第 38 卷 第 8 期
1989 年 8 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 38, No. 8
Aug., 1989

研究简报

粘弹性阻尼对弹性杆内纵向孤波运动的影响*

颜家壬　　　邹凤梧
湘潭大学物理系　　华中理工大学物理系

1988 年 2 月 23 日收到

本文用微扰论的计算方法，求出在粘弹性阻尼较小但不可忽略的情况下，弹性杆内纵向孤波的形状、速度及能量随时间的变化规律．结果表明，粘弹性阻尼使孤波逐渐变矮、增宽、速度减慢，能量逐渐耗散，最后导致孤波的消失．

一、引　　言

文献[1]研究了均匀弹性杆中非线性波的传播，导出了杆内纵向应变波所满足的非线性波动方程——广义 Korteweg-de Vries-Burgers 方程，

$$u_t + u^{n-1}u_x + \mu u_{xxx} = \delta u_{xx}, \tag{1}$$

式中

$$x = \frac{2}{c_0}(X - c_0 T),\ t = \alpha T \tag{2}$$

T, X 分别代表时、空坐标；用 $U(x, t)$ 表示杆的纵向位移，则 $u = U_X$ 代表应变；下标表示对该变量求导；$\mu = 4\beta/\alpha c_0^2$; $\delta = 2\gamma/\alpha c_0^2$; $\alpha = na_n$; $\beta = \nu^2 k^2$; $\gamma = E'/\rho$; $c_0^2 = E/\rho$; E 为杆的弹性模量；ρ 为线密度（单位杆长的质量）；a_n 与 n 为材料常数；$\alpha > 0$ 称为硬非线性，$\alpha < 0$ 称为软非线性；E' 为法向粘性系数；ν 为 Poisson 比；k 为截面极回转半径；c_0 称为零频率线性波的相速度．

对多数材料，宜取 $n = 3$[1]，为确定起见，本文仅考虑硬非线性材料的情形．（软非线性材料可仿此处理．）此时，$\alpha > 0$，故 $\mu > 0$．再作变量替换

$$x \to \sqrt{\mu}\, x,\quad t \to \sqrt{\mu}\, t,\quad u \to \sqrt{6}\, u,$$

于是(1)式化为含微扰的 MKdV 方程

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = \varepsilon u_{xx}, \tag{3}$$

式中 $\varepsilon = \delta/\sqrt{\mu}$．方程(1)与(3)等号右端为线性粘弹性阻尼的贡献，左端第三项来自横向惯性所引起的应力．

当忽略耗散时，$\varepsilon = 0$，(3) 式还原为通常的 MKdV 方程，这时杆内可有纵向传播的稳定孤波，这一点文献[1]已经作了讨论．本文研究当耗散较小 ($\varepsilon \ll 1$) 但不可忽略

* 国家自然科学基金资助的课题．

时，它对孤波运动的影响．此时可将(3)式看作含微扰 εu_{xx} 的 MKdV 方程，因而可用微扰论的方法进行处理．

二、含微扰的 MKdV 方程

文献[2—8]研究了含微扰时 KdV 方程及非线性 Schrödinger 方程的微扰解法．不难将其推广应用于 MKdV 方程，而且在方法上略作改进和简化．含微扰的 MKdV 方程的一般形式为

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u), \tag{4}$$

式中 ε 为小参数 $(\varepsilon \ll 1)$；$R(u)$ 为 u 及其对 x 与 t 的导数的某已知函数．方程 (4) 也可以表为算子形式

$$L_t + [L,\ A] = \varepsilon R, \tag{5}$$

式中

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & -iu \\ iu & 0 \end{pmatrix},\quad L_t = \begin{pmatrix} 0 & -iu_t \\ iu_t & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$A = -4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d^3}{dx^3} + 6\begin{pmatrix} -u^2 & iu_x \\ iu_x & -u^2 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + 3\begin{pmatrix} -2uu_x & iu_{xx} \\ iu_{xx} & -2uu_x \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -iR(u) \\ iR(u) & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$[L,\ A] \equiv LA - AL$ 表示对易子．

