

试探粒子横越单一磁岛的扩散

郑少白

中国科学院物理研究所, 北京, 100080

A. J. WOOTTON

Fusion Research Center, University of Texas at Austin, U. S. A.

1989年1月14日收到

本文用试探粒子的蒙特-卡罗法计算了带电粒子横越单一磁岛的扩散,并用碰撞度和有效扩散时间来定量描述磁岛对扩散的影响.结果表明磁岛对岛外的扩散影响不是很大,但当碰撞变弱时磁岛对岛内的粒子扩散影响很大,岛内的粒子密度趋向于常数的分布.

PACC: 5225F; 5265

一、引言

当托卡马克型的聚变等离子体实验装置向反应堆过渡时,一个重要的问题是尽可能地降低等离子体边缘的温度,同时使等离子体向外转移的能量尽可能大面积地散落到容器壁上.这样可避免容器壁局部区域(如隔板)的热过载而超过它的临界热极限.为了达到上述目的,一个重要的方法是在等离子体边缘引入一个径向的螺旋扰动磁场或随机磁场.这样等离子体边缘的扩散系数将大大增加,从而达到上述目的^[1,2].许多装置在类似方面已经做了大量的实验工作^[3-5].同时,粒子在这类磁场结构中的扩散理论^[6-8],和数值计算^[9,10]工作也有很大的发展.

如果外加的径向扰动场比较弱并具有单模的螺旋结构,那末它和托卡马克本身的约束磁场组合之后有可能在等离子体边缘出现单一的磁岛结构^[11].本文的目的是用试探粒子的数值算法,研究粒子横越这种单一磁岛的扩散现象及磁岛对扩散的影响.

二、原理

设外加的扰动磁场的径向分量具有下面的单模结构:

$$B_r = -B_{r0} \sin(m\theta - n\varphi), \quad (1)$$

其中 φ , θ , r 分别为托卡马克装置的大环角、小环角和小半径. B_{r0} 为扰动场径向分量的模. 忽视了漂移,带电粒子迴旋中心无碰撞时的运动方程为

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{U B_\varphi}{R B}, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{U}{r} \frac{B_\theta}{B}, \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = -U \frac{B_{r0}}{B} \sin(m\theta - n\varphi). \quad (4)$$

其中 U 为粒子迴旋中心沿磁力线的运动速度(可正可负), B_φ, B_θ 为托卡马克的纵向及角向磁场, B 为总磁场, R 为大半径. 这里我们认为扰动磁场比较小, 它的纵向和角向分量与托卡马克约束场比较可以忽视. 作为近似忽略了环效应, 并设扰动场在 $r = r_0$ 处和托卡马克的约束场共振.

$$q(r_0) = \frac{m}{n} = \frac{r_0 B_\varphi}{R B_\theta(r_0)}. \quad (5)$$

将方程(2-4)在共振面附近作线性展开, 并作下面坐标变换:

$$X = m\theta - n\varphi, \quad (6)$$

$$Y = \sqrt{\frac{m}{B_{r_0}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)_{r=r_0}} (r - r_0), \quad (7)$$

$$T = \frac{|U|}{B} \sqrt{m B_{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)_{r=r_0}} \cdot t. \quad (8)$$

即可得到归一化的, 在 X, Y, T 坐标下的运动方程

$$\frac{dX}{dT} = \pm Y, \quad (9)$$

$$\frac{dY}{dT} = \mp \sin X. \quad (10)$$

(9)式中“ \pm ”号表示粒子运动速度和磁场方向的关系。(10)式中“ \mp ”号则相反. 从一般关于非线性振荡的书^[2]都可得(9),(10)式决定的轨道方程为

