

氢原子阈上电离角分布

陈 宝 振

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

1989 年 1 月 3 日收到

利用一个模型理论, 简单地分析了最近的关于氢原子阈上电离角分布的实验结果, 揭示了角分布的一些规律, 并讨论了常用的微扰论中的缺点.

PACC: 3280F; 3280K

一、引 言

原子的阈上电离近年来受到了极大的关注. 这方面的工作也正在进一步深入. Feldmann 连续发表了两篇关于氢原子阈上电子角分布的实验测量结果^[1,2], 并称他们还不知道实验条件下角分布的理论计算值.

众所周知, 角分布是微分截面, 它能比总截面提供更细致的信息. 因此, 应当说, 它也对理论工作提供更精确的检验.

本文用一个模型理论来讨论原子阈上电子角分布.

二、主要的实验事实

Feldmann 小组的主要实验结果示于文献[2]的图 2 和图 3 中. 两个图都是关于基态氢原子阈上电离角分布的实验结果, 是用勒让得多项式逼近实验点得到的平滑曲线. 该文图 2 是用强度为 $5.0 \times 10^{12} \text{W/cm}^2$, 波长为 532nm 的激光照射氢原子得到的吸收 6, 7, 8 个光子的光电子角分布. (原图中还有吸收 9 个光子的光电子角分布, 但信号太弱, 这里将不作讨论.) 空间电荷对吸收 6 个光子的光电子角分布影响较大. Feldmann 认为, 如果消除空间电荷的影响, 图中最小值应为零. 他们认为, 吸收 7 个光子的光电子角分布主要是 f 波的贡献, 吸收 8 个光子的光电子角分布有很强的 g 波贡献. 该文图 3 是用强度为 $3.0 \times 10^{12} \text{W/cm}^2$, 波长为 355nm 的激光照射氢原子得到的吸收 4, 5 个光子的光电子角分布. 吸收 4 个光子的光电子角分布中 d 波贡献占 4/5, s 波贡献占 1/5. 吸收 5 个光子的光电子角分布中 f 波贡献占 4/5, p 波贡献占 1/5.

从实验结果看, 总的来说是较低次分波是角分布中的主要贡献.

三、微扰论的说明

从理论上讲, 角分布是由终态电子波函数的分波展开的展开系数决定的. 不同的分

波对应于不同的角动量。在偶极近似下,按照最低阶的微扰论,基态氢原子吸收 N 个光子终态电子角动量的可能取值由图 1 简明地表示。根据 N 为奇数或偶数,终态电子的角动量 L 将为奇数或偶数,它的可能取值为 $L = 1$ 或 $0 \cdots N$ 之间的整数,而角分布将由

$$\sum_{L=1, \text{或} 0}^N a_L p_L(\cos\theta)$$

确定, p_L 是 L 阶的 Legendre 多项式。按传统的微扰论并用 Bebb 和 Gold 近似^[3], 角分布比例于 $(\cos\theta)^N$, 由此可确定 a_L 。

$$\cos\theta = p_1 \cdots, \quad \cos^2\theta = \frac{2}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_0, \quad (1)$$

$$\cos^3\theta = \frac{2}{5} p_3 + \frac{3}{5} p_1, \quad (2)$$

$$\cos^4\theta = \frac{8}{35} p_4 + \frac{20}{35} p_2 + \frac{7}{35} p_0, \quad (3)$$

$$\cos^5\theta = \frac{8}{63} p_5 + \frac{28}{63} p_3 + \frac{27}{63} p_1, \quad (4)$$

$$\cos^6\theta = \frac{16}{231} p_6 + \frac{72}{231} p_4 + \frac{110}{231} p_2 + \frac{33}{231} p_0, \quad (5)$$

$$\cos^7\theta = \frac{16}{429} p_7 + \frac{88}{429} p_5 + \frac{182}{429} p_3 + \frac{143}{429} p_1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cos^8\theta = & \frac{2145}{19305} p_8 + \frac{7800}{19305} p_6 + \frac{6480}{19305} p_4 \\ & + \frac{2496}{19305} p_2 + \frac{384}{19305} p_0. \end{aligned} \quad (7)$$

由这些近似的微扰论公式,可得下述结果:

