

具有基本流动的两层流体界面 和表面孤波*

颜家壬 钟建新

湘潭大学物理系,湘潭,411105

1989 年 9 月 29 日收到

本文研究了具有基本流动的两层流体浅水孤波,利用多重尺度摄动方法求得了两流体界面和表面波所满足的 KdV 方程和相应单孤波解;对所得结果进行了讨论,并将其应用到海洋温跃层和有剪切流动的均匀密度流体两种常见情形。

PACC: 4325; 4735

一、引 言

近年来,流体表面孤波和多层流体界面孤波的研究引起了人们的广泛注意^[1-10]。但大多数的研究都避免了波与流体基本流动的相互作用。对于计及基本流动的单层流体浅水孤波理论, Peters^[1], 周显初^[2,3]等人先后作了一些工作,但计及基本流动的两层流体孤波的理论研究尚不多见。在实际情况中,一方面由于不同密度水质的存在使得流体广泛分层,另一方面由于涨潮、退潮、洋流等表明流体存在广泛的基本流动,因而对具有基本流动的两层流体孤波的研究具有实际意义。本文利用多重尺度摄动方法求得了两层流体表面和界面一阶位移所满足的 KdV 方程和相应单孤波解,并将结果应用到温跃层和具有剪切流动的均匀密度流体两种常见情形,得到了一系列具体结果。

二、基本方程及其解

本文研究满足如下条件的两层一维流体: (A) 两层流体都是无粘的、不可压缩的; (B) 流体运动是无旋的; (C) 上、下两层流体互不混溶,密度分别为 ρ_2, ρ_1 , 两流体密度比为 $\sigma, \sigma = \rho_2/\rho_1 < 1$; (D) 上层流体具有自由表面,下层流体处于水平固壁之上,基本流动的流速分别为 w_2, w_1 , 流动平衡时两流体的深度分别为 h_2, h_1 。

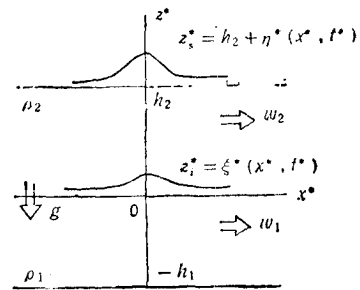


图 1

* 国家自然科学基金资助的课题。

引进如图 1 所示坐标系, 取原点于两流体未扰动时的界面上. 设上下两层流体扰动速度势分别为 $\phi^*(x^*, z_i^*, t^*)$, $\phi^*(x^*, z_i^*, t^*)$, 界面位移为 $z_i^* = \xi^*(x^*, t^*)$, 表面位移为 $z_s^* = h_2 + \eta^*(x^*, t^*)$. 引入小参量 ε

$$\varepsilon = |\xi^*|_{\max}/h_1 \quad (1)$$

及如下无量纲变量

$$\begin{aligned} z &= z^*/h_1, \quad x = \sqrt{\varepsilon} x^*/h_1, \quad t = \sqrt{\varepsilon g/h_1} t^*, \\ \phi^* &= h_1 \sqrt{\varepsilon g h_1} \phi, \quad \phi^* = h_1 \sqrt{\varepsilon g h_1} \phi, \quad \xi^* = h_1 \varepsilon \xi, \eta^* = h_1 \varepsilon \eta, \end{aligned} \quad (2)$$

则速度势满足如下基本方程和边界条件:

$$\varepsilon \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon \xi, \quad (3)$$

$$\phi_z = 0 \quad z = -1, \quad (4)$$

$$\varepsilon \xi_t - \phi_z + (\bar{w}_1 + \varepsilon \phi_x) \varepsilon \xi_x = 0 \quad z = \varepsilon \xi, \quad (5)$$

$$\varepsilon \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad \varepsilon \xi < z < \gamma + \varepsilon \eta, \quad (6)$$

$$\varepsilon \eta_t - \phi_z + (\bar{w}_2 + \varepsilon \phi_x) \varepsilon \eta_x = 0 \quad z = \gamma + \varepsilon \eta, \quad (7)$$

