第 39 卷 第 10 期 物理学报 Vol. 39, No. 10
1990 年 10 月 ACTA PHYSICA SINICA Oct., 1990

通过注入激光提高腔内参量放大光的压缩*

谭维翰 张卫平 谭微思
中国科学院上海光学精密机械研究所，上海，201800
1989 年 11 月 7 日收到

本文将证明采用注入激光以弥补腔内损耗，减少无规力的作用，可以获得很高的腔内参量放大光的压缩.

PACC: 4250

一、引　言

早期的简并参量放大产生压缩态光的理论[1]，就已经得出"当计及光的损耗时，最多只能有 2 倍的压缩".后来 Yurke 引进谐振腔的作用后[2]，认为可通过选择谐振腔参数，使得在阈值附近工作时，输出光的压缩可趋于很大. 但在 Yurke 的讨论中，已完全略去阻尼，也略去伴随阻尼而来的无规力的作用. 其实无阻尼的简并四波混频产生压缩态的研究[3,4]表明，只要相互作用路程够长(这可通过谐振腔来解决)，可增大光的压缩而不受限制. 稍后，Collett 的研究又表明[5]，在对输出压缩光作了谱分析后，得出

$$:S_{2,out}(\omega): = -\frac{r_1}{4}\frac{r_1+r_2}{(r_1+r_2)^2+\omega^2}.$$

当 $r_2=0$，$\omega\to 0$ 时

$$:S_{2,out}(0): = -\frac{1}{4}$$

但总的输出光的压缩仍为

$$:S_{2,out}: = \frac{1}{2\pi}\int -\frac{r_1}{4}\frac{r_1^2}{r_1^2+\omega^2}\delta(\omega+\omega')d\omega d\omega' = -\frac{r_1}{8}.$$

即有 2 倍压缩的光乘上透过率输出 r_1. 如果在腔外加滤光片将 $\omega=0$ 分量的光分离出来，可达理想的压缩，否则仍为腔内的 2 倍压缩. 后来又有简并参量放大压缩光信噪比计算[6]，实际上正如他自己指出的[7]，是用极限 $(r/2-\epsilon)T\gg 1$，即假定探测器宽度远小于参量放大输出的谱宽. 这与外加滤光片将 $\omega=0$ 分量的光分离出来有同样效果. 但要求光探测器探测时间 T 远大于压缩光信号的相干时间.

* 国家自然科学基金资助的课题.

本文将证明通过由腔外注入相干光的方法，可抵偿腔的输出等损耗以及由此而来的无规力的影响，从而得到在阈值附近的腔内理想压缩，即腔内压缩可以很大.

二、有相干光注入的多模参量放大方程及其解

设参量放大腔的模式频率为 $\omega_0/2$，而光泵频率为 ω_p，并设光泵频率已调谐到 $\omega_p=2(\omega_0/2)=\omega_0$，如果注入光 a_{in} 的频率又恰好为 $\omega_0/2$，于是在输入的信号光的作用下，一个频率为 ω_0 的泵浦光子，简并参量转换为两个频率为 $\omega_0/2$ 的光子. 若信号光的频率为 $\omega_0/2\pm\omega$，则频率为 ω_0 的泵浦光，参量转换为频率分别为 $\omega_0/2+\omega,\omega_0/2-\omega$ 的两个光子. 与前一种单模简并参量转换形成对比. 这就是多模参量转换的情形. 设参量光的湮没与产生算符为 a 与 a^+. 则参照文献[8]，关于算符 a 的量子 Langevan 方程可写为

$$\frac{da}{dt}=-i/\hbar[a,H]-\varkappa/2a+F. \tag{1}$$

式中 $-\varkappa/2a$ 为阻尼项，F 为无规力项，表现与热库的相互作用. 而 H 即系统的 Hamilton 可表示为振荡的场能、简并参量能[6]与注入激光能[9]之和.

$$H=\frac{\hbar\omega_0}{2}a^+a+\frac{i\hbar}{2}[\varepsilon\exp(-i\omega_0t)(a^+)^2-\varepsilon^*\exp(i\omega_0t)a^2]$$
$$+K[a^+a_{in}-a_{in}^+a]+\frac{\hbar\omega_0}{2}a_{in}^+a_{in}$$
$$K=T\left(\frac{\omega_0\varepsilon_0}{2\hbar V}\right)^{1/2}\bar{\varkappa}/2, \tag{2}$$

$$a_{in}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{in}(\omega)\exp[-i(\omega_0/2+\omega)t]+a_{in}(-\omega)\exp[-i(\omega_0/2-\omega)t]),$$
$$a_{in}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{in}^+(\omega)\exp[i(\omega_0/2+\omega)t]+a_{in}^+(-\omega)\exp[i(\omega_0/2-\omega)t]). \tag{2'}$$