- 1) 吸收 4 个光子的角分布,主要贡献来自 d 波;
- 2) 吸收 5 个光子的角分布,主要贡献来自 f 波和 p 波;
- 3) 吸收 6 个光子的角分布,主要贡献来自 d 波和 g 波;
- 4) 吸收 7 个光子的角分布,主要贡献来自 f 波和 p 波;
- 5) 吸收 8 个光子的角分布,主要贡献来自 d 波和 g 波。

定性上说,上述微扰论结果与 Feldmann 实验结果是一致的。这主要是由实验中采用的光场强度较低因而微扰论近似成立决定的。然而,由上述微扰论公式(1)–(7),在 $\theta = \pi/2$ 时给出的结果,当 N 为偶数时,与 Feldmann 实验结果矛盾。此时的实验结果不为零,而微扰论的结果为绝对零。这表明,如果实验结果可靠,即使在光场强度较低的情况下,上述微扰论也不能对实验结果提供比较完整的合理解释。下面将讨论为什么在低强度下,上述微扰论的应用也受到限制。

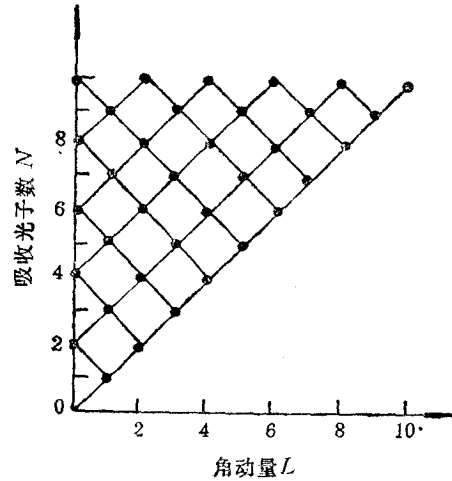


图 1 吸收 N 个光子终态电子角动量 L 的可能取值

四、阈上电子角分布的模型理论

我们曾提出一个模型理论^[4]来描写原子的光电离过程,特别是原子的阈上电离过程. 以前的工作主要是讨论与总电离率有关的问题,没有讨论角分布的问题. 下面用这个模型来讨论阈上电子角分布.

由这个模型理论知,在线极化的情况下,原子吸收 N 个光子的微分电离率(对角度)为

$$\frac{dW(N)}{d\Omega} = \rho_{k_f} \cdot (E_f - E_i)^2 \cdot |\tilde{\phi}_i(\mathbf{k}_f)|^2 \cdot \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{N+2n}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_n(-\delta/2\omega) \right|^2. \quad (8)$$

其中 $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{A}_0}{c\omega}$ 是在光场 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \cos \omega t$ 中电子的振荡振幅; $\delta = \frac{A_0^2}{4c^2}$ 是在光场 $\mathbf{A}(t)$ 中的平均相互作用能; ρ_{k_f} 是电子的终态密度; $\tilde{\phi}_i(\mathbf{k}_f)$ 是电子初态波函数的傅里叶变换; J_n 是 n 阶贝塞耳函数.

决定角分布的主要因子是最后一个贝塞耳函数之和的平方. 上述微扰论的结果对应于这个求和只取 $n = 0$ 的一项

$$\text{即} \quad \sim |J_N(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f)|^2 \alpha(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{a}_0)^{2N}. \quad (9)$$

容易看到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{N+2n}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) \cdot J_n(-\delta/2\omega)$ 简化为 $(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f)^N$ 的条件是

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f \ll 1, \quad (10)$$

$$\delta/2\omega \ll 1, \quad (11)$$

$$\frac{(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{a}_0/2)^2}{N(N-1)(\delta/4\omega)} = \frac{8E_f \cos^2 \theta}{N(N-1)\omega} \gg 1. \quad (12)$$

只有(10)–(12)三式同时成立,(8)式中最后一个贝塞耳函数之和的平方才能简化为(9)式,即简化为微扰论的结果.

下面说明(12)式的作用.