首先考察无微扰的情形．令 $\varepsilon = 0$，(5) 式化为通常的 MKdV 方程

$$L_t + [L,\ A] = 0. \tag{9}$$

它就是方程组(10)和(11)的相容性条件

$$Lv = \lambda v,\quad \lambda = iK, \tag{10}$$

$$v_t = Av. \tag{11}$$

本征值问题方程(10)具有连续谱 K = 实数，其相应的本征函数 (Jost 解) 描述散射态，它们满足如下渐近条件：

$$\varphi(x,\ K,\ t) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-iKx}, \tag{12}$$

$$\psi(x,\ K,\ t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iKx}. \tag{13}$$

此外，(10)式也可以具有离散谱 $K = K_n = ik_n$ (虚数)，其相应的本征函数 $\varphi(x, K_n, t)$ 描述束缚态．

从逆散射法的理论可知[8]，当 $u(x,\ t)$ 代表孤波时，(10) 式的解之间有如下简单关系：

$$\varphi(x,\ K,\ t) = a(K)\tilde{\psi}(x,\ K,\ t), \tag{14}$$

$$\varphi(x,\ K_n,\ t) = b_n(t)\psi(x,\ K_n,\ t), \tag{15}$$

式中

$$\tilde{\phi}(x, K, t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(x, -K, t). \tag{16}$$

为了下面引用，写出与单孤波解有关的结果[8].

$$a(K) = \frac{K - ik}{K + ik} \quad k > 0, \tag{17}$$

$$\varphi(x, K, t) = \frac{e^{-iKx}}{K + ik} \begin{pmatrix} \mp k\mathrm{sech}z \\ K - ik\tanh z \end{pmatrix}, \tag{18a}$$

$$\phi(x, K, t) = \frac{e^{iKx}}{K + ik} \begin{pmatrix} K + ik\tanh z \\ \pm k\mathrm{sech}z \end{pmatrix}, \tag{18b}$$

$$\varphi(x, ik, t) = \frac{e^{kx}}{2} \mathrm{sech}z \begin{pmatrix} \pm i \\ e^{-z} \end{pmatrix}, \tag{19a}$$

$$\phi(x, ik, t) = \frac{e^{-kx}}{2} \mathrm{sech}z \begin{pmatrix} e^{z} \\ \mp i \end{pmatrix}, \tag{19b}$$

$$z = 2k[x - \xi(t)], \quad \xi(t) = \xi_0 + 4k^2 t, \tag{20}$$

$$b \equiv b_1(t) = \pm ie^{2k\xi(t)}. \tag{21}$$

相应的单孤波解为

$$u(x, t) = \pm 2k\mathrm{sech}z. \tag{22}$$

(18)—(22)式中，上、下两符号分别相应于拉伸和压缩孤波.

现在讨论方程(5)的微扰解法. 将(10)式对 t 求导，并利用(5)式得

$$(L - \lambda)\phi = Gv, \tag{23}$$

式中

$$\phi = v_t - Av, \tag{24}$$

$$G = \begin{cases} \lambda_t I - \varepsilon R & \text{束缚态;} \\ -\varepsilon R & \text{散射态,} \end{cases} \tag{25}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 为单位矩阵.}$$

按照通常的做法，首先应将方程(23)等号右端的 v 取为散射态波函数，即令

$$v = h(t)\varphi(x, K, t).$$

然后采用极限过渡 $K \to ik$ 到束缚态，从而求出 k, ξ 对 t 的依赖. 在一般情况下，由于微扰的影响，k 将不再是常数，ξ 与 z 对 t 的依赖将不同于(20)式. 这正是要寻求的微扰所带来的修正. 在本文中，将 v 直接取为束缚态本征函数，这样可以省去极限过渡的麻烦从而使计算简化. 为此，令 $v = h(t)\varphi(x, ik, t)$，则按定义(24)式

$$\phi = h_t\varphi(x, ik, t) + h\varphi_t(x, ik, t) - hA\varphi(x, ik, t), \tag{26}$$

注意到当 $x \to -\infty$ 时，$A \to -4\frac{d^3}{dx^3}$，$\varphi(x, ik, t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{kx}$，$\varphi_t(x, ik, t) \to 0$，则

$$\phi \xrightarrow[x\to-\infty]{} (h_t + 4k^3h)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{kx}. \tag{27}$$

令 ϕ 满足边界条件 $\phi \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$，即可得

$$h(t) = h(0)e^{-4k^3t}. \tag{28}$$

而当 $x \to +\infty$ 时，

$$\varphi(x, ik, t) = b\phi(x, ik, t) \to b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-kx},$$