式中 ε 为描述参量放大的非线性系数. 若 $\varepsilon=|\varepsilon|\exp(i\phi)$，则可通过变换 $a\to a\exp(i\phi/2)$，$a^+\to a^+\exp(-i\phi/2)$，$a_{in}\to a_{in}\exp(i\phi/2)$，$a_{in}^+\to a_{in}^+\exp(-i\phi/2)$，将相角消掉. 故不失一般性，将 ε 取为实数. 由(2)式定义的 K 称为注入激光的注入率. 其中 $\bar{\varkappa}$ 为激光媒质的极化率. V 为腔的体积. T 为腔端面的透射系数. (2)′式表明注入激光包含 $\omega_0/2\pm\omega$ 两个频率.

将(2)式代入(1)式，则得参量放大的 Langevan 方程

$$\frac{da}{dt}=(-i\omega_0/2-\varkappa)a+\varepsilon\exp(-i\omega_0t)a^++Ka_{in}+F. \tag{3}$$

同样可得

$$\frac{da^+}{dt}=(i\omega_0/2-\varkappa)a^++\varepsilon\exp(i\omega_0t)a+Ka_{in}^++F^+. \tag{3'}$$

作旋转坐标变换

$$a \to a\exp(-i\omega_0/2)t, \qquad a^+ \to a^+\exp(i\omega_0/2t),$$
$$F \to F\exp(-i\omega_0/2t), \quad F^+ \to F^+\exp(i\omega_0/2t). \tag{4}$$

并注意到(2)′式，则得

$$\frac{da}{dt} = -\varkappa a + \epsilon a^+ + \frac{K}{\sqrt{2}}(a_{in}(\omega)\exp(-i\omega t) + a_{in}(-\omega)\exp(i\omega t)) + F,$$
$$\frac{da^+}{dt} = -\varkappa a^+ + \epsilon a + \frac{K}{\sqrt{2}}(a_{in}^+(\omega)\exp(i\omega t) + a_{in}(-\omega)\exp(-i\omega t)) + F^+. \tag{5}$$

为求参量放大方程(5)的解，宜于再作一次变换，即定义算子 b_1, b_2

$$b_1 = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}, \qquad b_2 = \frac{a-a^+}{\sqrt{2}},$$
$$b_{1i}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{in}(\omega) + a_{in}^+(-\omega)),$$
$$b_{2i}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{in}(\omega) - a_{in}^+(-\omega)),$$
$$G_1 = \frac{F+F^+}{\sqrt{2}}, \qquad G_2 = \frac{F-F^+}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

由(6)式易于证明

$$\langle[b_2, b_1]\rangle = \langle b_2b_1 - b_1b_2\rangle = \langle aa^+ - a^+a\rangle = \langle[a, a^+]\rangle = 1, \tag{7}$$
$$\begin{aligned}[b_{2i}(\omega), b_{1i}(-\omega)] &= b_{2i}(\omega)b_{1i}(-\omega) - b_{1i}(-\omega)b_{2i}(\omega)\\ &= \frac{1}{2}[a_{in}(\omega)a_{in}^+(\omega) - a_{in}^+(\omega)a_{in}(\omega)\\ &\quad - a_{in}^+(-\omega)a_{in}(-\omega) + a_{in}(-\omega)a_{in}^+(-\omega)]\\ &= 1.\end{aligned} \tag{8}$$

于是由(5)，(6)式便得

$$\frac{db_1}{dt} = (-\varkappa + \epsilon)b_1 + K\frac{b_{1i}(\omega)\exp(-i\omega t) + b_{1i}(-\omega)\exp(i\omega t)}{\sqrt{2}} + G_1,$$
$$\frac{db_2}{dt} = (-\varkappa - \epsilon)b_2 + K\frac{b_{2i}(\omega)\exp(-i\omega t) + b_{2i}(-\omega)\exp(i\omega t)}{\sqrt{2}} + G_2. \tag{9}$$

令 $\lambda_1 = \varkappa - \epsilon$，$\lambda_2 = \varkappa + \epsilon$，(9)式可写为

$$\frac{db_j}{dt} = -\lambda_j b_j + K\frac{b_{ji}(\omega)\exp(-i\omega t) + b_{ji}(-\omega)\exp(i\omega t)}{\sqrt{2}} + G_j \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

