\alpha}_n^\mu = 0 \qquad n < -\frac{g}{2},\\
&\langle\hat{0}|\hat{0}\rangle = 1.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

由 $T_{(Q)}|\hat{0}\rangle$, $\bar{T}_{(Q)}|\hat{0}\rangle$ 当 $Q \to p_+$ 及 $\langle\hat{0}|T_{(Q)}$, $\langle\hat{0}|\bar{T}_{(Q)}$ 当 $Q \to p_-$ 为有限要求,有

$$
\begin{aligned}
&L_n|\hat{0}\rangle = 0, \quad \bar{L}_n|\hat{0}\rangle = 0 \qquad n \geqslant g_0 - 1;\\
&\langle\hat{0}|L_n = 0, \quad \langle\hat{0}|\bar{L}_n = 0 \qquad n \leqslant -g_0 + 1.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

代替(43)式,定义 BRST 的 KN 弦的真空态为

$$
Q|0\rangle = 0, \quad \bar{Q}|0\rangle = 0. \tag{44}
$$

则由(43)、(44)式,可知 BRST 鬼的真空态为

$$
\begin{aligned}
&c_{g_0}|\tilde{0}\rangle_- = \bar{c}_{g_0}|\tilde{0}\rangle_- = 0, \quad b_{g_0}|\tilde{0}\rangle_+ = \bar{b}_{g_0}|\tilde{0}\rangle_+ = 0,\\
&c_{g_0}|\tilde{0}\rangle_+ = \bar{c}_{g_0}|\tilde{0}\rangle_+ = |\tilde{0}\rangle_-, \quad b_{g_0}|\tilde{0}\rangle_- = \bar{b}_{g_0}|\tilde{0}\rangle_- = |\tilde{0}\rangle_+,\\
&c_n|\tilde{0}\rangle_\pm = \bar{c}_n|\tilde{0}\rangle_\pm = 0 \qquad n < g_0 - 1,\\
&b_n|\tilde{0}\rangle_\pm = \bar{b}_n|\tilde{0}\rangle_\pm = 0 \qquad n \geqslant g_0 - 1, \quad n \neq g_0,\\
&|0\rangle = |\hat{0}\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle_\pm, \qquad \langle 0| = \langle\hat{0}| \otimes_\mp \langle\tilde{0}|,\\
&\langle 0|0\rangle = 1.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

式中 $|\tilde{0}\rangle_\pm$ 为鬼真空.

现在定义物理态

$$
\begin{aligned}
&|\phi\rangle = (\alpha_n^\mu + \bar{\alpha}_n^\mu)|\hat{0}\rangle \qquad n \leqslant \frac{g}{2};\\
&\langle\phi| = \langle\hat{0}|\alpha_n^\mu + \bar{\alpha}_n^\mu \qquad n \leqslant -\frac{g}{2}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

约束条件(10)式在量子化后变为

$$
(L_n + \bar{L}_n - (h + \bar{h})\delta_{n,g_0})|\phi\rangle = 0 \qquad n \geqslant g_0. \tag{47}
$$

量子化的哈密顿量 H 为

$$
H = L_{g_0}^t + \bar{L}_{g_0}^t - (h + \bar{h}), \tag{48}
$$

其中 $L_{g_0}^t$, $\bar{L}_g^t$ 为

$$
L_{g_0}^t = \{Q, b_{g_0}\}; \quad \bar{L}_{g_0}^t = \{\bar{Q}, \bar{b}_{g_0}\}. \tag{49}
$$

要求物理态为 BRST 不变的,则(47)式可用下式代替:

$$(Q+\bar{Q})|\phi\rangle=0. \tag{50}$$

此时 Q 与 $\bar{Q}$ 都是量子化的，它们为

$$Q=\sum_n L_n c_n-\frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_{s=-g_0}^{g_0} c^s_{nm}:b_{n+m-s}c_n c_m:-hc_{g_0},$$

$$\bar{Q}=\sum_n \bar{L}_n\bar{c}_n-\frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_{s=-g_0}^{g_0}\bar{c}^s_{nm}:\bar{b}_{n+m-s}\bar{c}_n\bar{c}_m:-h\bar{c}_{g_0}. \tag{51}$$