$$\eta + \phi_t + \bar{w}_2 \phi_x + \frac{1}{2} (\varepsilon \phi_x^2 + \phi_z^2) = 0 \quad z = \gamma + \varepsilon \eta, \quad (8)$$

$$\varepsilon \xi_t - \phi_z + (\bar{w}_2 + \varepsilon \phi_x) \varepsilon \xi_x = 0 \quad z = \varepsilon \xi, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \xi + \phi_t + \bar{w}_1 \phi_x + \frac{1}{2} (\varepsilon \phi_x^2 + \phi_z^2) = \sigma \left[\xi + \phi_t + \bar{w}_2 \phi_x \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varepsilon \phi_x^2 + \phi_z^2) \right] \quad z = \varepsilon \xi, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\bar{w}_1 = w_1/\sqrt{gh_1}$, $\bar{w}_2 = w_2/\sqrt{gh_1}$, $\gamma = h_2/h_1$ 称为深度比, g 为重力加速度, 右下标代表对相应变量求导.

将 ϕ 展为 $(z+1)$ 的幂级数, 并利用(3),(4)式有

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2!} \varepsilon (z+1)^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{1}{4!} \varepsilon^2 (z+1)^4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} + \dots \quad (11)$$

同样, 将 ϕ 展成为 $(z-\gamma)$ 的幂级数, 并利用(6)式得

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 + (z-\gamma) \phi_1 - \frac{1}{2!} \varepsilon (z-\gamma)^2 - \frac{1}{3!} \varepsilon (z-\gamma)^3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{4!} \varepsilon^2 (z-\gamma)^4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} + \frac{1}{5!} \varepsilon^2 (z-\gamma)^5 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)式代入(7)式得到

$$\phi_1 = \varepsilon (\eta_t + \bar{w}_2 \eta_x) + \varepsilon^2 (\eta \phi_{0x})_x + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

再将(11)–(13)式代入(5),(8),(9),(10)式分别得到

$$\xi_t + \bar{w}_1 \xi_x + \phi_{0xx} + \varepsilon (\xi \phi_{0x})_x - \frac{1}{3!} \varepsilon \phi_{0xxx} + O(\varepsilon^2) = 0, \quad (14)$$

$$\eta + \phi_{0t} + \bar{w}_2 \phi_{0x} + \frac{1}{2} \varepsilon \phi_{0x}^2 + O(\varepsilon^2) = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \xi_t + \bar{w}_2 \xi_x - \eta_t - \bar{w}_2 \eta_x - \gamma \phi_{0xx} + \varepsilon \left[(\xi \phi_{0x})_x - (\eta \phi_{0x})_x \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma^2 (\eta_{1xx} + \bar{w}_2 \eta_{2xxx}) \right. \\ \left. + \frac{1}{3!} \gamma^3 \phi_{0xxx} \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \xi + \phi_{0t} + \bar{w}_1 \phi_{0x} - \frac{1}{2} \varepsilon [\phi_{0txx} + \bar{w}_1 \phi_{0xxx} - (\phi_{0x})^2] \\ - \sigma \left\{ \xi + \phi_{0t} + \bar{w}_2 \phi_{0x} - \varepsilon \left[\gamma (\eta_{1t} + \bar{w}_2 \eta_{1x}) + \gamma \bar{w}_2 (\eta_{1x} + \bar{w}_2 \eta_{2x}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \gamma^2 (\phi_{0xxx} + \bar{w}_2 \phi_{0xxx}) - \frac{1}{2} (\phi_{0x})^2 \right] \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (17)$$

引入慢变量 $\tau = \varepsilon t$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (18)$$

作如下渐近展开:

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots, \quad (19)$$

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots, \quad (20)$$

$$\phi_{0x} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (21)$$

$$\phi_{0x} = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad (22)$$

将(18)–(22)式代入(14)–(17)式, 比较 ε 的各次幂系数, 得到各级近似方程.

一级近似

$$u_0 = (c - \bar{w}_1) \xi_0, \quad (23)$$

$$v_0 = \frac{(c - \bar{w}_2)}{(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma} \xi_0, \quad (24)$$

$$\eta_0 = \frac{(c - \bar{w}_2)^2}{(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma} \xi_0, \quad (25)$$

式中 c 由下式确定:

$$[(c - \bar{w}_1)^2 - 1][(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma] = \sigma \gamma. \quad (26)$$

(26)式表明 c 可取 4 个值.