当注入率 $K = 0$，则(10)式的解可参照文献[10—12]求得，其无规力 G_1, G_2 满足如下关系：

$$\langle G_2(t)G_1(t') - G_1(t)G_2(t')\rangle = 2\varkappa\delta(t-t'),$$
$$\langle :G_1(t)G_1(t'):\rangle = (\epsilon + 2\varkappa n_{th})\delta(t-t'),$$
$$\langle :G_2(t)G_2(t'):\rangle = (\epsilon - 2\varkappa n_{th})\delta(t-t'). \tag{11}$$

式中 n_{th} 为热噪音的平均光子数． $K \neq 0$ 时，(10)式的解为

$$b_j = b_{j0}\exp(-\lambda_j t) + \frac{K}{\sqrt{2}}\left[\frac{b_{ji}(\omega)}{\lambda_j - i\omega}(\exp(-i\omega t) - \exp(-\lambda_j t)) + \frac{b_{ji}(-\omega)}{\lambda_j + i\omega}(\exp(i\omega t) - \exp(-\lambda_j t))\right] + \int_\Delta^t \exp[-\lambda_j(t-\tau)]G_j(\tau)d\tau \quad j = 1, 2. \tag{12}$$

由此得出对易关系

$$[b_2, b_1] = [b_{20}, b_{10}]\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] + \frac{K^2}{2}[b_{2i}(\omega), b_{1i}(-\omega)] \times \left(\frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 - i\omega} \times \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1 + i\omega}\right) + \frac{K^2}{2}[b_{2i}(-\omega), b_{1i}(\omega)] \times \left(\frac{\exp(i\omega t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 + i\omega} \times \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1 - i\omega}\right) + \int_0^t\int_0^t \exp[-\lambda_1(t-\tau') - \lambda_2(t-\tau)][G_2(\tau), G(\tau')]d\tau d\tau'. \tag{13}$$

借助于(8)式,上式可写为

$$1 = \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t] + \frac{K^2}{2}\left[\frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 - i\omega} \times \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1 + i\omega} + \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 + i\omega} \times \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1 - i\omega}\right] + \int_0^t\int_0^t \exp(-\lambda_1(t-\tau') - \lambda_2(t-\tau))\langle[G_2(\tau), G_1(\tau')]\rangle d\tau d\tau'. \tag{13$'$}$$

由(13)′式解出

$$\langle[G_2(\tau), G_1(\tau')]\rangle = (2x - f(\tau))\delta(\tau - \tau'),$$

$$f(\tau) = \frac{K^2}{2}\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)\tau]\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\exp(-i\omega\tau + \lambda_2\tau) - 1}{\lambda_2 - i\omega} \times \frac{\exp(i\omega\tau + \lambda_1\tau) - 1}{\lambda_1 + i\omega} + \text{c.c.}\right). \tag{14}$$

参照(13)′式,若 t 很大,且 τ 趋近于 t, 于是(14)式可简化为

$$f(\tau) = 2xK^2\frac{\lambda_1\lambda_2 + \omega^2}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}.$$

$$[G_2(\tau), G_1(\tau')] = 2x\left(1 - \frac{K^2(\lambda_1\lambda_2 + \omega^2)}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}\right)\delta(\tau - \tau'). \tag{15}$$

由(15)式明显看出注入相干光引起了 $G_1(\tau')$, $G_2(\tau)$ 满足的对易关系发生变化,相当于乘了一个因子 D. D 的定义如下:

$$D = 1 - \frac{K^2(\lambda_1\lambda_2 + \omega^2)}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}. \tag{16}$$

这就相当于无规力乘了一个因子 $D^{1/2}$. 方程(11)可重写为

$$\langle :G_1(\tau)G_1(\tau'): \rangle = (\epsilon + 2\kappa n_{th})D\delta(\tau - \tau') \tag{17}$$

$$\langle :G_2(\tau)G_2(\tau'): \rangle = (\epsilon - 2\kappa n_{th})D\delta(\tau - \tau'). \tag{18}$$

注入率 K 的取值应受限于 D 取正值，否则系统将是不稳定的．亦即

$$K^2 \leqslant \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}{\kappa^2 + \omega^2 - \epsilon^2}. \tag{19}$$