由(10),(11)式,可以看到(8)式中 $n > 0$ 的和,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{N+2n}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_n(-\delta/2\omega)$$

中的各项同 $J_N(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_0(-\delta/2\omega)$ 相比是高阶小量,故可略去. 显然,只有(10),(11)式,还不能保证(8)式中 $n < 0$ 的各项同 $J_N(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_0(-\delta/2\omega)$ 相比是高阶小量,必须再加上(12)式之后,才能提供这样的保证. 可简单证明如下:

由贝塞耳函数理论,有

$$(-1)^N J_{-N}(x) = J_N(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{N!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^N.$$

由此得到

$$\frac{J_N(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_0(-\delta/2\omega)}{J_{N-2}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) \cdot J_{-1}(-\delta/2\omega)} \approx \frac{\frac{1}{N!} \left(\frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f}{2}\right)^N}{\frac{1}{(N-2)!} \left(\frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f}{2}\right)^{N-2} \cdot (\delta/2\omega)/2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f}{2}\right)^2}{N(N-1) \cdot \delta/4\omega} = \frac{(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k}_f/2c\omega)^2}{N(N-1)A_0^2/16\omega c^2} = \frac{8E_f \cos^2 \theta}{N(N-1)\omega}.$$

这里利用了 $\cos \theta = \frac{\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k}_f}{A_0 k_f}$, $k_f = 2E_f$.

由(12)式得到的一个明显结论是, 当 $\theta \sim \pi/2$, $\cos \theta \sim 0$ 时, (8)式不可能简化为上述微扰论的结果, 即使在弱场强的情况下也不可能.

下面定性地讨论由(8)~(12)式可推导出什么样的结论.

$$1) \text{ 利用 } J_M(0) = \begin{cases} 1 & \text{当 } M = 0; \\ 0 & \text{当 } M \neq 0. \end{cases} \quad (13)$$

不难得到, 当 $\theta = \pi/2$, $\cos \theta = 0$ 时

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{N+2n}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_n(-\delta/2\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{N+2n}(0) J_n(-\delta/2\omega) \\ &= \begin{cases} (-\delta/4\omega)^{N/2}/(N/2)! & \text{当 } N \text{ 为偶数;} \\ 0 & \text{当 } N \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

这一结果与 Feldmann 的实验结果定性上是一致的. 这样, 现在的结果解决了在 N 为偶数 $\theta = \pi/2$ 时实验结果与上述微扰论结果之间的尖锐矛盾. 从而说明了实验上在这种情况下观察到一个非零峰的物理原因, 又说明了为什么上述微扰论的结果是不对的.

2) (10)~(12)式原则上还可以用来确定在什么条件下低次分波起主要作用, 什么条件下高次分波起主要作用.

(1) 当 $\theta \sim \pi/2$ 时, 总是低次分波起主要作用.

(2) 当 $\theta \sim 0^\circ$ 时

若 $\frac{8E_f}{N(N-1)\omega} \gg 1$, 高次分波起主要作用;

若 $\frac{8E_f}{N(N-1)\omega} \ll 1$, 低次分波起主要作用;

若 $\frac{8E_f}{N(N-1)\omega} \sim 1$ 时, 相邻的两个分波起近似同样的作用.

(3) 以图 2 (a), $N = 6$ 为例, 对现在的模型理论结果同实验结果作一简单的定量的比较.

此时, 按现在的模型, 角分布由下面的四项和给出:

$$\begin{aligned} J_6(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_0(\delta/2\omega) - J_4(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_1\left(\frac{\delta}{2\omega}\right) + J_2(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_2 \\ \cdot \left(\frac{\delta}{2\omega}\right) - J_0(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f) J_3(\delta/2\omega), \end{aligned} \quad (15)$$

在实验条件下

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}_f \sim 0.15 \cos \theta < 1, \quad \frac{\delta}{2\omega} \sim 0.0169 < 1, \quad (16)$$

因此, (15)式简化为

$$\frac{(\alpha_0 \cdot \mathbf{k}_f/2)^6}{6!} - \frac{(\alpha_0 \cdot \mathbf{k}_f/2)^4}{4!} \cdot \frac{\delta}{4\omega} + \frac{(\alpha_0 \cdot \mathbf{k}_f/2)^2}{2!} \cdot \frac{(\delta/4\omega)^2}{2!} - \frac{(\delta/4\omega)^3}{3!} \quad (17)$$