$$Y^2 = 2[c + \cos(X)]. \quad (11)$$

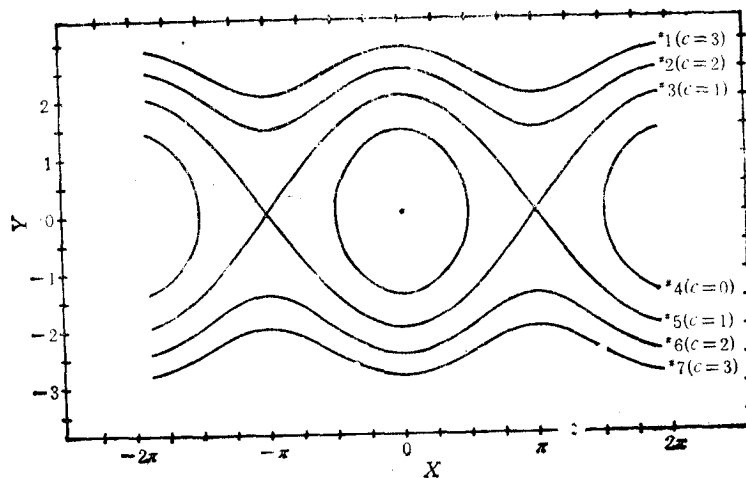


图1 粒子的无碰撞轨道

其中 c 为轨道参数。图 1 示出了不同 c 值的轨道。它实际上也是磁岛结构。当 $c \geq 1$ 时为通行轨道, 即岛外区。 $c < 1$ 时为岛状轨道, 即岛内区。由 $c = 1$ 决定的磁岛宽度为

$$\begin{aligned} \delta &= 4 \quad (Y \text{ 坐标}), \\ &= 4 \sqrt{\frac{B_{r_0}}{m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)_{r=r_0}}} \quad (r \text{ 坐标}). \end{aligned} \quad (12)$$

在岛心附近粒子绕岛心的旋转周期

$$\begin{aligned} T_r &= 2\pi \quad (T \text{ 坐标}), \\ &= \frac{2\pi B}{|U|} \left[\sqrt{m B_{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)_{r=r_0}} \right]^{-1} \quad (t \text{ 坐标}). \end{aligned} \quad (13)$$

这样带电粒子横越磁岛的扩散可等价于粒子横越图 1 的轨道的扩散。下面我们用碰撞模型来计算。在计算中碰撞时间 τ 取值为 0 到 $2T_c$ 。作等几率变化, 碰撞之后在 Y 方向跳跃的距离 ρ 在 $-\rho_0$ 到 ρ_0 之间作等几率变化, 这样试探粒子在 Y, T 坐标下的自然扩散系数为

$$D_c = \frac{\overline{\rho^2}}{2\bar{\tau}} = \frac{\rho_0^2}{6T_c}. \quad (14)$$

它与 r, t 坐标下的自然扩散系数 D_0 的关系为

$$D_c = \frac{1}{|U|} \frac{B}{B_{r_0}} \sqrt{\frac{m}{B_{r_0}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)_{r=r_0}} D_0. \quad (15)$$

我们将用有效扩散时间 T_e 来定量地描述磁岛对扩散的影响

$$T_e = D_c T_0 \quad (16)$$

其中 D_c 为扩散系数, T_0 为粒子通过给定区间的平均扩散时间。显然忽视了磁岛影响时, 它是一个常数。

$$T_e = T_{\infty} = \frac{1}{2} \overline{L^2(X)}. \quad (17)$$

$L(X)$ 为区间 Y 方向的距离。因此 T_e 值的变化即反映了磁岛对扩散的影响。

计算结果表明, 对于给定的扩散区间, T_e 和下面定义的碰撞度 α 有近似的单值关系。

$$\alpha = \frac{2D_c}{\frac{1}{T_c} \left(\frac{dY}{dT} \tau \right)^2} = \frac{\rho_0^2}{2T_c^2}. \quad (18)$$

α 可理解作粒子的自然扩散的速度对沿轨道运动引起的在 Y 方向转移的速度比。当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 磁岛不再对扩散发生影响。

