

逆轨道分析法确定一维映象的拓扑熵

陈 瑞 熊

广西师范大学物理系

1988 年 11 月 14 日收到

本文推广了文献 [1] 的工作,并用逆轨道分析法说明了本文所列公式的证明. 据此可以算出整个参数区间中任一点上的拓扑熵值. 在讨论“*”乘对拓扑熵值影响的基础上得到了一维映象拓扑熵的整体印象.

一、引 言

为了描述动力系统的各态历经性质,有三个概念是经常被讨论的,它们是李亚普诺夫指数、测度熵和拓扑熵. 本文讨论的拓扑熵虽然基本上不能给出吸引子的任何信息,但是 1) 它给予了很重要却难以计算的测度熵、李亚普诺夫指数以一个普遍的限制; 2) 它可指出动力系统对外界噪声的灵敏度; 3) 它只与映象的拓扑性质有关而与映象函数的具体性质无关.

在文献 [1] 中,我们从拓扑熵 $h(f)$ 和逆轨道总数 $N(n)$ 与求逆轨道次数 n 之间的关系

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log N(n)/n \quad (1)$$

出发,用数值计算方法对倍周期区、 U 序列中 $RL^a R^b$ 所对应的周期点以及带与带交界处进行逆轨道计数. 通过分析、归纳,确定了这些地方 $N(n)$ 随 n 变化的递推关系式; 并且根据从图形结构找出的逆轨道生成关系,结合数学归纳法证明了这些递推关系式,进而求得了这些地方的拓扑熵. 本文将在此基础上把问题推广到一般情况,以期得到整个参数区间中任一点处的拓扑熵.

二、参数区间中任一点上的递推公式

首先,讨论由 $MSS^{[2]}$ 规则所刻划的 U 序列上的情况. 先介绍改写后的 logistic 映象 $f(x) = (2\mu - 1) - 2\mu x^2$ 的数值计算结果: 对于由字母 R, L 所构成的“字”

$$RL^{a_1} R^{b_1} L^{a_2} R^{b_2} L^{a_3} R^{b_3} L^{a_4} R^{b_4} \dots,$$

当 n 大于该“字”所对应的周期数 m 时,其逆轨道的递推公式可表示为

$$\begin{aligned} N(n) = & 2m \pm N(n-m) + 2[N(n-2) + \dots + N(n-(a_1+1))] \\ & \pm 2[N(n-(a_1+b_1+2)) + \dots + N(n-(a_1+b_1+a_2+1))] \\ & \pm 2[N(n-(a_1+b_1+a_2+b_2+1)) + \dots \\ & + N(n-(a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+1))] \end{aligned}$$

$$\pm 2[N(n - (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + 1)) + \dots + N(n - (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 + 1))] \pm \dots \quad (2)$$

式中等号右端第一个“±”号取决于“字”中R的总数S,当S为奇数时取正号;S为偶数时取负号.如果把(2)式和对应的“字”作比较的话,不难体会到从第三项开始方括号内的项数依次和字母L的上标存在着对应相等的关系,而每一个方括号内的第一项中位于n之后前面冠以负号的括号内的量即对应L^{a_i}前R,L字母的总数加1,所以可以把每一个方括号直观地理解是由与之对应的L^{a_i}所引起的,而它前面的符号却是由L^{a_i}前R的总数所决定.当L^{a_i}前R的总数S_i为奇数时取正号;S_i为偶数时则取负号,和第一个“±”号的确定有相似之处.在L^{a_i}前只有一个R所以它所对应的第三项前恒取正号.上述确定符号的方法和判断U序列中具有相同前缀P*的二个“字”,

$$P_1 = P^* \mu_1 \dots; P_2 = P^* \mu_2 \dots$$

大小时,其结果和P*中R奇偶性有关的道理是一致的.

若 a₂ = 0, 它对应于系列 RL^{a₁}R^{b₁}. (2)式退化为

$$N(n) = 2m \pm N(n - m) + 2[N(n - 2) + N(n - 3) + \dots + N(n - (a_1 + 1))]. \quad (3)$$

此式及其符号规律已在文献[1]中得到了讨论和证明(那时记为 RL^aR^b).