二级近似

将一级近似结果代入(14)–(17)式, 经过复杂运算, 由消去长期项的要求得到 ξ_0 所满足的方程

$$\xi_{0t} + \alpha \xi_0 \xi_{0\xi} + \mu \xi_0 \xi_{0\xi\xi} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{3}{2} \left\{ (c - \bar{w}_1)^2 + \frac{\sigma \gamma (c - \bar{w}_2)^2}{[(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma]^3} \right\} / \left\{ (c - \bar{w}_1) \right. \\ \left. + \frac{\sigma \gamma (c - \bar{w}_2)}{[(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mu = \frac{1}{6} \left\{ (c - \bar{w}_1)^2 + \frac{\sigma \gamma (c - \bar{w}_2)^2}{(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma} \left[3(c - \bar{w}_2)^2 \right. \right.$$

$$+ \frac{\gamma^2}{(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma} \Big] \Big/ \left\{ (c - \bar{w}_1) + \frac{\sigma\gamma(c - \bar{w}_2)}{[(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma]^2} \right\}, \quad (29)$$

式中 $\xi = x - ct$ 。方程(27)就是著名的 KdV 方程。故界面的单孤波解为

$$\xi_0 = a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\alpha a}{12\mu}} \left(x - ct - \frac{1}{3} \alpha a \varepsilon t \right) \right]. \quad (30)$$

利用(25)式,可得到表面的单孤波解

$$\eta_0 = \frac{(c - \bar{w}_2)^2}{(c - \bar{w}_2)^2 - \gamma} a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\alpha a}{12\mu}} \left(x - ct - \frac{1}{3} \alpha a \varepsilon t \right) \right], \quad (31)$$

式中 a 为由初始条件确定的界面孤波的波幅。

由(30)式可以看出,当 $\alpha/\mu > 0$ 时, $\xi_0 > 0$, 称为凸孤波;当 $\alpha/\mu < 0$ 时, $\xi_0 < 0$, 称为凹孤波。若记 $D = \mu/\alpha$, 则可以通过考察 D 的符号来确定界面孤波是凸的还是凹的, D 的大小表征了孤波的波宽,称 D 为孤波波宽常数。

三、结果讨论

1. 通过分析(26)式发现孤波分为两种模式。满足条件

$$(c - \bar{w}_1)^2 - 1 > 0, (c - \bar{w}_2)^2 - \gamma > 0 \quad (32)$$

的孤波称为快波模式孤波;满足条件

$$(c - \bar{w}_1)^2 - 1 < 0, (c - \bar{w}_2)^2 - \gamma < 0 \quad (33)$$

的孤波称为慢波模式孤波。依据(30),(31)式可得如下结论:在快波模式下,界面孤波与表面孤波总是凹凸相同的,且永远为凸孤波;在慢波模式下,界面孤波与表面孤波总是凹凸相反的。

2. 在(26)式中, $c = 0$ 表示慢波模式孤波消失,此时得到

$$(\bar{w}_1^2 - 1)(\bar{w}_2^2 - \gamma) = \sigma\gamma. \quad (34)$$

若 $\bar{w}_1 = 0$, 令 $\bar{w}_2 = \bar{w}$, 则(34)式成为

$$\bar{w} = \sqrt{(1 - \sigma)\gamma}. \quad (35)$$

此式表示当 $\bar{w} \geq \sqrt{(1 - \sigma)\gamma}$ 时,慢波模式孤波不再存在。

3. 无基本流动时,(28),(29),(26)式分别化为

$$\alpha = \frac{3c}{2} \left[1 + \frac{c^2 - 1}{(c^2 - \gamma)^2} \right] \Big/ \left[1 + \frac{c^2 - 1}{c^2 - \gamma} \right], \quad (36)$$

$$\mu = \frac{1}{6} c \left[1 + \gamma^2 \frac{c^2 - 1}{c^2 - \gamma} + 3c^2(c^2 - 1) \right] \Big/ \left[1 + \frac{c^2 - 1}{c^2 - \gamma} \right], \quad (37)$$

$$(c^2 - 1)(c^2 - \gamma) = \sigma\gamma, \quad (38)$$

这就回到了文献[10]的结果。

四、温跃层情形

令 $\sigma = (1 - \delta)$, 在温跃层,海水密度从 1024kg/m^3 增加到 1028kg/m^3 , 所以 δ 为

0.3—0.4%。以下为讨论方便且不失一般性，令 $\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_2 = \bar{w}$ 。