(17)式中相邻两项的比为

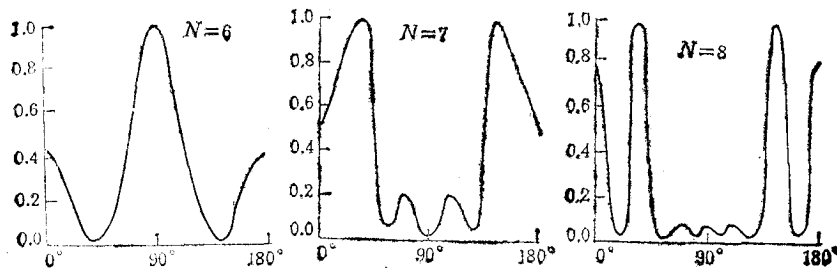
$$\text{对首两项} \frac{8E_f \cos^2 \theta}{N(N-1)\omega} = \frac{8E_f \cos^2 \theta}{30\omega} = 0.045 \cos^2 \theta;$$

$$\text{对中间两项} \frac{8E_f \cos^2 \theta}{N(N-1)\omega} = \frac{8E_f \cos^2 \theta}{12\omega} = 0.11 \cos^2 \theta;$$

$$\text{对最后两项} \frac{8E_f \cos^2 \theta}{N(N-1)\omega} = \frac{3.8E_f \cos^2 \theta}{4\omega} = 1.02 \cos^2 \theta.$$

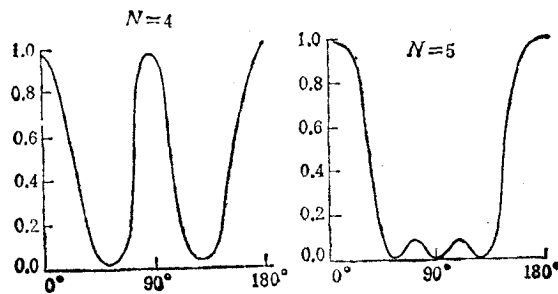
由此得: 对 $\theta \sim 0^\circ$, s 波, d 波起主要作用; 对 $\theta \sim \pi/2$, s 波起主要作用. 定性上与实验结果符合较好.

利用(8)式我们也作了数值计算. 计算结果示于图 2 中.



(a) 基态氢原子吸收 N 个光子电离角分布理论计算结果

光强 $= 1.5 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$; $\hbar\omega = 2.34 \text{ eV}$



(b) 基态氢原子吸收 N 个光子电离角分布理论计算结果

光强 $= 2.2 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$; $\hbar\omega = 3.71 \text{ eV}$

图 2

将现在的计算结果和 Feldmann 的实验结果进行比较, 似乎可以得到下面一些为本文的计算和 Feldmann 实验所共同反映出的规律:

(1) 当 N 增大时, 阈上电子趋于远离 $\theta \sim \pi/2$ 的方向而靠近 $\theta \sim 0^\circ$ 的方向;

(2) 当 N 增大时, 较高次分波趋于起主要作用. 顺便指出, Hippler 等人^[5]和 Humpert 等人^[6]早一些的关于阈上电子角分布的实验工作, 也揭示出上述的类似的规律. (虽然他们的实验是用 Xe 而不是用 H 做的.)

还应指出, 在图 2(a) 中吸收 6 个光子光电子角分布的最小值接近零. 这与实验结果预言的消除空间电荷影响的结果是一致的.

总的说来, 除了理论计算得到的吸收 4 个光子和 6 个光子两个光电子角分布中 $\theta = \pi/2$ 处的峰高定量上与 Feldmann 的实验结果明显不一致外, 理论和实验之间符合较好.

本工作得到中国原子分子数据研究联合体资助.

作者感谢黄祖洽教授的指导.

- [1] D. Feldmann *et al.*, XV ICPEAC, Brighton UK (1987), p. 86.
- [2] D. Feldmann *et al.*, *Z. Phys.*, **D6**(1987), 293.
- [3] H. B. Bebb and A. Gold, *Phys. Rev.*, **143**(1966), 1.
- [4] B. Chen *et al.*, *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 4091.
- [5] R. Hippler *et al.*, *J. Phys. B.*, **16**(1983), L713.
- [6] H. J. Humpert *et al.*, Proceedings of the Advanced Study Institute on "Fundamental Processes in Atomic Collision Physics" (1984).

ANGULAR DISTRIBUTION OF ABOVE-THRESHOLD IONIZATION OF H ATOM

CHEN BAO-ZHEN

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 3 January 1989)

ABSTRACT

With a model theory we analyse the recent experiment on the angular distribution of above-threshold ionization of H-atom, and show some rules of the angular distribution. We also discuss the shortcoming of the ordinary perturbation theory in brief.

PACC: 3280F; 3280K