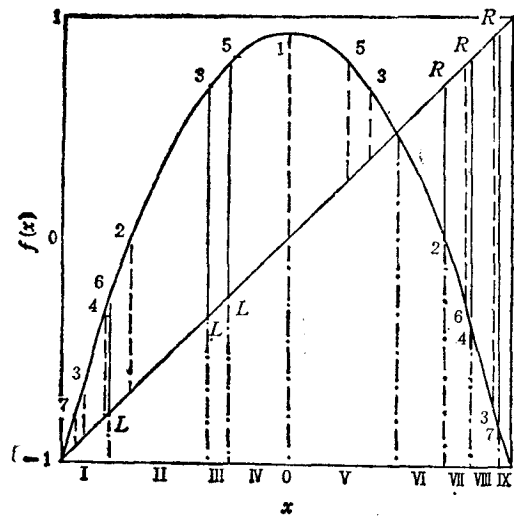


图1 RL²RLR按正轨道(直线所示)的区间划分(点划线所示)及其前7次的部分逆轨道(虚线所示,与正轨道重合的则被直线覆盖,以数字记求逆轨道次数)按MSS规则标出R,L

$$N(n) = 2 \times 7 + N(n - 7) + 2[N(n - 2) + N(n - 3) - 2N(n - 5)] \quad (n > 7) \quad (4)$$

的正确性.将它推广到b₂为奇数, b₂ = 2k + 1 (k为自然数)的情况,同样可以根据图形写出对应的逆轨道生成定量关系式再用数学归纳法就能证明(2)式对应于 RL^aRLR^{2k+1}的形式

采用文献[1]所介绍的方法按照 a, b 下标 i 的顺序先证明 i = 2 时(2)式的相应形式成立. 由于在 RL^aR^bL^a 和 RL^aR^bL^aR^b 的递推公式之间除

$$N(n - m)$$

项前的符号可能不同外其余均具有相同的形式. 不失一般性,先讨论 RL²RLR^b 的情况. 当 b₂ = 1 时,该“字”对应 m = 7 周期,将区间(-1, 0), (0, 1)按其正轨道划分成如图1那样的9个区间(以罗马字记之),从图中看到每个区间中逆轨道来自和去向的区间,据此可写出逆轨道生成的定量关系式. 当 n = 8 时,其结果固然可以从数值计算得到,但也可以从较为详细的图中直接看出,然后利用数学归纳法和定量关系式证明 n 为任意数时其对应的递推公式

$$N(n) = 2m + N(n-m) + 2[N(n-2) + N(n-3)] - 2N(n-5) \quad (n > m). \quad (5)$$

反复运用上述方法便得到 $RL^{a_1}R^{b_1}L^{a_2}R^{b_2}$ 序列的递推公式

$$N(n) = 2m \pm N(n-m) + 2[N(n-2) + \dots + N(n-(a_1+1))] \pm 2[N(n-(a_1+b_1+2)) + \dots + N(n-(a_1+b_1+a_2+1))] \quad (n > m), \quad (6)$$

再借图形结构和数学归纳法就可以推广(6)式到 i 为任意情况的(2)式。

对于混沌点(2)式将显得无能为力,但是发现在刻划它们的“字”后面经常有一个由有限字母组成的无限循环。对此,可先视其为有限,写出相应的递推公式,然后将其推广到无限并消去其中的循环部分后就可以得到对应于不同具体情况的长度有限的递推公式。以 RLR^∞ , $RL(LR)^\infty$ 和 $RL^2(RLR)^\infty$ 为例,采用上述手续后可得到它们的递推公式分别为

$$N(n) = N(n-1) + 2[N(n-2) - N(n-3)] - 2 \quad (n > 3); \quad (7)$$

$$N(n) = N(n-1) + N(n-2) + N(n-3) - 2N(n-5) + 4 \quad (n > 5); \quad (8)$$

$$N(n) = N(n-1) + 2N(n-2) + N(n-3) - 3N(n-4) - 4N(n-5) + 2N(n-6) + 2N(n-7) \quad (n > 7). \quad (9)$$

(7)–(9) 式等号右端最后一项常数可通过作图或简单的数值计算而得到,它的大小与求拓扑熵无关。

三、拓扑熵的值和“*”乘对它的影响

如果仅需求拓扑熵的值,那么根据它的定义(1)式,只要考虑 $n \rightarrow \infty$ 时 $N(n)$ 呈 α^n 的指数形式解。在讨论 $RL^{a_1}R^{b_1}$ 序列时,就从它的递推公式得到它的特征多项式^[1]

$$\alpha^m - 2[\alpha^{(m-2)} + \alpha^{(m-3)} + \dots + \alpha^{(b_1+1)}] \mp 1 = 0. \quad (10)$$

对于确定的“字”,方程(10)的最大实根的对数就是它的拓扑熵 $h(f) = \log \alpha_{\max}$ 。上述方法同样适用于计算第二节中讨论的参数区间中任一点上的拓扑熵。对于长周期以及不具备第二节所述条件的混沌轨道,特征方程的幂次将随之增加,其计算也愈麻烦。根据拓扑熵值随着“字”单调递增的性质^[5],可选择它们邻近的能够计算的序列的值而予以逼近,显然其误差不难确定^[5]。于是可以在确定的误差范围内简化计算。

实际计算过程表明,许多特征方程都可经过因式分解简化后进行计算。有趣的是它们的因式和 Derrida 等人提出的“*”乘法^[4]之间存在着一定的对应关系,例如分解后的 RL , $RL * R$, $RL * R^{*n}$, $(RL)^{*2}$, $(RL)^{*n}$, $RL * RL^2$, $RL * RL^n$ 的特征方程可分别表示为