由文献[2,9]知道，若要求量子化后的 Q^2，$\bar{Q}^2$ 仍为零，则

$$D=26,\quad h=1,\quad \bar{h}=1. \tag{52}$$

因此 KN 弦包含引力子，这与 KN 弦为闭弦的物理图象符合。

四、KN 基与闭弦的拟自由场论

前面已经构造了 KN 弦的 BRST 荷，其形式与以前的 $g=0$ 的 BRST 荷[10]，只是在零模上有区别，$g=0$ 时为 c_0，b_0，L_0，而 g 亏格时为 c_{g_0}，b_{g_0}，L_{g_0}。因此，可以仿照 Siegel[7] 构造自由闭弦场论的方法，构造 g 亏格 Riemann 面的 BRST 弦场论。如引言所强调的，此时 $Q^{\pm}$ 为 g 亏格 Riemann 面上整体定义的，因此它含有相互作用。若以它构造 KN 弦二次量子化场论，则该场论自然包含了相互作用。然而，这样的场论不能完备地描述闭弦所有相互作用过程，因此称之为拟自由场论。

为了讨论方便，将 KN 弦的 BRST 荷重新表达为

$$Q^s=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\tau}\left\{c\left[\frac{1}{2}(\partial x+\pi p)^2+c\partial b+2(\partial c)b\right]\right.$$
$$\left.-\bar{c}\left[\frac{1}{2}(\partial x-\pi p)^2+\bar{c}\bar{\partial}\bar{b}+2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b}\right]\right\}. \tag{53}$$

Q^s 按 η_{g_0}，$\bar{\eta}_{g_0}$，ξ_{g_0}，$\bar{\xi}_{g_0}$ 展开为

$$Q^s=\eta_{g_0}H+\bar{\eta}_{g_0}\hat{H}+\xi_{g_0}(\hat{H}_+-\hat{H}_-)-\bar{\xi}_{g_0}(N_+-N_-)+\hat{Q}, \tag{54}$$

式中

$$\eta_{g_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{g_0}-\bar{c}_{g_0}),\quad \bar{\eta}_{g_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(b_{g_0}-\bar{b}_{g_0}),$$
$$\xi_{g_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(b_{g_0}+\bar{b}_{g_0}),\quad \bar{\xi}_{g_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{g_0}+\bar{c}_{g_0}); \tag{55}$$

H 为哈密顿量，

$$H=L_{g_0}+\bar{L}_{g_0}-2=\Box_g+N_g-2, \tag{56}$$

式中 $\Box_g$ 为 g 亏格 Riemann 面的对应于 $g=0$ 时的$\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的算子；N_g 为粒子数算符，$N_g=N_++N_-$；

$$\hat{H}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\tau}\frac{1}{2}(\partial c-\bar{\partial}\bar{c})(c+\bar{c})(\Omega_{g_0}-\bar{\Omega}_{g_0}),$$

$$N_+ - N_- = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau}(e_{g_0}+\bar{e}_{g_0})\Big[(\partial x)P + \frac{1}{2}(\partial c - \bar{\partial}\bar{c})(b-\bar{b}) + \frac{1}{2}(\partial b + \bar{\partial}\bar{b})(c+\bar{c})\Big],$$

$$H_+ - H_- = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau}\frac{1}{2}(\Omega_{g_0}+\bar{\Omega}_{g_0})[(\partial c - \bar{\partial}\bar{c})(c-\bar{c}) + (\partial c + \bar{\partial}\bar{c})(c-\bar{c})], \tag{57}$$

$\hat{Q}$ 为高模项。

定义一个 BRST 不变的算子 D 作为动力学算子，

$$D = \Big\{\xi_{g_0}\ \frac{1}{2}[\eta_{g_0},\bar{\eta}_{g_0}]_-, Q'\Big\}_+ = \xi_{g_0}(\eta_{g_0}H - \bar{\eta}_{g_0}\hat{H}) - \frac{1}{2}[\eta_{g_0},\bar{\eta}_{g_0}]_-(N_+ - N_-). \tag{58}$$

显然 D 为 BRST 不变的，

$$\delta_B D = i\varepsilon[Q', D]_- = 0. \tag{59}$$

KN 弦拟自由场论的作用量为

$$S = \int dx\,dc\,d\bar{c}\,d\eta_{g_0}d\xi_{g_0}\ \frac{1}{2}\Phi D\Phi. \tag{60}$$

注意，这里 dc, $d\bar{c}$ 不包含 $d\eta_{g_0}$, $d\xi_{g_0}$ 部份． Φ 为 x, c, $\bar{c}$, b, $\bar{b}$ 的泛函 $\Phi=\Phi_{[x,c,b,\bar{c},\bar{b}]}$，它按 η_{g_0}, ξ_{g_0} 展开为

$$\Phi = \phi + i\eta_{g_0}\psi + i\xi_{g_0}\hat{\psi} + i\xi_{g_0}\eta_{g_0}\hat{\phi}, \tag{61}$$

式中 ϕ 为玻色场；ψ 为费密场；$\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$ 分别为费密、玻色辅助场.