在下面计算粒子的平均扩散时间时, 为了简单, 源和漏都选在 $c =$ 常数的轨道面上。在计算中我们用改进的二次差分法计算粒子沿轨道的运动来保证计算误差不会引起粒子偏离原始的轨道。对于越过源面而离开研究区间的粒子采用反射法进行处理。计算主要在 VAX 机上进行。

三、试探粒子在近岛区的扩散

我们计算了试探粒子由图 1 中 #7 轨道 ($c = 3$) 向磁岛边缘 #5 轨道 ($c = 1$) 扩散的有效扩散时间 T_e 和碰撞度 α 关系. 图 2 示出计算结果及多次重复的均方误差.

从图 2 看出, 当 $\alpha \gg 1$ 时 T_e 趋向于稳定值 0.79, 它稍大于 (17) 式的计算值; 这是由于试探粒子的平均中止位置超过漏面 $\rho_0/4$ 造成. 当 $\alpha \ll 1$ 时, T_e 趋向于另一稳定值 0.61. 看来这和下面假设是一致的, 即试探粒子在扩散中要均匀地经过源和漏面之间的所有区域. 不同 X 值的距离 $L(X)$ 相当于并联, 即

$$T_{e_0} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{L(X) + \rho_0/4} \right)^2 \right]^{-1} = 0.61. \quad (19)$$

在 $0.1 < \alpha < 10$ 的区域内, 图 2 示出 T_e 和 $\log \alpha$ 之间有很好的线性关系.

$$T_e \approx 0.69 + 0.07 \log \alpha. \quad (20)$$

因此总的看来, 在托卡马克中单一磁岛的存在对岛外的粒子扩散影响不是很大, 即使是紧邻磁岛的区域, 即从 #7 轨道向 #5 轨道扩散, 磁岛对有效扩散时间的改变不超过 30%.

四、试探粒子横越磁岛的扩散

我们计算了试探粒子从磁岛的一边, 即图 1 中 #5 轨道 $Y < 0$ 一边, 向磁岛的另一边, 即 #3 轨道 $Y > 0$ 一边的有效扩散时间. 为了使 (18) 式近似公式有效, 计算中取 $T_e < 1.0$ 的不同 T_e 和 ρ_0 值. 结果在图 3 中用 “+” 表示.

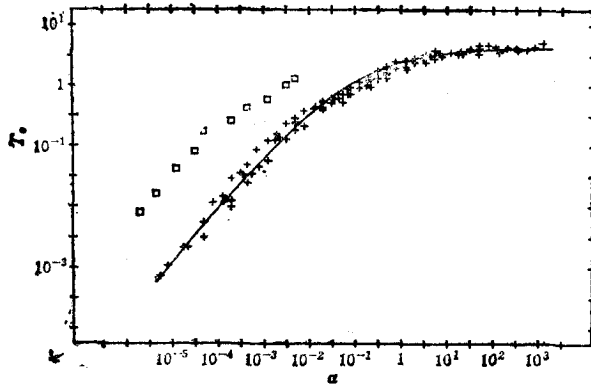


图 3 粒子横越磁岛的有效扩散时间

当碰撞度 $\alpha \gg 1$ 时, T_e 趋向于一稳定值 4.3. 它和修正之后的 (17) 式是一致的. 当 $\alpha \ll 1$ 时, T_e 趋向于 $\alpha^{0.9}$. 在我们计算的所有参数范围之内, T_e 和 α 可用下面简单公式近似:

$$T_e = 4.3 \left(\frac{3\alpha^{0.45}}{1 + 3\alpha^{0.45}} \right)^2. \quad (21)$$

它在图 3 中用实线示出。目前还不清楚这个简单关系的原由。

当 $T_c \geq T$ 时情况要复杂得多。图 3 中“□”表示 $T_c = 10$ 时的离开群体的计算结果。这是由于粒子绕岛心作接近一个周期以上的运动，从而大大减少由于沿轨道运动引起 Y 方向的转移速度。