当 $\omega = 0$，即注入激光频率与泵浦光频率如相同，由(18)式得

$$K^2 \leqslant \kappa^2 - \epsilon^2. \tag{20}$$

(20)式表明腔的损耗已部份被注入激光与增益所补偿．如果等式成立便是完全补偿，这时易于看出 $D = 0$，即无规力消失．

现在讨论文献[5]的结果．在文献[5]中假定无规力正比于注入激光 a_{in}，并将 K 确定为 $\sqrt{2\gamma\delta\omega}$，即 $\sqrt{2\kappa\delta\omega}$，并且是讨论连续谱 $\tilde{a}_{in}(\omega)$，求出每一分量的贡献再积分．故有

$$D = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\kappa(\kappa^2 + \omega^2 - \epsilon^2)}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)} d\omega = 0. \tag{21}$$

即无规力为零，因为无规力的每一 Fourier 分量已经被当作“注入激光”计算．当然也就不需另外引进无规力，这就是(21)式表明的 $D = 0$．但他并未真正计算注入激光．所得结果，腔内最大压缩为 2 倍，与无激光情形相同[13]．

三、通过注入激光提高腔内参量放大光的压缩

现设 $\lambda t \gg 1$，则方程(12)变为

$$\begin{aligned} b_j(\omega, t) &\simeq \frac{K}{\sqrt{2}}\left[\frac{b_{ji}(\omega)}{\lambda_j - i\omega}\exp(-i\omega t) + \frac{b_{ji}(-\omega)}{\lambda_j + i\omega}\right] \\ &\quad + \int_0^t \exp[-\lambda_j(t-\tau)]G_j(\tau)d\tau \\ &= b_j' + \int_0^t \exp[-\lambda_j(t-\tau)]G_j(\tau)d\tau \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{22}$$

b_j 的方差可表示为(参照(17)式)

$$\begin{aligned} \langle :(\Delta b_1)^2: \rangle &= \langle :(\Delta b_1')^2: \rangle + \frac{(\epsilon + 2\kappa n_{th})}{2\lambda_1} D, \\ \langle :(\Delta b_2)^2: \rangle &= \langle :(\Delta b_2')^2: \rangle + \frac{(\epsilon - 2\kappa n_{th})}{2\lambda_2} D. \end{aligned} \tag{23}$$

现定义

$$\begin{aligned} a'(\omega) + a'^{+}(-\omega) &= \frac{K}{\lambda_1 - i\omega}(a_{in}(\omega) + a_{in}^{+}(-\omega)), \\ a'(\omega) - a'^{+}(-\omega) &= \frac{K}{\lambda_2 - i\omega}(a_{in}(\omega) - a_{in}^{+}(-\omega)). \end{aligned} \tag{24}$$

代入 b_1', b_2' 的表式中，便得

$$b_1' = \frac{1}{2}\left[(a'(\omega) + a'^+(-\omega))\exp(-i\omega t) + (a'(-\omega) + a'^+(\omega))\exp(i\omega t)\right],$$

$$b_2' = \frac{1}{2}\left[(a'(\omega) - a'^+(-\omega))\exp(i\omega t) + (a'(-\omega) - a'^+(\omega))\exp(i\omega t)\right]. \quad (25)$$

由方程(24),得到

$$a'(\omega) = \frac{K_1 + K_2}{2} a_{\text{in}}(\omega) + \frac{K_2 - K_1}{2} a_{\text{in}}^+(-\omega),$$

$$a'^+(-\omega) = \frac{K_2 - K_1}{2} a_{\text{in}}(\omega) + \frac{K_2 + K_1}{2} a_{\text{in}}^+(-\omega). \quad (26)$$

式中

$$K_1 = \frac{K}{\lambda_1 - i\omega}, \qquad K_2 = \frac{K}{\lambda_2 - i\omega}.$$

采用记号 $\langle a, b\rangle = \langle ab\rangle - \langle a\rangle\langle b\rangle$, 可计算出

$$\langle a'(\omega), a'(-\omega)\rangle = \frac{K^2 \epsilon(\varkappa - i\omega)}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)},$$

$$\langle a^+(\omega), a'(\omega)\rangle = \frac{K^2 \varepsilon^2}{(\lambda_2^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}, \quad (27)$$

于是由(25),(27)式便得

$$\langle :(\Delta b_1')^2: \rangle = \langle :b_1', b_1': \rangle = \frac{K^2(\varkappa + \varepsilon)\varepsilon}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)},$$

$$\langle :(\Delta b_2')^2: \rangle = \langle :b_2', b_2': \rangle = \frac{K^2(\varkappa - \varepsilon)\varepsilon}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}. \quad (28)$$