把(58)、(61)式代入(60)式，得 KN 弦拟自由场论作用量为

$$S = \int dx\,dc\,d\bar{c}\Big[\frac{1}{2}\phi H\phi + \frac{1}{2}\psi\hat{H}\psi + i\hat{\psi}(N_+ - N_-)\psi - \hat{\phi}(N_+ - N_-)\phi\Big]. \tag{62}$$

S 对辅助场 $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$ 的变分导出 ϕ, ψ 的约束，

$$(N_+ - N_-)\phi = 0,\quad (N_+ - N_-)\psi = 0. \tag{63}$$

这个约束正是闭弦的驻波条件.

由文献[7]可知，当取零质量近似(62)式拉氏量可写为

$$L = \frac{1}{4}h^{ab}\Box_g h_{ab} - \frac{1}{2}\eta\Box_g\eta - ic^a\Box_g c_a + \frac{1}{2}B^a\Box_g B_a, \tag{64}$$

式中 h_{ab} 为引力场.

到此，已经利用 KN 基的特点，仿照 Siegel[7] 的方法，构造了闭弦的拟自由场论. 这里相互作用的多圈图的每一级微扰都可以当作一个独立的 KN 闭弦系统处理. 除了亏格数不同所引起的差异外，形式上与自由闭弦场论是一致的. 这一形式上的一致性，为 KN 弦的非微扰的理论提供了可能.

五、非微扰拟自由闭弦场论

由于闭弦的每一级微扰都是一个相互独立的系统，构成亏格数 g 不同的 Riemann 面. $g=0$ 对应于闭弦的树图，$g=1$ 对应于闭弦的一圈图，$g=N$ 对应于闭弦的 N 圈图. 由 Krichever 与 Novikov 的工作[1,2]，知道亏格数 g 不同的 Riemann 面上的弦，用不同亏格的 KN 基表示. 又由 Riemann-Roch 定理限制不同亏格的 KN 基相互之间不存在互换，因此不同亏格的 BRST 荷是相互独立的.

根据以上的一些考虑，引入作用量 S 为

$$S=\frac{1}{2\pi}\int_{\{\Sigma\}}\partial x^{\mu}\bar{\partial}x^{\nu}\eta_{\mu\nu}, \tag{65}$$

式中

$$\{\Sigma\}=\sum_{g=0}^{\infty}\Sigma_g,\quad \partial x^{\mu}=\sum_{g=0}^{\infty}dk_g e_{k_g}x_g^{\mu},$$

$$\bar{\partial}x^{\mu}=\sum_{g=0}^{\infty}d\bar{k}_g\bar{e}_{k_g}x_g^{\mu}. \tag{66}$$

动量 P^{μ} 为

$$P^{\mu}=\sum_{g=0}^{\infty}P_g^{\mu}. \tag{67}$$

则 x^{μ} 与 P^{ν} 的对易关系

$$[x^{\mu},P^{\nu}]=-i\eta^{\mu\nu}\Delta_{\tau}(Q,Q')\qquad Q,Q'\in\{\Sigma\}, \tag{68}$$

式中

$$\Delta_{\tau}(Q,Q')=\sum_{g=0}^{\infty}\Delta_{\tau_g}(q,q')\qquad q,q'\in c_{\tau_g}. \tag{69}$$

定义真空态为

$$|0\rangle=\prod_{g=0}^{\infty}\otimes|0\rangle_g,\quad\langle 0|0\rangle=1. \tag{70}$$