$\varphi_t(x, ik, t) \to 0$，则

$$\phi \xrightarrow[x\to+\infty]{} h(t)(b_t - 8k^3b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-kx}. \tag{29}$$

另一方面，可用拉氏常数变异法求解(23)式．已知与(23)式相应的齐次方程的一个特解为

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \varphi(x, ik, t) = b\phi(x, ik, t) \\ &= \frac{e^{kx}}{2}\operatorname{sech}z\begin{pmatrix}\pm i\\e^{-z}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

另一线性无关特解可由如下线性组合而得到：

$$g(x,t) = \lim_{K\to ik}\frac{1}{a(K)}[\varphi(x, K, t) - b(t)\phi(x, K, t)].$$

此为 0/0 型的未定式，可按洛必达法则求得．如果用圆点表示对 K 求导，则

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \lim_{K\to ik}\frac{\dot\varphi - b\dot\phi}{\dot a} \\ &= -2ikxe^{kx}\operatorname{sech}z\begin{pmatrix}\mp 1\\ie^{-z}\end{pmatrix} \mp e^{kx}\begin{pmatrix}ie^{-z}\\\mp 1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{31}$$

按拉氏常数变异法，令

$$\phi = \alpha(x, t)g(x, t) + \beta(x, t)f(x, t), \tag{32}$$

则方程(23)式化为

$$Q\alpha_x g + Q\beta_x f = Gv, \quad Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}. \tag{33}$$

将(33)式等号两端分别左乘 $\hat f^T$ 与 $\hat g^T$，并注意到 $\hat f^TQf = 0$，$\hat g^TQg = 0$．不难得到

$$\alpha_x = \frac{\hat f^TGv}{\hat f^TQg} = h(t)\frac{\hat f^TGf}{\hat f^TQg}, \tag{34a}$$

$$\beta_x = \frac{\hat g^TGv}{\hat g^TQf} = -h(t)\frac{\hat g^TGf}{\hat f^TQg}, \tag{34b}$$

式中 $\hat\varphi = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\varphi$，$T$ 代表转置．直接计算即可得到

$$\hat f^TQg = \mp ie^{2k\xi(t)} = -b. \tag{35}$$

于是(34)式化为

$$\alpha_x = -\frac{h(t)}{b}\hat{f}^T G f, \quad \beta_x = \frac{h(t)}{b}\hat{g}^T G f, \tag{36}$$

代入(32)式，得

$$\phi = \frac{h(t)}{b}\left[f(x, t)\int_{-\infty}^{x} dx'\hat{g}^T G f - g(x, t)\int_{-\infty}^{x} dx'\hat{f}^T G f\right]. \tag{37}$$

于是

$$\begin{aligned}\phi \xrightarrow[x\to+\infty]{} & h(t)e^{-kx}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty} dx\hat{g}^T G f \\ & - h(t)\left[4kx e^{-kx}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{b}e^{kx}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\int_{-\infty}^{\infty} dx\hat{f}Gf.\end{aligned} \tag{38}$$

比较(29)与(38)式,即可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\hat{f}^T G f = 0, \tag{39}$$

$$b_t - 8k^3 b = \int_{-\infty}^{\infty} dx\hat{g}^T G f. \tag{40}$$

注意到对于束缚态 $G = \lambda_t I - \varepsilon R = -k_t I - \varepsilon R$, 则从(39),(40)式不难得出

$$k_t = \frac{\varepsilon}{2i}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx R(u)[f_1 f_1 - f_2 f_2]}{\int_{-\infty}^{\infty} dx f_1 f_2}, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} b(2k\xi_t + 2\xi k_t - 8k^3) = & -k_t\int_{-\infty}^{\infty} dx(f_1 g_2 + f_2 g_1) \\ & - i\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} dx R(u)(f_1 g_1 - f_2 g_2).\end{aligned} \tag{42}$$

最后,将 f, g 的表式(30),(31)代入(41),(42)式中,不难直接算出

$$k_t = \pm\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,\mathrm{sech}\,z\,dz, \tag{43}$$

$$k\xi_t - 4k^3 = \pm\frac{\varepsilon}{4k}\int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,z\,\mathrm{sech}\,z\,dz. \tag{44}$$

如将已知的 $R(u)$ 代入(43)和(44)式,即可求出 k 和 ξ 随时间演化的规律.