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0, \quad (11)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^3 - \alpha - 1)(\alpha^3 - 1) = 0, \quad (12)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^3 - 1)(\alpha^5 - 1) \dots (\alpha^{3 \cdot 2^{(n-1)}} - 1) = 0, \quad (13)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^6 - \alpha^3 - 1) = 0, \quad (14)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^6 - \alpha^3 - 1)(\alpha^{18} - \alpha^3 - 1) \cdots (\alpha^{3^{n-1}} - 1) = 0, \quad (15)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^3 - \alpha^6 - \alpha^3 - 1) = 0, \quad (16)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^{3(n+1)} - \alpha^{3n} - \cdots - \alpha^3 - 1) = 0. \quad (17)$$

对其它情况也有类似的关系式。此处不一一列举。由此不难得到从 RL 到 $RL * RL^\infty$ 整个区间内其拓扑熵值恒等于 RL 处的值 $h(f) \equiv \log((1 + \sqrt{5})/2)$ 的结论, 并且还看到“*”乘对二个任意允许序列 P, Q 拓扑熵值的影响。

1) 若 $P < R^{*\infty}$, 令 $P = R^{*n}$, 则 $P * Q$ 的拓扑熵值为

$$h_{P*Q}(f) = (1/2)^n h_Q(f).$$

2) 若 $P > R^{*\infty}$, 则 $P * Q$ 的拓扑熵值为

$$h_{P*Q}(f) \equiv h_P(f).$$

这二个结论很好地归纳了数值计算^[3]中的有关结果。

鉴于“*”乘对拓扑熵值的影响, 所以仅需讨论一带区中的“基本字”即那些不能被分解为二个“字”“*”乘结果的“字”所对应的拓扑熵即可。对任何一个属于 U 序列的“基本字” P 对应的 M 点上, 其拓扑熵值恒有 $h_M(f) = h_{M+0}(f) > h_{M-0}(f)$ 的结果, 也就是在这些点的左边有一个跃度, 而它的右边在 $P \approx P * RL^\infty$ 区间内拓扑熵值不变, 呈现平台; 对于不属于 U 序列的“基本字”对应的 N 点上, 其拓扑熵值恒有 $h_{N+0}(f) > h_N(f) > h_{N-0}(f)$, 表现为一个左右都不连续的孤立点。

据此, 得到一维映象拓扑熵的基本印象: 在倍周期区 $h(f) \equiv 0$; 在混沌区内随着参数的增大 $h(f)$ 也单调地增大, 在 $2^j (j \geq 1)$ 带区中 $h(f)$ 的分布形式上和一带区中完全相似, 只是纵横比例有所不同; 在一带区中拓扑熵的值是由“基本字”所对应的孤立点以及以“基本字”为起点的水平线段所构成的阶梯而组成的, 突变发生在“基本字”所对应的点的左边。在数值计算中, 由于受计算机精度的限制而并不如此明晰。

四、小 结

我们从 logistic 映象逆轨道的数值计算结果出发, 得到了在整个参数区间中任一点处的递推公式, 并且说明了它的证明过程。由此出发通过求解相应的特征方程可得到各点上的拓扑熵。还发现“*”乘和特征方程左边的多项式因式分解后诸因子存在关系的事实, 简化了计算。由于拓扑熵的值只与映象的拓扑性质有关而与函数的具体性质无关, 加之我们的讨论是在 MSS 规则和“*”乘法则基础上进行的, 所以本文的结论对于一维映象具有普遍的意义。由此得到一维映象拓扑熵的整体印象。

衷心感谢陈式刚研究员的指导。

[1] 陈瑞熊、陈式刚, 物理学报, 35(1986), 1338.

[2] N. Metropolis, M. I. Stein, P. R. Stein, *J. Comb. Theor.*, 15(1973), 25.

[3] P. Collet, J. P. Crutchfield, J. -P. Eckmann, *Commun. Math. Phys.*, 88(1983), 2570.

- [4] B. Derrida, A. Gervais, Y. Pomeau, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 29(1978), 305.
[5] 陈瑞熊、翁甲强、任炳奇, 广西师范大学学报(自然科学版), (2)(1985).

DETERMINATION OF THE TOPOLOGICAL ENTROPY OF ONE-DIMENSIONAL MAPS BY THE INVERSE ORBITS ANALYSIS

CHEN RUI-XIONG

Department of Physics, Guangxi Normal University, Guilin

(Received 14 November 1988)

ABSTRACT

We generalize the results of ref. [1], explain the proof of the formulae shown in this paper by the method of the inverse orbits analysis. According to this, we can calculate the value of the topological entropy on any point in the whole parameter interval. On the basis of discussing the effect of "*" product on the topological entropy, we obtain the overview of the topological entropy of one-dimensional maps.