因此在托卡马克中当碰撞度 $\alpha < 1$ 时，单一磁岛对岛内的粒子扩散将有很大的影响。带电粒子通过沿磁力线运动不断地从磁岛的一侧向另一侧过渡而大大增加了粒子的扩散。但当粒子的自由程接近和超过绕岛心旋转周长时，磁岛对扩散的影响比预计的要弱。

五、粒子在岛区附近的密度分布

为了得到试探粒子的密度分布，在计算中我们记录了每经过 $\Delta T = 0.005$ 的粒子位置。粒子在空间出现的几率分布即代表粒子的相对密度分布。计算中空间分辨力为

$$\Delta X \times \Delta Y = 0.1 \times 0.1.$$

源面和漏面取在远离岛区 $e = 17$ 的轨道面上，源面 $Y < 0$ ，漏面 $Y > 0$ 。由于此时轨道面和 $Y = \text{常数}$ 的面基本重合，因此可消除源漏面的选择引起的计算误差。

图 4 至图 6 分别给出 $\alpha \gg 1$ ， $\alpha \approx 1$ ， $\alpha \ll 1$ 三种典型情况的密度分布。它的计算条件见表 1。

表 1 图 4 至图 6 的计算条件

图	T_c	ρ_0	D_c	α	粒子数
4	0.1	1.0	1.7	50	50000
5	0.1	0.1	0.017	0.5	3900
6	1.0	0.1	0.0017	0.005	276

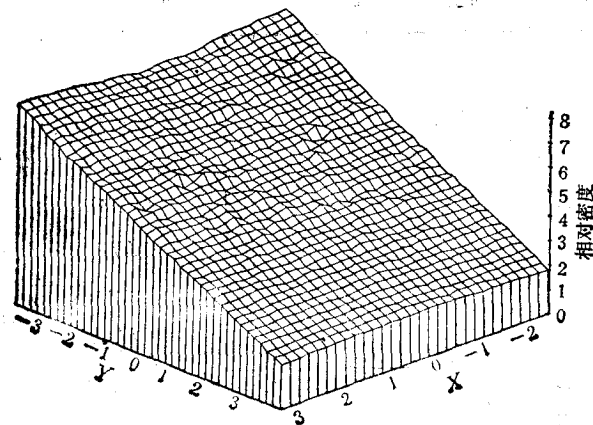


图 4 $\alpha = 50$ 时的粒子密度分布
 $T_c = 0.1$; $R_0 = 1.0$; 50000 粒子

从结果可看出,当碰撞度 α 由大变小时,粒子的密度由类似无磁岛时的均匀斜坡分布向岛内为常数的分布过渡;因此在托卡马克中对应于 $Y = 0$ 的共振面上粒子密度为一常数,它不随大小环角而变化。在共振面内部 ($Y < 0$),岛心 ($X = 0$) 附近的密度要比岛边 ($X = \pm\pi$) 低。而在共振面外部 ($Y > 0$) 情况则相反。