首先分析慢波模式情形，由(35)式得到温跃层慢波模式孤波的存在条件

$$\bar{w} < \sqrt{\delta\gamma}, \tag{39}$$

因而在慢波模式中，要求 $\bar{w} \ll 1$ 。由(26),(28),(29)式进行近似运算得到

$$c \approx \frac{\bar{w} \pm \sqrt{(1+\gamma)(1-\sigma)\gamma - \gamma\bar{w}^2}}{1+\gamma}, \tag{40}$$

$$\alpha \approx \frac{3[\gamma^2 c^2 - \sigma(c - \bar{w})^2]}{2\gamma[\gamma c + \sigma(c - \bar{w})]}, \tag{41}$$

$$\mu \approx \frac{\gamma[c^2 + \sigma\gamma(c - \bar{w})^2]}{6[\gamma c + \sigma(c - \bar{w})]}. \tag{42}$$

该结果与作者在研究两固壁间有基本流动的两层流体界面孤波所得结论完全相同^[11]，故也可称慢波模为界面波模。

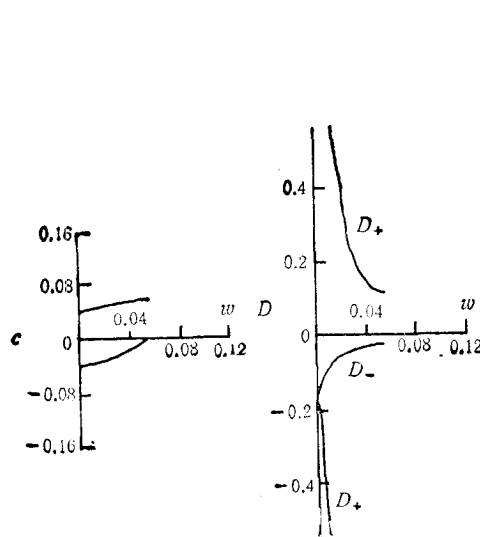


图2 基本流动对慢波模式界面孤波的影响 $\sigma = 0.996; \gamma = 2; D_+, D_-$ 分别对应于 $c > 0, c < 0$ 时的 D 值； $\bar{w} = 0$ 时为凹孤波

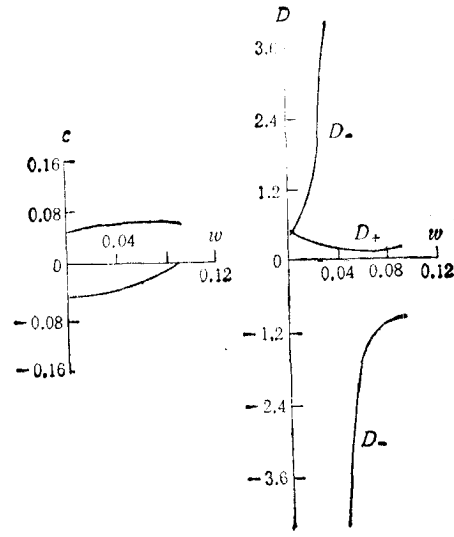


图3 基本流动对慢波模式界面孤波的影响 $\sigma = 0.996; \gamma = 2; D_+, D_-$ 分别对应于 $c > 0, c < 0$ 时的 D 值； $\bar{w} = 0$ 时为凸孤波

确定 c 的方程(26)式是一个4阶代数方程，不能求其慢波模波速 c 的精确解，取定两组数据 ($\sigma = 0.996, \gamma = 0.7$), ($\sigma = 0.996, \gamma = 2$) 进行数据处理，分析基本流动对慢波模式界面孤波的影响，发现结论与近似计算相符。