注意到

$$X_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}, \qquad X_2 = \frac{b_2}{i\sqrt{2}},$$

$$a = X_1 + iX_2. \quad (29)$$

于是由方程(23),(28),(29),得

$$\langle :(\Delta X_1)^2: \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{K^2(\varkappa + \varepsilon)\varepsilon}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)} + \frac{\varepsilon + 2\varkappa n_{\text{th}}}{2\lambda_1} D\right),$$

$$\langle :(\Delta X_2)^2: \rangle = \frac{-1}{2}\left(\frac{K^2(\varkappa - \varepsilon)\varepsilon}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)} + \frac{\varepsilon - 2\varkappa n_{\text{th}}}{2\lambda_2} D\right). \quad (30)$$

当 $K = 0$, 方程(30)给出

$$\langle :(\Delta X_1)^2: \rangle = \frac{\varepsilon + 2\varkappa n_{\text{th}}}{4(\varkappa - \varepsilon)},$$

$$\langle :(\Delta X_2)^2: \rangle = \frac{-\varepsilon + 2\varkappa n_{\text{th}}}{4(\varkappa + \varepsilon)}. \quad (31)$$

此即文献[10]的结果. 若 $\omega = 0$, $n_{\text{th}} \simeq 0$, 且 $K^2 = E(\varkappa^2 - \varepsilon^2)$, $E \leqslant 1$, 代入(30)式,得

$$\langle:(\Delta x_2)^2:\rangle = -\frac{1}{4}\frac{\varepsilon(1+E)}{\lambda_2}. \tag{32}$$

调节注入率 K，使得满足无规力消失条件，亦即

$$K^2 = \kappa^2 - \varepsilon^2. \tag{33}$$

又设腔的端面 A,B 的输出损耗分别为 κ_1,κ_2，参照图 1，由 A 面注入，于是有

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2, \quad K = \kappa_1 \ll \kappa. \tag{34}$$

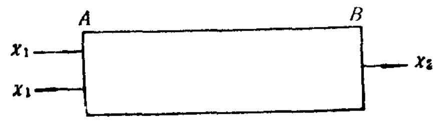

图 1

应用方程(33)，(34)，得

$$\varepsilon = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_1^2} \simeq \kappa - \kappa_1^2/2\kappa,$$

$$\langle(\Delta x_2)^2\rangle = \frac{1}{4} + \langle:(\Delta x_2)^2:\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\kappa}\right) \simeq \frac{1}{16}\frac{\kappa_1^4}{\kappa^2}. \tag{35}$$

故只要工作在阈值附近，$\kappa \simeq \varepsilon$，$\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - \varepsilon^2} \ll \kappa$，则腔内模式可达近乎理想压缩 $\langle(\Delta x_2)^2\rangle = \frac{1}{16}\kappa_1^2/\kappa^2 \simeq 0$。

[1] G. Millurn and D. F. Walls, *Opt. Commun.*, **39**(1981), 401.
[2] B. Yurke, *Phys. Rev.*, **A29**(1984), 408.
[3] P. H. Yuen and J. H. Shapiro, *Opt. Lett.*, **4**(1979), 334.
[4] A. Yariv and D. M. Pepper, *Opt. Lett.*, **1**(1977), 16.
[5] M. J. Collett and C. W. Gardiner, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1386.
[6] M. J. Collett, R. Loudon and C. W. Gardiner, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 881.
[7] M. J. Collett and R. Loudon, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 1525.
[8] H. Haken, Laser Theory Hanbuch der Physik, Band XXV/2C, Springer, Berlin, (1970), p. 41.
[9] W. W. Chow, M. O. Scully, E. W. Van Stryland, *Opt. Commun.*, **15**(1975), 6.
[10] Weihan Tan, Yufang Li and Weiping Zhang, *Opt. Commun.*, **64**(1987), 195.
[11] P. Kumar and J. H. Sharpiro, *Phys. Rev.*, **A30** (1984), 1568.
[12] M. Wolinsky and H. J. Carmichael, *Opt. Commun.*, **55**(1985), 138.

ENHANCED SQUEEZING OF THE INTRACAVITY LIGHT FIELD PRODUCED IN PARAMETRIC AMPLIFICATION VIA LASER INJECTION

TAN WEI-HAN ZHANG WEI-PING TAN WEI-SI

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai, 201800

(Received 7 November 1989)

ABSTRACT

For the squeezing of intracavity light fields produced in a parametric amplifier located within a cavity, we use laser injection which can compensate the effects of the cavity losses and therefore reduce the random force on the squeezing, and thus generate a large amount of intracavity squeezing near the threshold of oscillation.

PACC: 4250