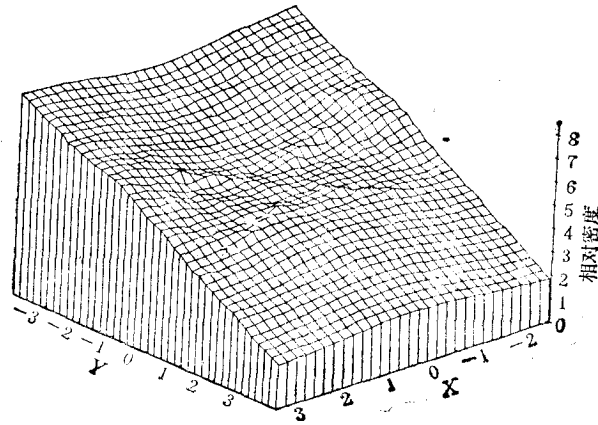


图5 $\alpha = 0.5$ 时的粒子密度分布
 $T_0 = 0.1; R_0 = 0.1; 3900$ 粒子

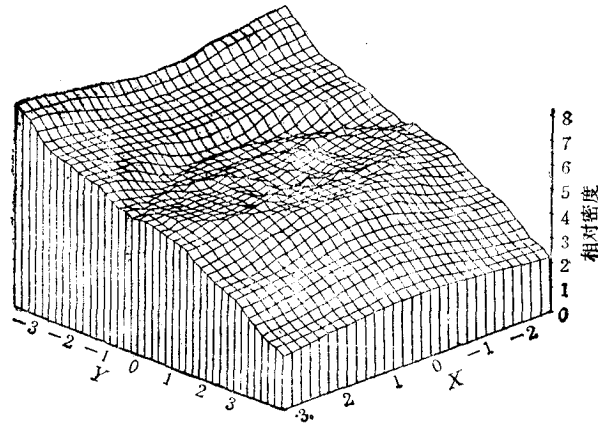


图6 $\alpha = 0.005$ 时的粒子密度分布
 $T_0 = 1; R_0 = 0.1; 276$ 粒子

六、结 论

1. 我们选用了有效扩散时间 T_e 来定量地描述磁岛对粒子扩散的影响。计算结果表明 T_e 的改变只和由(18)式定义的碰撞度 α 有关。因此 α 可作为磁岛可能对粒子扩散影响的物理量。

2. 在单一磁岛的外部,磁岛对有效扩散时间的影响比较小,即使在岛边宽度等于 $1/2$ 岛宽区域, T_e 的改变不超过 30%。

3. 当 $\alpha \leq 1$ 时,磁岛对岛内的有效扩散时间影响比较大,当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $T_e \propto \alpha^{0.9}$.
4. 当 α 由大变小时,岛内的粒子密度分布由均匀的斜坡分布变为平台分布。

- [1] W. Feneberg, G. H. Woef, *Nuclear Fusion*, 21(1981), 669.
- [2] N. Obyabu, *Nuclear Fusion*, 21(1981), 519.
- [3] N. Obyabu, J. S. DeGrassie, N. H. Brooks, 25(1985), 1684.
- [4] J. S. DeGrassie, N. Obyabu, N. H. Brooks, *J. Nucl. Matter*, 128/129(1984), 216.
- [5] W. Feneberg, Proc. 8th Europ. Conf. on Nuclear Fusion and Plasma Physics, Prague 1977, 1(1977), 4.
- [6] A. B. Rechester and M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, 40(1978), 38.
- [7] B. B. Kadomtsev, O. P. Pogutse, Proc. of 7th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion, (IAEA), Vienna 1979, 1(1979), 649.
- [8] H. A. Rose, *Phys. Rev. Lett.*, 48(1982), 260.
- [9] A. H. Boozer, R. B. White, *Phys. Rev. Lett.*, 49(1982), 786.
- [10] H. Wobig, R. H. Fowler, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 30(1988), 721.
- [11] S. Matsuda, M. Yoshikawa, *Jap. J. Appl. Phys.*, 14(1975), 87.
- [12] A. A. 安德罗诺夫等, 振动理论, 上册, 科学出版社, (1973), 106页.

TEST PARTICLE DIFFUSION ACROSS A SINGLE ISLAND IN A TOKAMAK

ZHENG SHAO-BAI

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

A. J. WOOTTON

Fusion Research Center, University of Texas at Austin, U. S. A.

(Received 14 January 1989)

ABSTRACT

In this paper, the phenomena of a test particle diffusion near a single magnetic island in a Tokamak is investigated by the method of Monte Carlo and an effective diffusion time is used to describe the effect of diffusion by the island quantitatively. The results show that there is a uniform function between effective diffusion time and a value called collision rate. The relationship between the effective diffusion time and the collision rate and the particle density distribution inside and near the island are calculated.

PACC: 5225F; 5265