对快波模式界面孤波，由(26),(28),(29)式得到

$$\frac{dc}{d\bar{w}} > 0, \tag{43}$$

$$\frac{dD}{d\bar{w}} < 0 \quad (c > 0); \quad \frac{dD}{d\bar{w}} < 0 \quad (c < 0). \tag{44}$$

(37),(38)式表明，与静水假定下相同波幅的界面孤波比较，有基本流动时顺水孤波波速

增加、波宽减小;逆水孤波则相反。

五、具有剪切流动的均匀密度流体界面和表面孤波

由于涨潮、退潮以及风吹等原因,均匀密度流体往往存在剪切流动。通常,这种剪切流动指的是在流体的表层存在基本流速,由于表层深度较小,可以近似地认为表层各处的基本流速是相同的。在此模型的基础上研究有剪切流动时流体的界面和表面孤波。这相当于 $\sigma = 1$, $w_1 = 0$ 。记 $\bar{w}_2 = \bar{w}$,由(26)式有

$$(c^2 - 1)[(c - \bar{w})^2 - \gamma] = \sigma\gamma. \quad (45)$$

显然该情形无慢波模式孤波。要严格求解(45)式是十分困难的,考虑 $\bar{w} \ll 1$,通过近似计算得到

$$c \approx c_0 + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \bar{w}, \quad (46)$$

$$D \approx D_0 + \frac{\gamma^4 - 7\gamma^3 - 9\gamma^2 - 5\gamma}{(1 + 3\gamma + 4\gamma^2)c_0^3} 2D_0\bar{w}, \quad (47)$$

$$c_0 = \pm \sqrt{1 + \gamma}, \quad (48)$$

$$D_0 = \frac{1 + \gamma(\gamma^2 + 3\gamma + 3)}{9(1 + \gamma)}, \quad (49)$$

式中 D 为界面孤波波宽常数; c_0 , D_0 分别为 $\bar{w} = 0$ 时的 c , D 值。于是得到表面孤波波宽常数 D_{*} 随 \bar{w} 变化的情形,

$$D_{*} \approx D_{*0} + \frac{\gamma^4 - 3\gamma^3 - 6\gamma^2 - 4\gamma}{(1 + 3\gamma + 4\gamma^2)c_0^3} 2D_{*0}\bar{w}, \quad (50)$$

$$D_{*0} = D_0 \cdot (1 + \gamma). \quad (51)$$

由于所讨论的模型要求 γ 较小,从而由(46)–(51)式得出如下结论:与具有相同波幅的静水孤波比较,存在基本流动时,顺水界面孤波和表面孤波波速增加,波宽变窄;逆水界面孤波和表面孤波波速减小,波宽变宽。

[1] A. S. Peters, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **19**(1966), 445.

[2] 周显初,中国科学A辑,(2)(1986),168.

[3] 周显初,力学学报,**17**(1985),84.

[4] G. H. Keulegan, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, **51**(1953), 133.

[5] R. R. Long, *Tellus*, **8**(1956), 460.

[6] T. Kakutani and N. Yamasaki, *J. phys. Soc. Japan*, **45**(1978), 674.

[7] J. W. Miles, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**(1980), 11.

[8] R. H. J. Grimshaw, *J. Fluid Mech.*, **86**(1978), 415.

[9] 戴世强,力学学报,**15**(1983),623.

[10] 戴世强,应用数学和力学,**3**(6)(1982),721.

[11] 钟建新,颜家壬,已投声学学报.

SOLITARY WAVES ON A TWO-LAYER FLUID WITH BASIC CURRENTS

YAN JIA-REN ZHONG JIAN-XIN

Department of Physics, Xiangtan University, Xiangtan, 411105

(Received 29 September 1989)

ABSTRACT

In this paper, we study the interface and surface solitary waves on a two-layer fluid with basic currents. It is found that there are two modes of solitary waves, i.e., the fast mode and the slow mode, they are always governed by a KdV equation. The influence of currents on solitary waves is discussed. By using the two-fluid model, the thermocline in ocean is studied, the long, weak nonlinear waves in a homogeneous density fluid with shear flow are studied also.

PACC: 4325; 4735