物理态的定义为

$$|\phi\rangle_g=(\alpha_n^{\mu}+\bar{\alpha}_n^{\mu})|0\rangle\qquad n\leqslant 0,\ \left(n=n_g-\frac{g}{2}\right),$$

$${}_g\langle\phi|=\langle 0|\alpha_{n'}^{\mu}+\bar{\alpha}_{n'}^{\mu}\qquad n'\geqslant 0,\ \left(n=n_g+\frac{g}{2}\right),$$

$$|\phi\rangle=\prod_{g=0}^{\infty}\otimes|\phi\rangle_g. \tag{71}$$

BRST 荷为

$$Q'=\sum_{g=0}^{\infty}Q_g'. \tag{72}$$

物理态 BRST 不变的约束条件为

$$Q'|\phi\rangle = 0. \tag{73}$$

因此相应的动力学算子 D 为

$$D = \sum_{g=0}^{\infty} D_g. \tag{74}$$

定义非微扰弦场论的积分测度为

$$\int \mathscr{D}x\mathscr{D}c\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\eta\mathscr{D}\xi = \int \prod_{g=0}^{\infty} dx_g dc_g d\bar{c}_g d\eta_{g_0} d\xi_{g_0}. \tag{75}$$

定义正交归一性为

$$_g\langle\phi|\phi\rangle_{g'} = \int dx_g dc_g d\bar{c}_g d\eta_{g_0} d\xi_{g_0} \phi_g \phi_{g'} = \delta_{gg'}. \tag{76}$$

最后得到非微扰拟自由闭弦场论的作用量为

$$S = \int \mathscr{D}x\mathscr{D}c\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\eta\mathscr{D}\xi \frac{1}{2} \Phi D\Phi. \tag{77}$$

这样，利用 KN 基构造了一个拟自由闭弦的非微扰场论.

应该说明的是，这里构造的非微扰弦场论，并不包含弦的初态与终态数目不同的相互作用. 这是因为 KN 基是一个只有二极点的基，一根 g 亏格的 KN 弦如何分解为 2 根亏格分别为 g_1，g_2 的 KN 弦，或者说 2 根亏格分别为 g_1，g_2 的 KN 弦如何结合为亏格为 g 的弦，这类应由 KN 弦之间的相互作用所描述的机制目前尚不清楚. 研究 KN 弦如何粘接，或者考虑 Riemann 面上多极点亚纯向量场的代数结构，或许有助于这些问题的解决.

就此而言，如何由本文所给出的闭弦的拟自由场论及其非微扰形式出发，得到闭弦相互作用场论及其非微扰形式的完备描述，显然是值得进一步探讨的. 这或许可以为 Friedan 和 Shenker 的工作[11]，(一种非微扰方案)提供一条可行的途径.

作者感谢戴元本教授的有益讨论. 作者之一(徐开文)感谢汪容教授的关心和支持.

[1] Z. M. Krichever and S. P. Novikov, *Funk. Anal. i. Pril.*, **21**(1987), 46.
[2] Z. M. Krichever and S. P. Novikov, *Funk. Anal. i. Pril.*, **21**(1987), 47.
[3] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **130B**(1981), 207.
[4] C. S. Huang and Z. Y. Zhao, Krichever-Novikov Algebras and String Theories on Group Mamifolds, preprint AS-ITP-88-043.
D. H. Chang, "The Krichever-Novikov Operater Formalism of Superstring" to appear in Phys. Lett. B.
[5] L. Bonora. A. Lugo, M. Matone and J. Russo "A Global Operator Fomalism on Higher genus Riemann Surfaces. b-c Systems" preprint SISSA 67/88/EP, to appear in Comm. Math. Phys.
[6] A. Lugo and J. Russo, "Hamiltonian Formulation and Scattering Amplitudes in String Theory at Genus g" Preprint SISSA 83/88/EP.
[7] W. Siegel, *Phys. Lett.*, **151B**(1985), 396.
[8] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovicky, *Phys. Lett.*, **55B**(1975), 224.
[9] L. Bonora, M. Bregola, P. Cotta-Ramusino and M. Martellini. *Phys Lett.*, B205(1988), 53.
[10] J. H. Schwarz, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, No. **86**(**1986**), 70.
[11] D. Friedan and S. Shenker, *Nucl. Phys.*, **B281**(1987), 509.

BRST QUANTIZATION AND QUASI-FREE FIELD THEORY FOR THE KRICHEVER-NOVIKOV STRING

XU KAI-WEN

Zhejiang University, Hangzhou

GUO HAN-YING

Institute of Theoretical Physics of Academia Sinica

(Received 1 February 1989)

ABSTRACT

Based on the BRST quantization, a quasi-free field theory for the Krichever-Novikov string on arbitrary genus Riemann surface has been given in analog to the Siegel approach to free closed string field theory. A non-purtubative formalism has also been suggested.