三、粘弹性阻尼对孤波运动的影响

从(22)式可算出微扰项为

$$\varepsilon R(u) = \varepsilon u_{xx} = \mp\varepsilon 8k^3(1 - \sinh^2 z)\mathrm{sech}^3 z. \tag{45}$$

将(45)式代入(43)式,经过简单计算,得

$$k_t = -\frac{8}{3}\varepsilon k^3. \tag{46}$$

对 t 积分一次,不难解出

$$k(t)=k(0)\Big/\left[1+\frac{16}{3}\varepsilon k^2(0)t\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{47}$$

从(45)式看出，$R(u)$ 为 z 的偶函数．故(44)式等号右端为零．于是方程(44)化为

$$\xi_t=4k^2=4k^2(0)\left[1+\frac{16}{3}k^2(0)\varepsilon t\right]^{-1}. \tag{48}$$

积分得

$$\xi(t)=\frac{3}{4\varepsilon}\ln\left[1+\frac{16}{3}\varepsilon k^2(0)t\right]+\xi(0). \tag{49}$$

将(47)与(49)式所求出的 $k(t)$ 与 $\xi(t)$ 代入孤波的表式，得到

$$u(x,\ t)=\pm\ 2k(t)\text{sech}2k(t)[x-\xi(t)]. \tag{50}$$

从(47)，(48)—(50)式不难具体看出，粘弹性阻尼对孤波运动的影响．讨论如下：

1. 孤波的高度 $2k(t)$ 将按(47)式的规律随时间而衰减，而宽度 $[2k(t)]^{-1}$ 则随时间逐渐增大．孤波将逐渐变矮、增宽，直至最后消失．

2. 孤波中心的传播速度 ξ_t 将按(48)式的规律逐渐减慢．

3. 无耗散时 $\varepsilon=0$，哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}u^4-\frac{1}{2}u_x^2.$$

孤波能量为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}u^4-\frac{1}{2}u_x^2\right)dx. \tag{51}$$

将无微扰时孤波的表式(22)代入(55)式，并注意此时 $k(t)=k(0)$ 为常数，则

$$E=\frac{8}{3}k^3(0)=\text{常数}. \tag{52}$$

故 E 为守恒量．如存在耗散，$\varepsilon\neq 0$，则必须将(50)式代入(51)式．此时

$$E=\frac{8}{3}k^3(t)=\frac{8}{3}k^3(0)\left[1+\frac{16}{3}\varepsilon k^2(0)t\right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{53}$$

即粘弹性阻尼使孤波的能量逐渐耗散直至为零．

4. 从(47)和(49)式清楚地看出，当忽略粘弹性阻尼时（$\varepsilon\to 0$），(50) 式还原为稳定传播的纵向孤波．

$$u(x,\ t)=\pm\ 2k(0)\text{sech}2k(0)[x-4k^2(0)t]. \tag{54}$$

最后，关于微扰对孤波形状的微小修正，在文献[6，7]中已有详细讨论．本文不再赘述．

[1] 朱位秋，固体力学学报，(2)(1980)，247.
[2] V. I. Karpman and E. M. Maslov, *Phys. Lett.*, 60A(1977), 307.
[3] V. I. Karpman and E. M. Maslov, Inverse Problem Method for the Perturbed Nonlinear Schrodinger Equation, 61A(1977), pp. 355—357.
[4] V. I. Karpman and E. M. Maslov, *Sov. Phys. JETP*, 46(1978), 281.
[5] D. J. Kaup and A. C. Newell, *Proc. Roy Soc. Lond. A*, 361(1978), 413.
[6] V. I. Karpman, *Phys. Scr.*, 20(1979), 462.

[7] G. L. Lamb, Jr., Elements of Soliton Theory, New York, (1980), pp. 259—278.
[8] *ibid.*, pp. 99—107; 134—143.

THE INFLUENCE OF VISCOUS ELASTIC DAMPING ON THE LONGITUDINAL SOLITARY WAVES IN AN ELASTIC ROD

YAN JIA-REN

Xiangtan University

ZOU FENG-WU

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan

(Received 23 February 1988)

ABSTRACT

We obtained the time dependence of the transverse profile, velocity and energy of longitudinal solitary waves in an elastic rod, in the case for which the viscoelastical damping is small but cannot be neglected, by using the method of perturbation. The results showed that owing to the presence of viscoelastical damping, the height and velocity of solitary wave diminish, while the width increases with time and the energy dissipates gradually until it disappears.